

Universidad de las Américas Puebla  
Escuela de Ciencias  
Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas  
Tesis de licenciatura

**Estudio de la estructura cortical en  
Guerrero, México, mediante la inversión  
de funciones de receptor**

Graciela Rojo Limón

Dirigida por Víctor Manuel Cruz Atienza

Cerrada de Andador Norte No. 22, Fraccionamiento Villa  
las Américas

Cholula, Puebla a 20 de mayo del 2015

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1 Propagación de ondas sísmicas en un medio continuo</b>	<b>5</b>
1.1 Teoría de esfuerzos . . . . .	5
1.1.1 La mecánica del medio continuo . . . . .	5
1.1.2 Esfuerzo físico . . . . .	8
1.1.3 Tensor de esfuerzos . . . . .	9
1.2 Teoría de deformaciones . . . . .	12
1.2.1 Deformación física . . . . .	12
1.2.2 Tensor de deformación . . . . .	14
1.2.3 Tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy . . . . .	16
1.3 Teoría de la elasticidad . . . . .	18
1.3.1 Termodinámica de las deformaciones . . . . .	18
1.3.2 Ley de Hooke . . . . .	21
1.3.3 Ecuación de Navier . . . . .	26

1.4	Propagación de ondas . . . . .	29
1.4.1	La ecuación de onda y su solución . . . . .	29
1.4.2	Propagación de ondas en un medio . . . . .	32
1.4.3	Principio de Fermat . . . . .	36
1.4.4	Incidencia SH en una interfase elástica . . . . .	39
1.4.5	Incidencia P y SV en una interfase elástica . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Fundamentos matemáticos para el estudio de la propagación de ondas sísmicas</b>	<b>45</b>
2.1	Tratamiento de señales . . . . .	45
2.1.1	Transformada de Fourier . . . . .	45
2.1.2	Sistemas lineales . . . . .	51
2.1.3	Convolución . . . . .	54
2.1.4	Deconvolución . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Fases sísmicas terrestres</b>	<b>59</b>
3.1	Definición . . . . .	59
3.2	Modelo estructural de velocidades terrestres . . . . .	62
3.3	Nomenclatura . . . . .	66

<b>4</b>	<b>Funciones de receptor</b>	<b>71</b>
4.1	Definición . . . . .	71
4.2	Construcción . . . . .	74
4.3	Contenido . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Teoría de inversión</b>	<b>81</b>
5.1	Uso en la sismología . . . . .	81
5.2	Términos generales . . . . .	81
5.3	Métodos de inversión locales . . . . .	84
5.3.1	Métodos de búsqueda local . . . . .	85
5.3.2	Modelado de funciones de receptor con métodos locales	96
5.4	Métodos de inversión heurísticos . . . . .	99
5.4.1	Cristalización simulada . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Inversión de funciones de receptor en Guerrero, México</b>	<b>110</b>
6.1	Introducción . . . . .	110
6.2	Los datos . . . . .	114
6.3	Construcción de apilados y selección de los modelos solución .	117
6.4	Inversión de funciones de receptor . . . . .	120

<b>7 Conclusiones</b>	<b>125</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>128</b>
<b>Anexos</b>	<b>130</b>
<b>Referencias</b>	<b>136</b>

## Resumen

En este trabajo se llevó a cabo una extensa revisión teórica para la determinación de las propiedades elásticas de la corteza terrestre a través de la inversión de funciones de receptor. Asimismo, se adaptó y aplicó esta metodología en una región específica del estado de Guerrero donde ocurren persistentemente tremores tectónicos en profundidad. La sección teórica abarca del capítulo primero al quinto, y la práctica del sexto al octavo.

En la sección teórica, se habla de temas como la mecánica de medios continuos, la física de las ondas, las fases sísmicas, las funciones de receptor y los métodos de inversión geofísica, en específico el de Cristalización Simulada. Todos estos aspectos son la base científica de los procedimientos realizados durante la investigación. En la sección práctica se analizaron los registros telesísmicos de varias estaciones del arreglo sísmico MASE y del Servicio Sismológico Nacional, todas ellas localizadas sobre el Sweet Spot de Guerrero (i.e., en la región ubicada entre las distancias de 200 y 240 km de la trinchera mesoamericana). Las funciones de receptor derivadas de estos registros se modelaron resolviendo el problema inverso con el algoritmo de Cristalización Simulada, obteniendo como resultado ciertos modelos de espesores, velocidades y módulos de Poisson para la corteza continental, la oceánica y el manto litosférico. Al final, se compararon los resultados obtenidos con investigaciones previas.

## Introducción

Un físico es quien es suficientemente observador y creativo para detectar un mecanismo de acción en un fenómeno natural y explicarlo a través de un conjunto de leyes y teoremas lógicos. Esto aplica a un sinnúmero de cuestiones, de las cuales no escapa el planeta en que vivimos. La Tierra es un objeto de estudio físico muy complejo en que intervienen todas las Ciencias del Medio Ambiente.

Gracias a la mirada atenta de cientos de sismólogos, el paso de las ondas por su interior ha revelado aspectos de su composición y su *modus operandi*. Con el paso del tiempo, las ideas han sido abordadas con mayor certeza y han ido acumulando sustento. Esto es de mucha importancia pues no se ha podido penetrar directamente con perforaciones a profundidades mayores de  $\sim 12$  km [26]. Es también gracias a este impedimento que la sismología ha desarrollado diversas técnicas de análisis de datos como son las funciones de receptor. Aunque los modelos físicos no representan al 100% la realidad, la información contenida en las funciones de receptor revela aspectos clave de la constitución de la corteza y del manto [9].

Este trabajo surgió a partir del creciente interés de la comunidad geofísica por la zona de Guerrero, parte de México en la que la subducción de la placa de Cocos es virtualmente plana a distancias mayores de 150 km de la trinchera. En esta zona se observan fenómenos conocidos como tremores no volcánicos (NVT, por sus siglas en inglés) y sismos silenciosos. Los tremores no volcánicos son señales sostenidas que pueden durar entre varios minutos y unas horas, y normalmente se estudian en frecuencias entre

1 y 15 Hz [35]. Los sismos silenciosos son dislocaciones (i.e., deslizamientos) lentas en la superficie de contacto entre las placas continental y oceánica que pueden durar de varias semanas a meses. Se nombran silenciosos porque no presentan un movimiento abrupto sino paulatino y cuasi-estático. En la zona de Guerrero, los sismos lentos y los tremores están vinculados, siendo que hay un aumento en la presencia de tremores si ocurre un sismo lento [37] [25]. La mayor cantidad de tremores ha sido localizada en la región denominada "Sweet Spot" [20], [10], [13] (i.e., a una distancia de 200 a 250 km de la trinchera oceánica tierra adentro), que es precisamente donde se localizan la gran mayoría de las estaciones sísmicas usadas en este trabajo, precisamente para determinar las propiedades elásticas de la corteza en esta región de gran interés geológico.

El marco teórico es bastante extenso. Sin embargo, los conceptos abordados de matemáticas avanzadas, programación en MATLAB, teoría de propagación de ondas, conceptos básicos de geofísica y elasticidad fueron indispensables para el desarrollo de este trabajo.

Este estudio es innovador por la zona de estudio, pues ningún trabajo previo ha inferido la estructura cortical en el Sweet Spot a través de la inversión de funciones de receptor. Publicaciones previas en la parte central de México, como las de Campillo et al. [8], Song et al. [44], Kim et al. [22], Dougherty y Clayton [12] e Iglesias et al. [21], han revelado propiedades interesantes de cómo puede verse la zona entre la corteza oceánica y la continental en la región de estudio, como son una capa de ultra baja velocidad en la parte superior de la placa oceánica [39], [44] con valores anómalamente altos de su módulo de Poisson y del cociente  $V_p/V_s$  [23]. Sin embargo,

ninguno de estos trabajos ha resuelto la estructura cercana al Moho con la resolución que posee la técnica empleada en este estudio. La determinación de las propiedades elásticas del contacto entre ambas placas permitiría saber, por ejemplo, hasta dónde el contenido de agua es inminente en esta región [3], [38] y así entender mejor el origen de los tremores no volcánicos y de los sismos lentos. Este trabajo aporta elementos importantes para poner a prueba diferentes hipótesis sobre el origen de estos fenómenos.

# 1 Propagación de ondas sísmicas en un medio continuo

## 1.1 Teoría de esfuerzos

### 1.1.1 La mecánica del medio continuo

La mecánica es una disciplina que permite construir modelos sobre el comportamiento de ciertas partes de la naturaleza a las que llama cuerpos [47]. A estos cuerpos se les asocian ciertas propiedades fundamentales como una masa, un momento lineal y una energía. Estas propiedades están bien definidas en un cuerpo que ocupa un espacio físico  $E_0$  en un marco de referencia cuatro-dimensional [9].

La densidad de alguna de estas propiedades supone una partición finita de los elementos que lo componen [47] cuya suma integra  $E_0$ . En la figura (1) se observa cómo un punto  $P$  que se encuentra dentro de  $E_0$  es aproximado por áreas interiores cada vez más pequeñas.

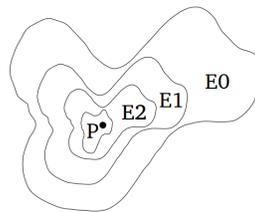


Figura 1: Cuerpo dividido en diferentes regiones cada vez más cercanas a P.

Usando como ejemplo la masa [9],

$$\rho_m(P) = \frac{M_n}{V_n}. \quad (1)$$

En cambio, la mecánica de medios continuos propone una partición infinita, que se modela con el límite [47].

$$\rho_m(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{V_n}. \quad (2)$$

Si se demuestra que en el punto P es el valor límite de la función de densidad de masa cuando n tiende a infinito, este límite existe (en todas las direcciones espaciales) y además es el valor real de la densidad de masa en ese punto, entonces se puede decir que la densidad de masa es continua en P. Esta condición es necesaria pero no suficiente para que sea derivable. Si se supone la función de densidad de masa continua y derivable en todos los puntos de  $E_0$  entonces se dice que el espacio acotado por  $E_0$  posee una distribución continua de masa [9].

Generalizando al momento lineal y a la energía, una propiedad del medio continuo es aquella descrita por una función continua y derivable del tiempo o del espacio [29], según la propiedad en cuestión. Es importante mencionar también que la matemática que origina la física de medios continuos es la continuidad de los números reales. Dicho axioma se adopta en la medición tanto de tiempo (una dimensión) como del espacio (de tres dimensiones en este trabajo). Es así como adoptando un sistema espacial,

por ejemplo el cartesiano, se tiene un marco de referencia continuo cuatro-dimensional [9].

En resumen, el concepto de medio continuo consiste en idealizar los cuerpos olvidando su estructura molecular o cristalina, como si estuvieran formados por una masa sin huecos ni separaciones en su interior. Esta idealización se hace, en el caso de el estudio de este trabajo, dado el carácter macroscópico de los objetos a tratar [29].

Cabe destacar que el carácter continuo de un medio no depende de si es homogéneo o heterogéneo. El primero es el caso en que la serie de cocientes es exactamente igual en cada uno de los elementos que componen la recta real en la que se puede medir la densidad de una propiedad, que sucede conforme  $V_n$  tiende a cero, y son exactamente iguales a su vez al valor en el límite. Las propiedades que se mantienen homogéneas consistirán en este material una propiedad extensiva (dependientes de la cantidad de sustancia presente) . El caso de inhomogeneidad es cuando estas igualdades no están presentes pero se conserva la continuidad en las variaciones de las mismas si  $V_n$  tiende a cero [9]. En el caso en que las propiedades varíen de forma continua, pasan de considerarse propiedades extensivas a propiedades intensivas (independientes de la cantidad de sustancia) [29]. Las propiedades que caracterizan un medio continuo que interesan en este trabajo son las mecánicas: las fuerzas de cuerpo, los esfuerzos y las deformaciones, en especial las últimas dos. Este par se describirá en los apartados siguientes [29].

### 1.1.2 Esfuerzo físico

El esfuerzo físico es lo que sirve a la mecánica de medios continuos para describir la influencia de un cuerpo sobre otro. En la mecánica tradicional, este concepto se conoce como fuerza. Es claro que se requiere un nuevo formalismo que describa la interacción en un medio en que no hay una separación corpuscular.

La tercera ley de Newton dicta que un cuerpo se encuentra en equilibrio si la suma de las fuerzas actuando sobre él es cero. En un medio continuo, las fuerzas externas lo deforman, dando lugar a fuerzas internas adicionales [49]. Estas fuerzas internas, al ser de origen molecular, tienen un campo de acción muy pequeño [27], así que se considerarán como fuerzas externas entre una porción infinitesimal del espacio y otra porción inmediatamente adyacente. Estas dos porciones se separan por una superficie infinitesimal  $\Delta S$ . De un lado  $a$  de la superficie se supondrá una fuerza que actúa hacia el lado  $b$ . Así, una fuerza será necesaria desde  $b$  hacia  $a$  para que el medio permanezca en equilibrio interno.  $\Delta f$  es el nombre de la suma de fuerzas que aplica la porción infinitesimal del lado  $a$  sobre  $\Delta S$ . Cabe destacar que la superficie está determinada por un vector normal a la misma llamado  $\hat{n}$  [49]. Este vector define la dirección de la fuerza; si se aplica en la misma dirección que el vector unitario, la fuerza será positiva. [14]

El vector de esfuerzos se define como

$$\lim_{\Delta S \rightarrow \infty} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \mathbf{t}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3)$$

Es importante notar que corresponde únicamente a una sección infinitesimal del cuerpo.  $\hat{\mathbf{n}}$  se escribe como superíndice del vector de esfuerzos pues este

último depende siempre del área en que se aplica. Al cambiar el vector normal habrá una modificación en  $\mathbf{t}$

Sus unidades son

$$[t_i^{\hat{\mathbf{n}}}] = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{\text{masa}}{\text{longitud} \cdot \text{tiempo}^2} \quad (4)$$

El vector de esfuerzos se puede escribir en términos de sus componentes. En el caso cartesiano

$$\mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}} = (t_x^{\hat{\mathbf{n}}}, t_y^{\hat{\mathbf{n}}}, t_z^{\hat{\mathbf{n}}}) \quad (5)$$

Se observa que en el caso de la sección opuesta a la considerada el vector de esfuerzos debe ser el negativo del visto para que al reunir las partes el cuerpo esté en equilibrio.

Para este estudio hay que identificar las direcciones asociadas a los planos de corte elegidos. Para el vector de esfuerzos, la componente en la dirección de  $\hat{\mathbf{n}}$  se conoce como componente normal. Las componentes que quedan sobre el plano ortogonal a éste se conocen como componentes cortantes [49].

### 1.1.3 Tensor de esfuerzos

Para definir el tensor de esfuerzos, se supone una porción infinitesimal del medio continuo delimitada por tres planos perpendiculares entre sí. Se acostumbra que los vectores normales a estas tres superficies sean paralelos a  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  y  $\hat{e}_z$ . Por lo tanto, un esfuerzo que actúa sobre esta porción infinitesimal se representa por los vectores  $\mathbf{t}_j^{\hat{e}_x}$ ,  $\mathbf{t}_j^{\hat{e}_y}$  y  $\mathbf{t}_j^{\hat{e}_z}$ .

Agrupando estos tres vectores en un arreglo se obtiene el tensor de segundo orden conocido como tensor de esfuerzos [9].

$$t_j^{\hat{e}_i} = \sigma_{ij} = \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

donde los tres  $\sigma_{ii}$  reciben el nombre de esfuerzos normales y todos los  $\sigma_{ij}$  con  $i \neq j$  se conocen como esfuerzos cortantes [49]. Los esfuerzos cortantes se representan también por la letra  $\tau$  [14]. La figura (2) muestra gráficamente la dirección en que se aplica cada una de las componentes en el elemento infinitesimal definido al inicio de esta subsección. Cabe resaltar que la convención establecida anteriormente para el signo del componente del tensor de esfuerzos será también acorde a si dicha componente ocurre de forma paralela o antiparalela al vector normal.

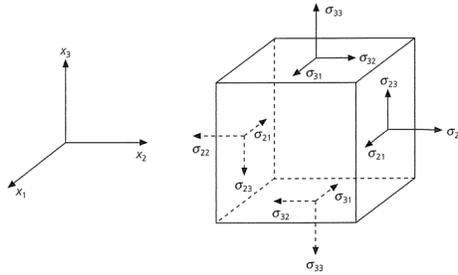


Figura 2: Componentes del tensor de esfuerzos aplicados a una unidad de volumen infinitesimal [46].

Otro aspecto importante es la relación de cada una de las entradas de este tensor con las coordenadas espaciales

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z) \quad (7)$$

La relación entre el vector de esfuerzos y el tensor de esfuerzos está dada por la fórmula de Cauchy

$$\mathbf{t}_j^{\hat{\mathbf{e}}_i} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \underline{\sigma}. \quad (8)$$

Por otro lado, las tracciones superficiales  $T_j^v$  son una generalización del vector de esfuerzos, pero en vez de estar dirigido en la dirección perpendicular de la superficie en que se aplica, está dirigido en la dirección de un vector  $v$  cualquiera. [14]. Así, se puede construir el vector de esfuerzos o el vector tracciones superficiales eligiendo una dirección de interés determinada por  $\hat{\mathbf{n}}$  o un vector no normal a  $S$  [49].

En el caso particular en que el tensor de esfuerzos tenga únicamente términos en la diagonal, y esté en un medio que ejerza una presión  $p$  igual en todas sus caras

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \quad (9)$$

[27].

Una característica importante de  $\underline{\sigma}$  es su simetría

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (10)$$

Para probarla, se consideran las ecuaciones tanto de los esfuerzos como de las fuerzas existentes en una porción volumétrica infinitesimal del medio continuo, las cuales permiten el equilibrio mecánico del mismo [27]. Sobre este tema y la demostración de la fórmula de Cauchy, favor de referirse a los escritos utilizados en este trabajo de Fung, Landau, Velasco y Levi.

## 1.2 Teoría de deformaciones

### 1.2.1 Deformación física

Al aplicarse un esfuerzo, el fenómeno en que los cuerpos elásticos cambian de forma y volumen [49] se conoce como deformación [27]. Si las fuerzas son cortantes entonces la deformación será cortante. Si la fuerza es normal, la deformación será normal. En esta subsección se introduce de una manera formal la deformación y se relaciona con los esfuerzos.

Una manera natural de definir la deformación es con la relación entre la longitud inicial de un cuerpo y su longitud final al aplicársele un esfuerzo. Si un cuerpo tiene en una de sus dimensiones una longitud inicial  $L_0$  y tras aplicársele un  $\underline{\sigma}$  cualquiera ahora mide  $L$ , la deformación puede expresarse intuitivamente con cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{L}{L_0} \\ \epsilon &= \frac{L - L_0}{L_0} \\ \epsilon' &= \frac{L - L_0}{L}.\end{aligned}\tag{11}$$

De estas tres medidas se elimina la longitud del cuerpo como una consideración. Se ha encontrado una relación experimental para muchos materiales en la que se introducen las magnitudes más usuales para medir la deformación. Una de ellas es

$$e = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}\tag{12}$$

y la otra se relaciona con el ángulo con que se deforma un objeto al torcerlo y se conoce también como deformación cizallante, como se ve en la imagen

(3) Se acostumbra, en vez de utilizar  $\alpha$ , tomar  $\tan(\alpha)$  o  $\frac{1}{2}\tan(\alpha)$ .

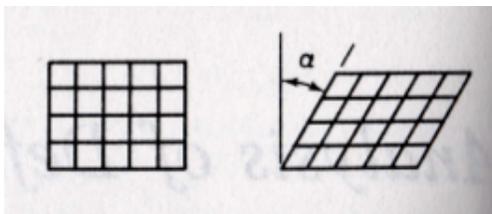


Figura 3: Deformación de cizalla [14].

La relación experimental de la que se habla arriba es de gran importancia en la teoría de la elasticidad y se conoce como Ley de Hooke

$$\begin{aligned}\sigma &= E\epsilon \\ \tau &= G\tan(\alpha).\end{aligned}\tag{13}$$

En las ecuaciones anteriores se observa ya la naturaleza tensorial de las deformaciones. La primera relaciona la parte normal del tensor de esfuerzos con una parte del tensor de deformaciones. La constante  $E$  se conoce como módulo de Young. Si la relación se cumple, se dice que el material es Hookeano. La segunda ecuación relaciona la parte cortante del tensor de esfuerzos con otra parte del tensor de deformaciones.  $G$  se conoce como módulo de rigidez. Las ecuaciones en (13) son la manera más simple de relacionar los esfuerzos con las deformaciones. En la subsección 1.3.2 se hablará con mayor profundidad del tema.

La descripción matemática de la deformación se hace de la siguiente manera. Primero, se define el vector de posición  $\mathbf{r}$  de cualquier punto en el cuerpo

$$\mathbf{r} = (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z),\tag{14}$$

donde sus componentes están en un sistema de coordenadas definido.

Cuando hay una deformación, las componentes de  $\mathbf{r}$  para cada

punto se modifican y se convierten en el nuevo vector  $\mathbf{r}'$ . Considerando únicamente desplazamientos infinitesimales en un punto en particular [49], se llama vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  a la diferencia entre sus nuevas coordenadas y las originales

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = (u_1 = x'_1 - x_1, u_2 = x'_2 - x_2, u_3 = x'_3 - x_3). \quad (15)$$

Dado que las coordenadas  $x'_i$  son función de las coordenadas  $x_i$ , entonces  $u_i$  es también función de ellas;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_i)$ . [27]. En la mecánica de medios continuos, la transformación de  $x_i$  en  $x'_i$  se asume biyectiva, por lo tanto continua y con inversa única. [14]. Esto significa que si se conoce ya sea la deformación o  $\mathbf{r}'$  para todos los puntos de un cuerpo, entonces se puede encontrar la posición inicial de cada uno de ellos [9].

### 1.2.2 Tensor de deformación

Considerando dos puntos, la distancia entre ellos se modifica tras una deformación. En este caso, se considerarán dos puntos infinitamente cercanos. Para conocer completamente la posición relativa entre los elementos de un cuerpo elástico tras una deformación y su posición individual relativa a su punto de origen, es clave entender el cambio en la longitud del segmento que los une [14]. Si el vector radial entre los puntos antes de la deformación es  $\mathbf{dx} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ , éste se convierte en  $\mathbf{dx}' = (dx'_1, dx'_2, dx'_3)$  tras la deformación. Lo mismo ocurre con la distancia entre ellos

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2} \\ dl' &= \sqrt{(dx'_1)^2 + (dx'_2)^2 + (dx'_3)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

Utilizando la convención de suma de Einstein

$$dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 \quad (17)$$

y sustituyendo  $dx_i' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} dx_k$  y  $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_k'} dx_k'$  entonces

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx_i dx_j = \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_l'} dx_l' \frac{\partial x_j}{\partial x_m'} dx_m' \\ dl'^2 &= \delta_{ij} dx_i' dx_j' = \delta_{ij} \frac{\partial x_i'}{\partial x_l} dx_l \frac{\partial x_j'}{\partial x_m} dx_m. \end{aligned} \quad (18)$$

La resta de ambas ecuaciones se torna en cualquiera de las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} dl'^2 - dl^2 &= (\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_j} - \delta_{ij}) dx_i dx_j \\ dl'^2 - dl^2 &= (\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_j}) dx'_i dx'_j. \end{aligned} \quad (19)$$

Se definen los tensores de deformación

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_j} - \delta_{ij}) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_j}) \end{aligned} \quad (20)$$

para que

$$dl'^2 - dl^2 = 2E_{ik} dx_i dx_k = 2e_{ik} dx'_i dx'_k. \quad (21)$$

. El tensor  $E_{ij}$  se llama tensor de deformaciones de Green o tensor de deformaciones en coordenadas Lagrangianas, y  $e_{ij}$ , tensor de deformaciones de Almansi o tensor de deformaciones en coordenadas Eulerianas. La única diferencia entre ambos es su sistema de referencia;  $x_i$  o  $x'_i$  [9].

Partiendo de (15), se puede ver que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \delta_{\alpha i} \\ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_i} &= \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x'_i}, \end{aligned} \quad (22)$$

lo cual simplifica (20) a

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right] \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Es éste último el tensor de deformaciones en coordenadas cartesianas  $e_{ik}$ , que representa el cambio en un elemento de longitud cuando un cuerpo se deforma [14], [27].

La ecuación (23) tiene como consecuencia que si  $dl'^2 - dl^2 = 0$  entonces  $e_{ij} = 0$ . Una deformación en la cual ninguna distancia entre dos puntos se modifica es el movimiento de un cuerpo rígido. Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para que la deformación de un cuerpo describa el mov. rígido es que todas las componentes de  $e_{ik}$  sean cero en todo el cuerpo.

### 1.2.3 Tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy

De ahora en adelante se utilizará  $e_{ij}$  como tensor de deformaciones. Éste puede reducirse más en el caso que las componentes  $u_j$  de desplazamiento infinitesimal sean tan pequeñas que el producto de sus derivadas parciales sea despreciable. El tensor de deformaciones se convierte en el tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]. \quad (24)$$

Así como sucede con  $\sigma$ , los tres  $e_{ii}$  reciben el nombre de deformaciones normales y todos los  $e_{ij}$  con  $i \neq j$  se conocen como deformaciones

cortantes. Estos últimos se representan también por la letra  $\gamma$  multiplicada por dos;

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy}. \quad (25)$$

Dada la construcción de  $e_{ij}$ , se trata, como  $\sigma$ , de un tensor simétrico. [14].

La interpretación geométrica de las componentes del tensor de deformación difiere en tanto sean elemento de la diagonal o no. Los elementos de la diagonal tienen el resultado particular de la ecuación (24)

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (26)$$

que es la elongación de la superficie del cuerpo definida por  $\hat{e}_i$  en la dirección  $\hat{e}_i$ . En estas deformaciones se presenta un cambio de volumen pero no de forma. Por su parte, en las deformaciones cortantes hay un cambio de forma pero no un cambio de volumen, en que  $tr(\underline{e}) = 0$ ,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) \quad (27)$$

, donde hace referencia al ángulo  $\alpha$  del que se habló en la subsección anterior. Así, cualquier deformación puede representarse como la suma de una deformación pura y una cortante

$$e_{ik} = (e_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}e_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik}e_{ll}. \quad (28)$$

### 1.3 Teoría de la elasticidad

En esta sección se describirán leyes fundamentales que aplican a los cuerpos elásticos que describen relaciones entre las deformaciones y los esfuerzos. Como se mencionó en la sección 1.1, la mecánica del medio continuo se particulariza a la elasticidad en el caso de los sólidos sobre los que actúa alguna fuerza [49].

#### 1.3.1 Termodinámica de las deformaciones

Para iniciar el estudio de los cuerpos elásticos desde este punto de vista, hay que señalar que se parte de la afirmación de que el medio continuo es un sistema termodinámico [49]. Considerando una deformación infinitesimal donde el vector de desplazamiento  $u_i$  cambia en una pequeña cantidad  $\delta u_i$ , se determinará el trabajo por unidad de volumen  $\delta R$  realizado por el esfuerzo que lo provoca [27]. Hay que señalar también que no se considera la presencia de ninguna fuerza de cuerpo,  $\int_V (\rho b_i du_i) = 0$  [49].

$$\int F_i \cdot \delta u_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dV = \int \delta R dV = d\mathbf{W} \quad (29)$$

Integrando por partes

$$\int \delta R dV = \oint \sigma_{ik} \delta u_i df_i - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV, \quad (30)$$

donde  $df_i$  son las componentes del vector  $d\mathbf{f}$ , la superficie infinitesimal orientada hacia afuera que encierra el volumen  $dV$ .

La integral cerrada se toma sobre la superficie de un cuerpo infinito que no se deforma en sus límites;  $\sigma_{ik} = 0$  en esta región. Así, la primera

integral es cero. Considerando la simetría del tensor  $\sigma$

$$\begin{aligned}\int \delta R dV &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}&= - \int \sigma_{ik} \delta e_{ik} dV \\ &\implies \delta R = -\sigma_{ik} \delta e_{ik}.\end{aligned}\tag{32}$$

De esta forma queda expresado el trabajo realizado por un esfuerzo en términos del cambio en las deformaciones.

Con una deformación es pequeña, si cuando el esfuerzo deja de ser aplicado el cuerpo regresa a su posición original entonces la deformación se conoce como elástica. En cambio, si al suprimir el esfuerzo hay una deformación remanente y el cuerpo no vuelve a su posición original, la deformación es plástica. En el resto de la subsección se hablará únicamente de deformaciones elásticas.

Una suposición que se hace, con respecto a las deformaciones, es que ocurren tan lentamente que hay un equilibrio térmico durante todo el proceso; las deformaciones son térmicamente reversibles.

De ahora en adelante, se considerarán las cantidades termodinámicas (entropía  $S$ , energía interna  $U$ , ...) relativas al volumen unitario inicial del cuerpo. Así, se podrá cuantificar su cambio vinculado al cambio de volumen que conlleva una deformación.

La termodinámica dicta que

$$dU = TdS - pdV,\tag{33}$$

$$W = \int pdV. \quad (34)$$

En el caso presente,  $dR = dW$ , la ecuación se transforma en la relación termodinámica fundamental para cuerpos deformados

$$dU = TdS - \sigma_{ik}de_{ik}. \quad (35)$$

Bajo presión hidrostática,  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ , por lo que  $\sigma_{ik}de_{ik} = -pde_{ii}$ .

Tomando en cuenta que

$$tr(\underline{e}) = \Delta V, \quad (36)$$

con la convención de suma de Einstein  $de_{ii} = dV$  [27]. Como las variables de interés serán  $T$  y  $e_{ij}$ , el potencial termodinámico adecuado es la energía libre de Helmholtz

$$F = F(e_{ij}, T) = U - TS. \quad (37)$$

La ecuación (33) se transforma de la siguiente manera

$$dF = -SdT + \sigma_{ik}de_{ik}, \quad (38)$$

se observa que por la condición anterior, porque  $\sigma_{ik}$  es una función lineal de  $e_{ik}$  y porque  $F$  es una función homogénea de orden 2 en las variables  $e_{ik}$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right) e_{ij} = 2F. \quad (39)$$

Entonces si  $\sigma_{ij} = C_{ij}{}^{kl}e_{kl}$  se obtiene finalmente que

$$2F = C_{ij}{}^{kl}e_{kl}e_{ij}, \quad (40)$$

lo cual dice que  $F$  es una función de estado. Por lo tanto, el orden de las derivadas de la energía libre de Helmholtz con respecto a  $e_{ij}$  y  $e_{kl}$  es intercambiable

$$\frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 F}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}} \implies C_{ij}{}^{kl} = C_{kl}{}^{ij} \quad (41)$$

[49].

Se define el potencial termodinámico  $\Phi$

$$\Phi = U - TS + pV = U - TS - \sigma_{ik}e_{ik} = F - \sigma_{ik}e_{ik}. \quad (42)$$

Con las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$d\Phi = -SdT - \sigma_{ik}de_{ik}. \quad (43)$$

De esta manera, se pueden hallar las componentes de  $\underline{\sigma}$  derivando  $U$  o  $F$  con respecto a las componentes de  $\underline{e}$ , ya sea con entropía o temperatura constantes:

$$\sigma_{ik} = \left( \frac{\partial U}{\partial e_{ik}} \right)_S = \left( \frac{\partial F}{\partial e_{ik}} \right)_T. \quad (44)$$

También pueden obtenerse las componentes de  $\underline{e}$  derivando  $\Phi$  con respecto a las componentes de  $\underline{\sigma}$

$$e_{ik} = (\partial\Phi/\partial\sigma_{ik})_T \quad (45)$$

[27].

### 1.3.2 Ley de Hooke

Para utilizar la termodinámica en pos de encontrar esta ley, crucial para el tratamiento de los cuerpos elásticos, es necesario tener presente que la energía libre de Helmholtz  $F$  es función de  $e_{ij}$  y que de ahora en adelante se hará la suposición de isotropía.

Para tratar el estado deformado de los cuerpos, se debe definir un estado inicial sin deformar. En este estado,  $\underline{\sigma} = 0$  y  $\underline{e} = 0$ . Dada la relación

entre  $\underline{\sigma}$  y  $F(e_{ik})$ , en los cuerpos sin deformar  $F$  es la constante  $F_0$ . Por lo tanto, en la expansión de  $F$  como serie de potencias todos los términos que acompañen a las potencias de  $e_{ij}$  deben ser escalares. El término lineal de la serie no aparece dadas las condiciones en la frontera que acaban de establecerse. El término de segundo orden (además del escalar) se puede descomponer en dos partes: la asociada con los términos de la diagonal de  $\underline{e}$  y la asociada con los términos fuera de ella. La expresión general para  $F$  de un cuerpo isótropo es

$$F = F_0 + \frac{1}{2}\lambda e_{ii}^2 + \mu e_{ij}^2, \quad (46)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  se conocen como parámetros de Lamé [27]. La primera sin una representación física definida y la segunda interpretada como (y llamada) módulo de rigidez o resistencia al esfuerzo cortante [9]. En diversa literatura, se encuentra en vez de  $\mu$  la constante de cizalla  $G$  [14].

Utilizando la ecuación (28), se reescribe (46) como

$$F = \mu(e_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}e_{ll})^2 + \frac{1}{2}K(e_{ll})^2. \quad (47)$$

En esta ecuación,  $K$  es el módulo de presión hidrostática (o simplemente de presión). Se relaciona con las constantes de Lamé como

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (48)$$

Dado que la energía asociada a la ecuación (47) debe tener un mínimo cuando  $\underline{e} = 0$ , una condición necesaria y suficiente para que  $F$  en (47) sea positiva es que  $K$  y  $\mu$  sean positivas. Esto porque lo contenido en el paréntesis tendrá siempre resultados positivos.

Derivando (47) y sustituyendo en (44),

$$\sigma_{ik} = Ke_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(e_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}e_{ll}) = \lambda e_{ll}\delta_{ik} + 2\mu e_{ij} \quad (49)$$

La ecuación anterior relaciona  $\underline{\sigma}$  con  $\underline{e}$  de forma particularmente útil, pues según si  $i = j$  o no,  $\sigma_{ik}$  y  $e_{ik}$  se relacionan por medio de  $K$  o de  $\mu$ .

La ecuación complementaria, de  $e_{ik}$  en términos de  $\sigma_{ik}$ , es

$$e_{ik} = \frac{\sigma_{ll}\delta_{ik}}{9K} + \frac{\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}}{2\mu}, \quad (50)$$

que cuando se trata de deformaciones elásticas se conoce como otra versión de la Ley de Hooke [14], y formalmente aplica solamente para deformaciones infinitesimales [27]. La constante 2 en la ecuación proviene del análisis que llevó a la ecuación (25). Otra manera diferente pero muy útil de escribir (50) es

$$e_{ij} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{ij}] \quad (51)$$

[9].

Como parte de estas ecuaciones aparecen las constantes  $E$  y  $\nu$ , módulo de Young (Thomas Young, 1807) y relación de Poisson respectivamente [14]. El módulo de Young es el cual relaciona el esfuerzo normal con la deformación normal y la relación de Poisson compara las deformaciones en dos direcciones que son perpendiculares entre sí.  $\nu$  se puede calcular de manera simple como  $\nu = e_{ii}/e_{jj}, i \neq j$ . Ambas constantes se relacionan con

los parámetros de Lamé de la forma

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\
 \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\
 \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)} \\
 \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

[9].

Otra forma de hallar esta ley es partiendo de la suposición de una relación lineal entre  $\underline{\sigma}$  y  $\underline{e}$

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} e_{kl}. \tag{53}$$

En esta ecuación,  $C_{ij}^{kl}$  es un tensor de cuarto orden compuesto por constantes llamadas constantes elásticas [9]. Por definición, este tensor tiene  $3^4 = 81$  constantes que se pueden acomodar en una matriz  $9 \times 9$  relacionando tensiones y deformaciones. Para reducir el tensor a sus componentes independientes, se toma en cuenta, primero, que  $C_{ij}^{kl} = C_{kl}^{ij}$ , como dice la ecuación (41). De esta forma,  $81 - 9 = 72$  son las constantes fuera de la diagonal, de las cuales solamente 36 son independientes. Quedan 45 elementos diferentes en la matriz. Segundo, como  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  y que  $e_{kl} = e_{lk}$ , de los 45 elementos se eliminan 24.

Así, el número máximo de constantes independientes de un cuerpo elástico es 21. Terceramente se considera isotropía, que se refiere formalmente al caso en que el constantes elásticas son iguales sin importar el sistema de referencia que se considere. Tras el correspondiente proceso algebraico, quedan solamente tres constantes independientes. Si se considera una

última rotación en un ángulo arbitrario, el sistema se reduce a dos únicas constantes libres que toman el nombre de  $\lambda$  y  $\mu$  y se ven en la ecuación (49) [49], [14]. Fueron Navier y Cauchy quienes propusieron la siguiente ecuación para el tensor de constantes elásticas para sólidos isótropos [9].

$$C_{ij}^{kl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \quad (54)$$

En el caso de presión hidrostática, donde  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$  y  $\sigma_{ij} = 0, i \neq j$ ,

$$e_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{3K}. \quad (55)$$

Una representación más simple de  $F$  se obtiene de (44), haciendo uso del teorema de Euler;  $e_{ik} \partial F / \partial e_{ik} = 2F$ , y sabiendo que  $\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} e_{kl}$

$$F = \sigma_{ik} e_{ik}. \quad (56)$$

Sabiendo que  $e_{ik} = e_{ik}(\sigma_{ik})$  y usando el teorema de Euler de nuevo, se obtiene una ecuación que es válida solamente si la ley de Hooke aplica

$$e_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} \quad (57)$$

[27].

Retomando la discusión sobre  $\nu$ , su valor se encuentra siempre entre un medio para materiales incompresibles, y cero. Poisson halló que para el caso que si  $\nu = 1/4$  entonces.

$$\lambda = \mu. \quad (58)$$

En el caso que  $\nu = 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{3}E \\ \frac{1}{K} &= 0, \end{aligned} \quad (59)$$

que con esfuerzos finitos da  $e_{ii} = 0$  [14].

### 1.3.3 Ecuación de Navier

En el tratamiento del problema presente se estudia la Tierra, modelada como un sólido que obedece la Ley de Hooke. Su mecánica se deriva de lo que se ha visto ya en este escrito pero es útil particularizar y agregar algunos otros conceptos que llevan a resultados importantes.

En un medio sólido homogéneo, infinito, isótropo y perfectamente elástico [9], se considera un desplazamiento de un punto en función de sus coordenadas iniciales  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{t})$  y tomando  $e_{ij}$  de (20).

Se parte de la ecuación Newtoniana

$$\sum F_i = \frac{\partial}{\partial t}(m \cdot v_i) \quad (60)$$

donde  $m$  y  $v$  son la masa y la velocidad del cuerpo. Reescribiendo la masa como  $m = \rho \cdot dV$  y tomando todas las fuerzas que actúan en el cuerpo entonces

$$\oint_s t^{\hat{n}} \cdot dS + \int_V X_i \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V v_i \cdot \rho \cdot dV \quad (61)$$

donde  $X_i$  es una fuerza que se aplica en todo el cuerpo por unidad de volumen.

$$X_i = \rho_0 b_i \quad (62)$$

Introduciendo el tensor de esfuerzos y aplicando el teorema de Green-Ostrogradsky

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{x_j} + X_i \right) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (v_i \rho) dV. \quad (63)$$

Por tanto, dado que  $\rho$  es constante y la velocidad es la segunda derivada del

desplazamiento con respecto al tiempo,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{x_j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (64)$$

Por ahora, se continuará el análisis suponiendo que sólo existen componentes de  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{e}$  y  $\mathbf{u}$  en una dirección paralela al eje  $\hat{e}_x$ . Si se expresa la ecuación anterior en tres dimensiones

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{z} + X_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (65)$$

Considerando (24) y (49),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + X_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (66)$$

que reacomodando términos queda como

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + X_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (67)$$

Se puede hacer el mismo procedimiento para direcciones paralelas a  $\hat{e}_y$  y  $\hat{e}_z$ , con  $\nabla$  en coordenadas cartesianas.

La ley de conservación del momento dice que

$$\rho \alpha_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i. \quad (68)$$

En este caso,  $\alpha_i$  representa la aceleración en la dirección  $i$ .

Para conocer el comportamiento de un cuerpo elástico finito de manera exacta hay que resolver un problema no lineal de alta complejidad matemática. La alternativa considerada es suponer desplazamientos y velocidades infinitesimales, en donde se pueden omitir los términos de segundo

orden. Se reduce  $e_{ij}$  al tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy, y la velocidad y la aceleración a

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (69)$$

Sustituyendo (50) en (68),

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (70)$$

[9]. En términos de  $\nu$  y  $\mu$ ,

$$\mu \left( \nabla^2 u_i + \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla(\nabla \cdot u) \right) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (71)$$

Esta es la forma más común de la ecuación de campo que describe la teoría de la elasticidad linealizada llamada Ecuación de Navier.

Para resolver esta ecuación, regularmente se utiliza alguna de las siguientes tres condiciones en la frontera: en la que se especifican los desplazamientos, en la que se especifican las tracciones superficiales y en la que en una parte del cuerpo se especifican las primeras y en otra las segundas [14].

## 1.4 Propagación de ondas

### 1.4.1 La ecuación de onda y su solución

La ecuación diferencial que describe el fenómeno de una onda en una dimensión es

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (72)$$

La función  $\Psi$  es la función de onda, que representa la perturbación en el tiempo y en el espacio, y  $v$  es la velocidad de propagación de la onda, cuya demostración se expone en unos cuantos párrafos.

Una solución para esta ecuación está dada por cualquier función diferenciable dos veces del tipo

$$\Psi(x, t) = f(x - vt). \quad (73)$$

El perfil de esta función se obtiene haciendo la variable  $t$  constante. El resultado es la imagen de la función en el dominio espacial

$$\Psi(x, 0) = f(x). \quad (74)$$

Así, la función  $f(x, t)$  describe una onda que se propaga en la dirección  $x$  positiva, mientras que otra solución, del tipo  $g(x + vt)$  es una onda que se propaga en la dirección  $x$  negativa. Otra solución podría ser un polinomio de variable  $(x \pm vt)$ , por ejemplo. Consideraremos como la solución más general la suma de las soluciones

$$\Psi = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (75)$$

Si la onda tiene un perfil armónico, se puede describir con las funciones particulares  $\Psi(x, t) = A \operatorname{sen} k(x \pm vt)$  o  $\Psi(x, t) = A e^{i\phi}$ , donde  $\phi$  es la

fase de la onda, definida como

$$\phi = x - vt, \quad (76)$$

que en este caso particular (onda periódica) es  $\phi = kx \pm \omega t + \epsilon$ . El parámetro  $k$  es el número de onda

$$k = \frac{2\pi}{l} = \frac{\omega}{v} \quad (77)$$

La longitud de onda  $l$  (normalmente se denota por  $\lambda$ ) es la distancia espacial en que una onda de este tipo completa un ciclo y  $\omega$  es la frecuencia angular

Son de interés las ondas periódicas pues gracias al método de Fourier, se puede aproximar cualquier onda como una suma de funciones armónicas [19]. Además, porque con ellas se prueba que  $v$  es la velocidad de propagación de la onda.

Considerando una onda del tipo que se ve en la figura siguiente

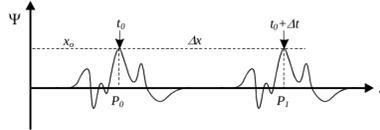


Figura 4: Función que representa una onda periódica [9].

Si la onda tiene la misma amplitud en  $t_0$  y  $t_0 + \Delta t$ , que corresponde a  $x_0$  y  $x_0 + \Delta x$ , entonces

$$\begin{aligned} f(x_0 - vt_0) &= f(x_0 + \Delta x - v(t_0 + \Delta t)) \\ x_0 - vt_0 &= x_0 + \Delta x - v(t_0 + \Delta t) \\ \therefore \Delta x - v\Delta t &= 0. \\ v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \end{aligned} \quad (78)$$

Por lo que  $v$  resulta ser la velocidad de propagación de la onda.

Si la función general de onda, de manera explícita en la ecuación (75), estuviese en un espacio de tres dimensiones entonces sería claro que no depende en ningún momento de su posición en el plano perpendicular a  $x$ ; la función es independiente de  $y$  y de  $z$ . Suponiendo que la fuente de la onda es infinitamente lejana, se llama frente de onda a cada plano perpendicular a  $\hat{e}_x$  en este caso particular. La onda viajará perpendicular al frente de onda siempre y cuando el medio sea isótropo, cuya dirección está señalada por el vector conocido como trayectoria de la onda [9].

Ahora, generalizando al caso tridimensional, la ecuación (72) en coordenadas cartesianas se convierte en

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (79)$$

[19]. La ecuación tiene como solución general

$$\Psi = f(xl + ym + zn - vt) + g(xl + ym + zn + vt), \quad (80)$$

donde  $l$ ,  $m$  y  $n$  son los cosenos directores que apuntan hacia  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  y  $\hat{e}_z$  que además cumplen con la condición que  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Suponiendo la aproximación armónica que se mencionó anteriormente, la solución se reescribe como

$$\Psi = Ae^{i\phi}, \quad (81)$$

con  $\phi = xl + ym + zn - vt$  [9].

### 1.4.2 Propagación de ondas en un medio

En esta sección se estudiarán las ondas que viajan a través de cuerpos elásticos. Dado que los cuerpos elásticos son una particularización de los medio continuos, conviene señalar aspectos importantes de la mecánica que rige la propagación de ondas en su seno. En un sistema discreto que tiene un número finito de grados de libertad, cuando es perturbado alrededor de su posición de equilibrio oscilará en alguna de sus frecuencias propias, cuyo número es igual, en general, a su número de grados de libertad. En el caso de medios continuos, el número de grados de libertad es infinito, y por lo tanto también el número de frecuencias propias. Por eso, el medio se describe con ecuaciones en derivadas parciales en vez de ecuaciones diferenciales ordinarias [49].

Cualquier onda de este tipo puede separarse en dos componentes: las ondas longitudinales (u ondas  $P$ ) y transversales (u ondas  $S$ ) [9]. Cada una de ellas se puede estudiar conforme al campo vectorial de desplazamiento  $\mathbf{u}$  que provoca, que es una solución diferente a la ecuación de Navier. Durante todo este desarrollo, se considera la propagación de una onda en la dirección  $\hat{e}_x$  que pasa por un cuerpo en el que no hay fuerzas de cuerpo presentes [14]. Esta aproximación se considera en la sismología para el tratamiento de frecuencias ondulatorias usuales, y es importante no eliminarlo en caso de análisis de bajas frecuencias por la presencia de la gravedad. Las soluciones que se tratan aquí son posibles porque los parámetros de Lamé se consideran constantes en cierto espacio de material. De hecho, para considerar un cambio en las características del medio modeladas por los parámetros de Lamé se propone un apilado de capas unas sobre otras. Es por eso que más

adelante se estudia la interacción de las ondas en las interfases. Además, es importante notar la hipótesis de que la velocidad es constante durante la propagación de la onda en esa sección del medio [43].

Las ondas longitudinales o de dilatación son las que son efecto de un esfuerzo normal ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\delta_{ij}$ ). Esta onda viaja paralela a la dirección de propagación de la onda y su característica principal es que ocasiona en el cuerpo un cambio de volumen por unidad de masa, modificando su densidad, pero en ningún caso puede hacerlo girar. Por tanto, se dice que las ondas  $P$  son irrotacionales;  $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  [9]. La solución  $\mathbf{u}$  a la ec. de Navier para una onda en este caso es de la forma

$$\mathbf{u} = u_x = A \sin(k(x \pm c_L t)) \quad (82)$$

donde el valor de la velocidad de fase  $c_L$  es

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho}}. \quad (83)$$

Si se tratase de un tren continuo de ondas iguales, todas ellas estarían en un mismo plano que no se modifica en  $y$  ni  $z$ , por lo que se le podría llamar también un tren de onda planas [14].

Por otro lado, las ondas transversales son producto de un esfuerzo cortante ( $\sigma_{ij}, i \neq j$ ). En este caso, el desplazamiento de las partículas está contenido en el plano que define el frente de onda en cuestión, por lo que (recordando el tratamiento infinitesimal de los desplazamientos) no hay modificaciones en la distancia entre partículas, es decir, no habrá un cambio de volumen en el cuerpo por el que pasa una onda  $S$ . Así, la divergencia de las ondas  $S$  es cero;  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Las ondas  $S$  o de distorsión se pueden considerar como dos ondas distintas: las  $SH$  que se propagan

en la dirección horizontal (este-oeste, por ejemplo), y las  $SV$  que son perpendiculares a las  $SH$ . Ambas ondas se encuentran en el frente de onda, y es importante hacer esta separación para el análisis de fases sísmicas que vendrá más adelante [9].

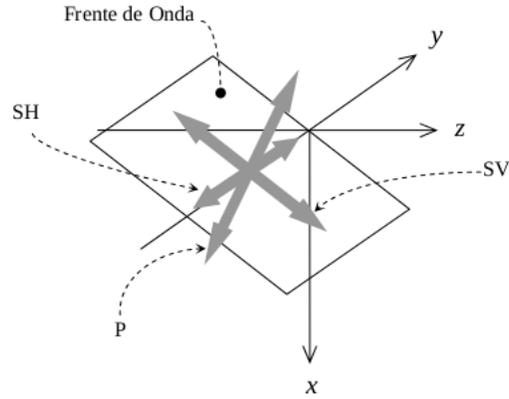


Figura 5: Dirección de desplazamiento de las partículas del medio al paso de los tres diferentes tipos de ondas [9].

La solución  $\mathbf{u}$  en este caso se divide entonces en dos partes, ya sea que la única componente de  $\mathbf{u}$  se encuentre en la dirección  $\hat{e}_y$  (para  $SH$ ) o en la dirección  $\hat{e}_z$  (para  $SV$ )

$$\mathbf{u} = u_y = A \sin(k(x \pm c_T t)) \quad (84)$$

$$\mathbf{u} = u_z = A \sin(k(x \pm c_T t)),$$

que al sustituir valores en (70),

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (85)$$

[14].

La relación entre la velocidad de onda transversal  $c_T$  y longitudinal  $c_L$  depende únicamente del módulo de Poisson, aunque se puede escribir también en términos de las constantes de Lamé

$$\frac{c_T}{c_L} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}, \quad c_L > c_T \quad (86)$$

[49]. Si  $\nu = .25$  entonces  $c_L = \sqrt{3} \cdot c_T$  [14]. La diferencia entre las velocidades es muy útil en este trabajo pues si una onda compleja se produce en un punto del medio, en otro punto del medio se registran a diferentes instantes los arribos de las ondas  $S$  y  $P$  [29].

El teorema de Helmholtz establece que un campo vectorial puede escribirse como la combinación lineal de un potencial escalar y uno vectorial como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\phi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t). \quad (87)$$

Este teorema se verifica si pasa una onda compleja, una onda compuesta por la suma de una onda  $P$  y una  $S$  a través del medio, dado que habrá una parte donde  $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$  gracias a la presencia de ondas  $P$ , y otra parte donde  $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$  por las ondas  $S$ . El resultado es un campo vectorial  $\mathbf{u}$  complejo [9].

Otra manera de ver el problema es verificar que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$ . Sustituyendo esto en la ecuación de Navier, se obtienen dos ecuaciones de onda análogas del tipo (79) [29], para la que las soluciones (82) y (84) son de esperar [43].

Tomando en cuenta la descomposición de ondas  $S$  en  $SH$  y  $SV$  propuesto en la parte superior, si se supone una onda que viaja en la di-

rección  $\hat{e}_x$ ,

$$\mathbf{Y}(y, z, t) = \mathbf{\Psi}(y, z, t) + \nabla \times \gamma(y, z, t), \quad (88)$$

donde  $\mathbf{\Psi}$  es la parte  $SV$  y  $\nabla \times \gamma$  es la parte  $SH$ , y donde tanto  $\mathbf{\Psi}$  como  $\gamma$  no tienen más que la componente en dirección  $\hat{e}_y$  diferente a cero. Agregando que  $\phi$  corresponde a la propagación de ondas  $P$ ,

$$\mathbf{u}(y, z, t) = \nabla\phi(y, z, t) + \nabla \times \mathbf{\Psi}(y, z, t) + \nabla \times \nabla \times \gamma(y, z, t) \quad (89)$$

[9].

### 1.4.3 Principio de Fermat

En este apartado se hará una revisión de la propagación de las ondas en un medio estratificado, elástico y semi-infinito para conocer las interacciones entre la onda y la materia.

El principio de Fermat estipula que una onda viajará de un punto a otro utilizando el camino en que el tiempo de propagación sea el mínimo. Bajo un punto de vista matemático, esto quiere decir que si se considera  $t$  como el tiempo de propagación entre dos puntos  $A$  y  $C$ , cuando  $t = T$  se encontrará un mínimo

$$\frac{\partial T}{\partial p} = 0 \quad (90)$$

[9], donde  $p$  es el parámetro de rayo, que define la trayectoria de  $A$  a  $C$  y es una constante a través de los medios isótropos. En términos coloquiales, define la lentitud horizontal aparente de la onda a través de cada medio [43]. En la figura siguiente se pueden ver los distintos caminos que puede tomar un rayo en dos diferentes medios para viajar de  $A$  a  $C$ , en el cual en una parte la onda se propaga con una velocidad  $v_1$  y en el otro con una velocidad

$v_2$ . Como la onda pasa por el punto  $B$  situado en el plano cortante  $xy$ , la distancia que recorre la onda desde  $A$  hasta  $B$  es  $\mathbf{x}'$ , y la distancia desde  $B$  hasta  $C$  es  $\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'$  [9]. Es importante notar la suposición de una interfase plana y de velocidades constantes de propogación en cada medio [43].

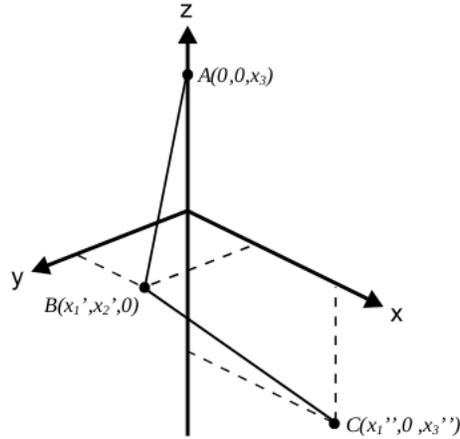


Figura 6: Trayectoria que sigue un rayo para ir desde  $A$  hasta  $C$ , pasando por  $B$  [9].

La forma matemática de obtener  $T$  a partir de la figura anterior, es

$$T = \frac{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}{v_2}. \quad (91)$$

Derivando  $T$  en función de  $x_2'$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial x_2'} = \frac{x_2'}{v_1 \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} + \frac{x_2'}{v_2 \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} = 0 \quad (92)$$

$$\iff x_2' = 0. \quad (93)$$

Partiendo de lo que ocurre con la Ley de Fermat, si uno se sitúa

en el plano  $xz$  entonces  $T$  tendrá la forma

$$T = \frac{\sqrt{x_1'^2 + x_3'^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + x_3'^2}}{v_2}. \quad (94)$$

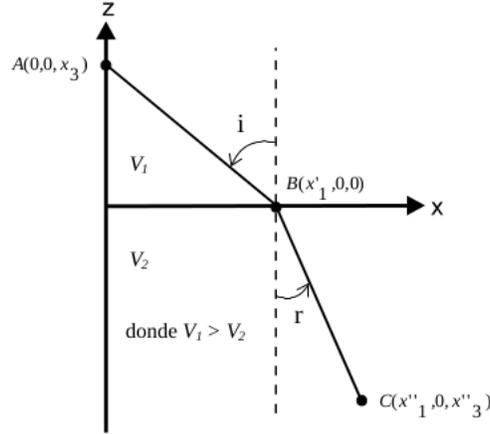


Figura 7: Caso tridimensional de la figura 6 [9].

Si se deriva en función de  $x_1'$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = \frac{x_1'}{v_1} \frac{1}{\sqrt{x_1'^2 + x_3'^2}} + \frac{x_1'' - x_1'}{v_2} \frac{1}{\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + x_3'^2}} = 0 \quad (95)$$

Se introducen los ángulos  $r$  e  $i$  a la figura

$$\frac{x_1'}{\sqrt{x_1'^2 + x_3'^2}} = \text{sen}(i) \quad \frac{x_1'' - x_1'}{\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + x_3'^2}} = \text{sen}(r). \quad (96)$$

Sustituyendo en (95) se obtiene la Ley de Snell

$$\frac{\text{sen}(i)}{v_1} = \frac{\text{sen}(r)}{v_2}. \quad (97)$$

De forma muy general, se puede resumir esta ley en

$$\frac{\text{sen}(\gamma)}{v} = p, \quad (98)$$

en la cual  $\gamma$  representa el ángulo que forma una onda al cambiar de interfase y  $p$  representa el parámetro de rayo, constante para la propagación de ondas de una misma fuente a través de diferentes medios homogéneos.

Si se toma en cuenta en la figura anterior el ángulo que forma la onda incidente con la interfase, el ángulo de la onda refractada será mayor al que forma la onda incidente con la onda reflejada. El ángulo de la onda reflejada es el mismo que el de la onda incidente [9].

#### 1.4.4 Incidencia SH en una interfase elástica

En esta parte se va a tratar lo que sucede con la amplitud de las ondas  $S$  ( $SH$  y  $SV$ ) cuando pasan de un medio elástico a otro, que involucra el análisis de las ondas incidente, reflejada y refractada [9]. La solución propuesta será en forma de ondas planas.

Se propone una onda plana que se propaga en la dirección de  $\hat{e}_y$ , y se comienza el análisis por las ondas  $SH$ . En una dirección contenida en el plano  $xz$ , el teorema de Helmholtz se resuelve con solamente una función escalar. Es por eso que se llama a las ondas  $SH$  ondas escalares. Por lo tanto, el campo  $\mathbf{u}$  solamente contiene una componente

$$u = (0, \nu, 0), \nu = \nu(x, z, t). \quad (99)$$

.

Las condiciones en la frontera requieren que tanto  $\nu$  como  $\underline{\sigma}$  sean las mismas de ambos lados de la superficie en la que se pone el cero del eje

$x$ .

$$\nu_1 = \nu_2, \quad \sigma_{xy_1} = \sigma_{xy_2}. \quad (100)$$

Como solución se propone la forma de  $\nu_1$

$$\nu_1 = A_1 e^{i\omega \left( t - \frac{z \sin(\gamma_1) - x \cos(\gamma_1)}{\beta_1} \right)} + A_2 e^{i\omega \left( t - \frac{z \sin(\gamma_1) + x \cos(\gamma_1)}{\beta_1} \right)}. \quad (101)$$

[9]. Esta solución se conoce como monocromática y de estado estacionario en el plano. [43]. La primera parte de la ecuación se refiere a la onda incidente y la segunda a la onda reflejada, con amplitudes  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente.

Para el medio dos se propone la ecuación de onda refractada

$$\nu_2 = B_1 e^{i\omega \left( t - \frac{z \sin(\gamma_2) - x \cos(\gamma_2)}{\beta_2} \right)}. \quad (102)$$

Por las condiciones en la frontera, en  $x = 0$ , y conociendo la ley de Snell, los argumentos de las exponenciales en (101) y (102) son los mismos. Despejando la exponencial se llega a la relación entre las amplitudes

$$(A_1 + A_2) = B_1. \quad (103)$$

En busca de incorporar en el tratamiento de estas ondas la segunda condición en la frontera, hay que recordar la relación entre  $\underline{\sigma}$  y  $\underline{e}$  dada por la ley de Hooke para medio isótropos con los parámetros de Lamé (49), que se particulariza a  $\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}$  pues las ondas *SH* presenta únicamente esfuerzos cortantes, particularmente en la dirección paralela a  $\hat{e}_y$ . El tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy  $e_{ij} = (1/2)(\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$  en este ejemplo es

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial x}, \quad (104)$$

por lo que el único esfuerzo presente será

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial \nu}{\partial x}. \quad (105)$$

Aplicando (105) a (101) y (102) y con la condición en la frontera en  $x = 0$ ,

$$(A_1 - A_2) \frac{i\omega\mu_1 \cos(\gamma_1)}{\beta_1} e^{i\omega\left(t - \frac{z \sin(\gamma_1)}{\beta_1}\right)} = B_1 \frac{i\omega\mu_2 \cos(\gamma_2)}{\beta_2} e^{i\omega\left(t - \frac{z \sin(\gamma_2)}{\beta_2}\right)}. \quad (106)$$

Eliminando los términos comunes

$$A_1 - A_2 = K B_1, \quad K = \frac{\mu_1 \beta_1 \cos(\gamma_1)}{\mu_2 \beta_2 \cos(\gamma_2)}. \quad (107)$$

Suponiendo que se conoce la amplitud de la onda incidente, y resolviendo el sistema de ecuaciones de (103) y (107)

$$\begin{aligned} B_1 &= T A_1, & T &= \text{coef. de transmisión} = \frac{2}{K + 1} \\ A_2 &= R A_1, & R &= \text{coef. de reflexión} = \frac{1 - K}{K + 1}. \end{aligned} \quad (108)$$

Es necesaria la presencia de la onda reflejada; no hay una transmisión del 100% de la onda al medio contiguo. Para demostrarlo, se supone una onda  $SH$  que incide en una superficie libre con un esfuerzo asociado

$$\sigma_{xy} = A_i \frac{i\omega\mu \cos(\gamma_i)}{\beta} e^{i\omega\left(t - \frac{z \sin(\gamma_i)}{\beta}\right)} = 0 \quad \text{en } x = 0. \quad (109)$$

La condición que se utiliza es que el esfuerzo sobre la misma es nulo. Por lo tanto, debe haber una onda reflejada que ejerza el mismo esfuerzo sobre la superficie pero en sentido opuesto

$$\sigma_{xy} = A_i \frac{i\omega\mu \cos(\gamma_i)}{\beta} e^{i\omega\left(t - \frac{z \sin(\gamma_i)}{\beta}\right)} - A_r \frac{i\omega\mu \cos(\gamma_r)}{\beta} e^{i\omega\left(t - \frac{z \sin(\gamma_r)}{\beta}\right)} = 0, \quad (110)$$

de donde

$$\nu_r = A_r \frac{i\omega\mu \cos(\gamma_r)}{\beta} e^{i\omega\left(t - \frac{z \sin(\gamma_r) + x \cos(\gamma_r)}{\beta}\right)}. \quad (111)$$

### 1.4.5 Incidencia P y SV en una interfase elástica

La comprensión de esta parte tiene mucho peso en el presente trabajo porque para construir funciones de receptor se considera la transformación de ondas incidentes  $P$  a ondas reflejadas y refractadas tanto  $SV$  como  $P$ . En total surgen cuatro ondas tras la llegada de una sola las interfases, que serán las diferentes capas terrestres. Aunue en este trabajo se utiliza la onda  $P$  incidente, en diversos otros se utiliza la onda  $SV$ , con la aparición también de cuatro ondas.

La diferencia entre esta subsección y la anterior es que los potenciales de desplazamiento producidos por estas ondas son perpendiculares y vectoriales, por lo que se conocen como ondas de cuerpo, y que ambos están relacionados entre sí. La situación se vuelve más complicada porque ahora hay esfuerzo normales y cortantes como condiciones en la frontera, en la interfase.

El campo de desplazamiento en ambos medios es

$$\underline{u} = (u, 0, w), \quad u = u(x, z, t), \quad w = w(x, z, t) \quad (112)$$

En  $x = 0$  se asume que para los medios 1 y 2

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_2, \quad \sigma_{xx_1} = \sigma_{xx_2}, \quad \sigma_{xz_1} = \sigma_{xz_2} \quad (113)$$

Se obtienen los campos en ambos medios a partir de los potenciales  $\phi$  y  $\Psi$  de la ecuación (89). Se proponen como solución, análogo a lo que se hace en el caso de ondas  $SH$ ,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A_1 e^{i\omega \left( t - \frac{z \sin(\gamma_p) - x \cos(\gamma_p)}{\alpha_1} \right)} + A_2 e^{i\omega \left( t - \frac{z \sin(\gamma_p) + x \cos(\gamma_p)}{\alpha_1} \right)} \\ \Psi_1 &= A_3 e^{i\omega \left( t - \frac{z \sin(\gamma_s) + x \cos(\gamma_s)}{\beta_1} \right)}, \quad \underline{\Psi}_1 = \Psi_{1y} \end{aligned} \quad (114)$$

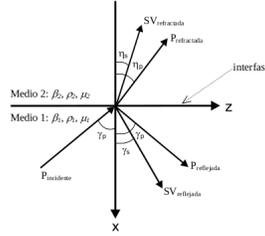


Figura 8: Ondas generadas en una interfase tras una onda  $P$  incidente [9].

El gradiente y el rotacional (cartesianos) de estas funciones, dado que son independientes de  $y$ , llevan a un potencial de la forma

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_1 = i\omega e^{i\omega t} & \left[ \left( \frac{A_1 \cos(\gamma_p)}{\alpha_1} e^{-i\omega \frac{z \sin(\gamma_p) - x \cos(\gamma_p)}{\alpha_1}} - \frac{A_2 \cos(\gamma_p)}{\alpha_1} e^{-i\omega \frac{z \sin(\gamma_p) + x \cos(\gamma_p)}{\alpha_1}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{A_3 \sin(\gamma_s)}{\beta_1} e^{-i\omega \frac{z \sin(\gamma_s) + x \cos(\gamma_s)}{\beta_1}} \right) \hat{e}_x \right. \\
 & \left. - \left( \frac{A_1 \sin(\gamma_p)}{\alpha_1} e^{-i\omega \frac{z \sin(\gamma_p) - x \cos(\gamma_p)}{\alpha_1}} - \frac{A_2 \sin(\gamma_p)}{\alpha_1} e^{-i\omega \frac{z \sin(\gamma_p) + x \cos(\gamma_p)}{\alpha_1}} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{A_3 \cos(\gamma_s)}{\beta_1} e^{-i\omega \frac{z \sin(\gamma_s) + x \cos(\gamma_s)}{\beta_1}} \right) \hat{e}_z \right]
 \end{aligned} \tag{115}$$

En el segundo medio

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= B_2 e^{i\omega \left( t - \frac{z \sin(\eta_p) - x \cos(\eta_p)}{\alpha_2} \right)} \\
 \underline{\Psi}_2 &= B_1 e^{i\omega \left( t - \frac{z \sin(\eta_s) - x \cos(\eta_s)}{\beta_2} \right)}, \quad \underline{\Psi}_2 = \Psi_{2y}.
 \end{aligned} \tag{116}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_2 = i\omega e^{i\omega t} & \left[ \left( \frac{B_1 \sin(\eta_p)}{\beta_2} e^{-i\omega \frac{z \sin(\eta_s) - x \cos(\eta_s)}{\beta_2}} + \frac{B_2 \cos(\eta_p)}{\alpha_2} e^{-i\omega \frac{z \sin(\eta_p) - x \cos(\eta_p)}{\alpha_2}} \right) \hat{e}_x \right. \\
 & \left. + \left( \frac{B_1 \cos(\eta_s)}{\beta_2} e^{-i\omega \frac{z \sin(\eta_s) - x \cos(\eta_s)}{\beta_2}} - \frac{B_2 \sin(\eta_p)}{\alpha_2} e^{-i\omega \frac{z \sin(\eta_p) - x \cos(\eta_p)}{\alpha_2}} \right) \hat{e}_z \right].
 \end{aligned} \tag{117}$$

Para resolver lo que resta del problema hay que introducir las condiciones en la frontera de (113), utilizar la Ley de Hooke y el tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy. De esta manera, se encontrará la relación entre los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$  [9].

## 2 Fundamentos matemáticos para el estudio de la propagación de ondas sísmicas

### 2.1 Tratamiento de señales

La sismología utiliza varias técnicas para entender las señales recabadas de posición y tiempo de las ondas sísmicas a fin de hacer inferencias sobre la estructura terrestre. Algunas de éstas están relacionadas específicamente con la sismología y otras son análisis de funciones en general, que puede ser aplicado a muchos campos del conocimiento de la misma manera [46]. Dado que en este trabajo hay un fin muy específico en su revisión, los ejemplos y las aplicaciones dejarán fuera partes de los temas que no son de utilidad ahora [9].

#### 2.1.1 Transformada de Fourier

Las transformadas son entidades matemáticas que se utilizan para hacer cambios en las variables y facilitar la resolución de problemas. Es por eso que en particular la transformada de Fourier se utiliza en diferentes áreas de la ciencia. [9] En sismología, la técnica de la transformada de Fourier se utiliza para describir el efecto del paso de las ondas a través de la Tierra así como el efecto del sismómetro. Eso es justamente lo que trata la transformada de Fourier, que establece que cualquier función puede ser modelada con una suma de senos y cosenos de diferente frecuencia. Así, la comprensión del fenómeno sísmico se hace para una sola onda y se generaliza para las demás.

La serie de Fourier representa una función periódica pero arbitraria

del tiempo  $f(t)$  como una suma de senos y de cosenos. Está definida en el intervalo  $-T/2 < t < T/2$  pues se aproxima como una función de periodo  $T$  [9].

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right). \quad (118)$$

Como las ondas son funciones tanto de  $x$  como de  $t$ , la serie puede extenderse tanto en términos de una como de la otra. La característica principal de los diferentes términos presentes en la suma es que tienen una frecuencia angular  $\omega_n = (2n\pi)/T$  distinta cada vez [46]. Esta frecuencia angular se puede también ver como el producto de la frecuencia propia de  $x(t)$  por número del índice de la suma.

$$\omega_n = \omega_0 \cdot n \quad (119)$$

[9]. Conforme  $n$  aumenta, la frecuencia de la onda en cuestión es mayor y el periodo es menor, así que si  $n \rightarrow \infty$ , la frecuencia de las ondas de la serie también crece hacia infinito. El número 0 no se considera en el índice de suma porque  $\sin(0) = 0$  y  $\cos(0) = 1$ ;  $b_0 = a_0$ .

El conjunto de senos y de cosenos es un conjunto de funciones ortogonales. Esto quiere decir que la integral de cualquiera dos de ellas en el periodo  $(-T/2, T/2)$  es siempre cero.

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt &= \frac{T}{2} \delta_{mn} (1 - \delta_{m0}), \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt &= \frac{T}{2} \delta_{mn} (1 + \delta_{m0}), \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt &= 0, \quad \forall m, n. \end{aligned} \quad (120)$$

Quiere decir también que la función  $f(t)$  está en un espacio vectorial cuya base son los senos y cosenos de la función. Los términos  $a_n$  y  $b_n$  son los

cuales describen la función  $f(t)$  particular por medio de la amplitud de la función seno o coseno que acompañan.

Para hallar los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se multiplica, en una integral entre  $-T/2$  y  $T/2$ , el coseno del  $n$  de interés por la función  $f(t)$  escrita como la serie (118). Por el principio de ortogonalidad, el término que permanece sobre la suma es el coseno de la serie. La integral del coseno al cuadrado de  $(2n\pi t/T)$  es conocida:  $T/2(1 + \delta_{n0})$ . Así

$$a_n = \frac{2 - \delta_{n0}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \cdot f(t) dt. \quad (121)$$

. El término  $b_n$  se encuentra de manera análoga, y el término  $a_0$  queda de manera muy simple

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \cdot f(t) dt, \\ a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \end{aligned} \quad (122)$$

Es importante mencionar que en caso que  $f(t)$  sea una función par, los términos que acompañan a la parte del seno, que es impar, serán todos cero. Y si  $f(t)$  es impar, los términos con coseno, par, serán cero. Tomando esto en cuenta, se ve que para una función par o impar la serie (118) se reduce en gran medida.

La serie puede simplificarse aún más reescribiendo en términos de  $\omega_n$  y de exponenciales complejas y reagrupando términos.

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\omega_n t} + (a_n + ib_n) e^{-i\omega_n t}. \quad (123)$$

Con las definiciones (121) y (122)

$$\frac{(a_n \pm ib_n)}{2} = \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(\omega_n t) \pm i \sin(\omega_n t)] f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{\pm i\omega_n t} f(t) dt \quad (124)$$

Se definen

$$F_{\pm n} = \frac{(a_n \mp ib_n)}{2}, \quad F_0 = a_0, \quad (125)$$

en donde  $F_n^* = F_{-n}$ . La serie de Fourier queda expresada finalmente de forma compleja

$$f(t) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}, \quad (126)$$

con amplitudes

$$F_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega_n t} dt. \quad (127)$$

Esta función discreta se puede extender a una serie continua haciendo de la suma una integral sobre las frecuencias  $\omega_n$ . Para esto, los límites de integración van hasta el infinito, permitiendo a las frecuencias angulares estar tan cerca que  $\omega_n = \omega$ . Sabiendo que

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \Delta n \implies \Delta n = \frac{T\Delta\omega}{2\pi}, \quad (128)$$

el diferencial  $d\omega = \Delta\omega$ .

La transformada de Fourier se vuelve la integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (129)$$

de coeficientes

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (130)$$

[46].

Conceptualmente, la diferencia entre una serie y una transformada es que la transformada opera sobre las funciones que transforma, en este caso, las  $f(t)$ , que no son necesariamente periódicas. Escribir una función como una serie de Fourier es equivalente a descomponerla efectuando su transformada. Por lo tanto, la función  $F(\omega)$  de la ecuación superior es la transformada de Fourier de la función  $f(t)$ . La notación más común para representar lo anterior es

$$F[y(t)] = Y(\omega) \quad (131)$$

[9].

Aunque el significado físico de las frecuencias angulares negativas sea complicado, lo importante es entender que la integral en  $(-\infty, \infty)$  es una función real de tiempo.

Se enlistan a continuación ciertas propiedades de la transformada que son de especial interés para el análisis sísmico: la transformada de Fourier es lineal, la transformada de una  $f(t)$  real tiene una simetría específica, la transformada de una traslación en el tiempo se relaciona con su fase, la transformada tiene derivadas fáciles de hallar y la energía total de la función de  $f(t)$  y de su transformada es la misma.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & F[af(t) + bg(t)] = aF(\omega) + bG(\omega) \\
\text{b)} \quad & f(t)\epsilon\mathfrak{R} \implies F^*(\omega) = F(-\omega) \\
\text{c)} \quad & F[f(t)] = F(\omega) \implies F[t - a] = e^{i\omega a}F(\omega) \\
\text{d)} \quad & F\left[\frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}}f(t)\right] = (i\omega)^n F(\omega) \\
\text{e)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega
\end{aligned} \tag{132}$$

Dado que las señales no ofrecen la posibilidad de un tiempo continuo, se debe considerar una función ventana que selecciona solamente los datos del tiempo que están disponibles

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t)f(t)e^{i\omega t} dt \tag{133}$$

Haciendo pruebas con diferentes ventanas temporales, y con diferentes filtros de frecuencia, es de notar que las señales se alteran de manera predecible en el espectro análogo. De hecho, las funciones son filtradas habitualmente para trabajar con las frecuencias de mejor resolución. El filtro utilizado depende de las características de la señal que se desee tratar [46], [18].

En la realidad, la transformada de Fourier no se aplica de manera directa pues los datos que se registran y almacenan de forma digital son discretos. Por lo tanto, se ha desarrollado toda una teoría que permite obtener la transformada de series discretas. Uno de los algoritmos que lo hace se llama Fast Fourier Transform [9].

En la implementación computacional de este método hay que tomar en cuenta la conversión de la transformada de Fourier en una serie de  $N$  valores discretos (suficientemente grande) que cubre un periodo  $(0, T)$ . Los

programas usuales asumen que se trata de una serie periódica que se repite antes y después de los límites temporales que uno le indica

$$X_n = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-i\omega_n k\Delta t} = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi nk/N}, \quad (134)$$

en donde  $\Delta t$  es el intervalo de muestreo,  $x_k = x(k\Delta t)$ , Por lo tanto, las frecuencias en la serie son  $0, 1/T, 2/T, \dots$  [18].

Para que la transformación de señales discretas sea verídica se debe tener cuidado en que el número de frecuencias consideradas no sea mayor o menor que el contenido en la señal, y que todas las frecuencias correspondan. El teorema de muestreo dice que para que una  $f(t)$  pueda ser completamente recuperada de los valores de su transformada  $F(\omega)$  debe cumplir con las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 0 \quad \forall |\omega| > 2\pi f_c, \\ \frac{1}{2} \frac{\omega}{2\pi} &\geq f_c, \end{aligned} \quad (135)$$

donde  $f_c$  se llama frecuencia de Nyquist. La última ecuación es de gran importancia porque si no, habrá un traslape al obtener  $f(t)$  conocido como aliasing (véase figura **imagen aliasing**), en el que se pierde información [9].

La transformada inversa de Fourier discreta queda descrita por

$$x_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i2\pi nk/N}. \quad (136)$$

### 2.1.2 Sistemas lineales

Se usa la idea de sistema lineal como un proceso en que ingresa cierta información, se modifica y se obtiene un resultado distinto. Este punto de

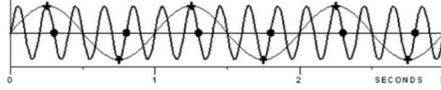


Figura 9: Imagen de 5 Hz digitalizada a una frecuencia de 2 Hz. La digitalización se indica con los puntos en la figura. Se ve que la señal puede interpretarse también tanto como una línea recta como una señal a 1 Hz. Por lo tanto, la máxima frecuencia utilizada en señales de 2 Hz es 1 Hz [18].

vista permite ver los procesos como operadores matemáticos con una señal de entrada y una de salida, de los cuales la transformada de Fourier forma parte. La notación utilizada para un sistema lineal es

$$y = H[x]. \quad (137)$$

Esto significa que el sistema  $H$  opera sobre la señal de entrada  $x$  para producir la respuesta o señal de salida  $y$  [9].

Un sistema es lineal si es homogéneo y aditivo; si cumple el principio de superposición

$$Ax_1(t) + Bx_2(t) \rightarrow Ay_1(t) + By_2(t) \quad (138)$$

, en donde la primera parte corresponde a la entrada y la segunda parte a la salida del sistema. La transformada de Fourier cumple con esta propiedad.

El análisis de funciones de receptor se sirve la transformada de Fourier porque separa los diferentes factores que afectan un sismograma  $s(t)$ . El sismograma es el registro del movimiento terrestre que incluye el efecto del sismómetro, el efecto de la estructura de la Tierra en el camino

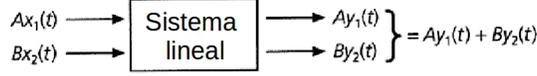


Figura 10: Representación gráfica de un sistema lineal (modificado de [46]).

de propagación de la onda sísmica y finalmente, el efecto de la fuente de la onda.

Primero se introduce la función delta por la necesidad de describir una señal concentrada en un solo punto (o en una sola frecuencia, en el caso de la transformada de Fourier). Es de gran importancia para entender el procedimiento de los sistemas lineales y para utilizarla en los mismos. Dos definiciones apropiadas para  $\delta$  son

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t - t_0}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (139)$$

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt$$

Uno puede también ver la función  $\delta$  como la derivada de la función de Heaviside. Otra forma más de ver la función delta es como una suma de senos de todas las frecuencias, que están en fase en  $t_0$  y fuera de fase en todo  $t \neq t_0$ . Esto será más evidente tras la definición siguiente.

La transformada de Fourier de la función delta se busca utilizando la ecuación (130) con  $f(t) = \delta(t - t_0)$ . Después, evaluando en  $t_0 = 0$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t} dt = 1. \quad (140)$$

La amplitud de la función es

$$|F(\omega)| = |e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t_0}|^{1/2} = 1, \quad \text{en donde } \phi(\omega) = -\omega t_0. \quad (141)$$

Así mismo, se puede escribir la inversa de la transformada como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \delta(t - t_0) \quad (142)$$

Volviendo a los sistemas lineales, éstos se caracterizan según sea su respuesta a un impulso unitario  $\delta$ . En el caso de la transformada de Fourier, la respuesta al impulso unitario es la transformada de Fourier de la función  $\delta$  hallada en la ecuación (140). La respuesta al impulso unitario se puede usar para hallar la respuesta del sistema a cualquier señal de entrada. Por lo tanto, si la función de entrada es una función arbitraria  $x(t)$ , entonces el espectro de su transformada  $X(\omega)$  es el espectro de entrada multiplicado por el espectro del impulso unitario  $F(\omega)$ .

$$Y(\omega) = X(\omega)F(\omega) \quad (143)$$

Por la complejidad de la transformada de Fourier, las amplitudes y las fases de una función de entrada se modifican al pasar por el sistema. Y también la función de entrada se puede encontrar con la transformada de Fourier inversa

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)F(\omega)e^{i\omega t} dt \quad (144)$$

[46].

### 2.1.3 Convolución

Es importante hallar la relación entre la función temporal de entrada, la respuesta al impulso unitario y la función temporal de salida. Expandiendo

en términos de (130)

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau') e^{-i\omega\tau'} d\tau' \right] e^{i\omega t} d\omega, \quad (145)$$

Reagrupando términos,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) f(\tau') \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau'-\tau)} d\omega \right] d\tau d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) f(\tau') \left[ \delta(t - \tau' - \tau) \right] d\tau d\tau' \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau') \delta(t - \tau' - \tau) d\tau' \right] d\tau \end{aligned} \quad (146)$$

Se obtiene finalmente la intragrual conocida como la convolución de las funciones  $x(t)$  y  $f(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) f(t - \tau) d\tau = x(t) * f(t). \quad (147)$$

Por lo tanto, la señal de salida es la convolución de la señal de entrada con la respuesta del impulso unitario [46].

Así como existe una equivalente discreta para la transformada de Fourier, la deconvolución discreta está definida en términos de una suma cuya expresión matemática es la siguiente:

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{N-1} x(iT) h[(k-i)T] \quad (148)$$

en donde  $x(iT)$  y  $h(kT)$  son funciones armónicas de periodo  $N$ .

En la ecuación anterior hay un aspecto a notar: la convolución en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación en el dominio de la frecuencia. Y también sucede a la inversa: la multiplicación en el dominio del tiempo es la convolución en el dominio de la frecuencia.

Gracias a esto, sea una señal de entrada en tiempo o en frecuencia, existe una operación que puede ser caracterizada en su entrada al sistema lineal, según sea conveniente, en tiempo o en frecuencia.

Por ejemplo, un filtro se puede implementar tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo. Un caso es un filtro pasabandas (una función que vale 1 en las frecuencias seleccionadas y cero en las frecuencias a eliminar). Para filtrar, se multiplica la función por cada una de las frecuencias y se le aplica a transformada inversa de Fourier. La función temporal resultante contiene solamente las frecuencia seleccionadas. Este filtro se puede aplicar, por ejemplo, a las frecuencias negativas para asegurar funciones con significado físico.

Una ventaja es que son computacionalmente muy fáciles de hacer, las transformadas, así que dada la comodidad de especificar filtros en el dominio de la frecuencia, se puede obtener la función de  $\omega$  simplemente a partir del sismómetro en tiempo [46].

#### **2.1.4 Deconvolución**

En esta sección se hablará sobre cómo la convolución se introduce en el tratamiento de señales en este trabajo y cómo la operación de deconvolución sirve para obtener cierta información útil de señales compuestas.

Si una función pasa por dos sistemas lineales sucesivos, la señal de salida es una convolución en el dominio del tiempo o un producto en el

dominio de la frecuencia.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * f(t) * g(t) \\
 Y(\omega) &= X(\omega)F(\omega)G(\omega).
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

Como lo anterior se puede generalizar para  $n$  sistemas lineales, se puede pensar un sismograma  $u(t)$  de manera muy simple como el paso de una señal de impulso unitario  $x(t)$  por dos sistemas lineales que corresponden a dos efectos: la respuesta de la estructura terrestre por la que pasa la onda sísmica  $g(t)$ , y la respuesta del sismómetro  $i(t)$ .

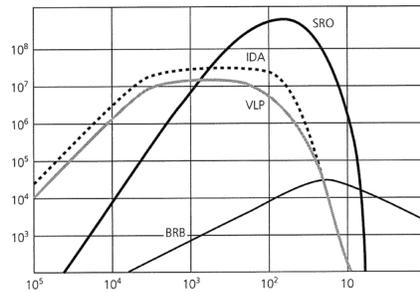


Figura 11: Funciones de transferencia para diferentes sismómetros. El eje  $x$  representa el periodo en  $s$ , y el eje  $y$  la amplificación de aceleración en  $Vm^{-1}s^2$  [46]. Sus

Las funciones de transferencia son fáciles de comprender en el dominio de la frecuencia, y gracias a la transformada de Fourier, se pueden trasladar al dominio del tiempo y operar con el impulso unitario y con el efecto de la estructura terrestre.

Cuando un sistema se describe por la convolución de varios efectos, se puede examinar cada uno de ellos con la ayuda de la deconvolución. Se buscará ahora una función  $w'(t)$  que al convolucionarla con  $w(t)$  se obtenga

la función  $\delta(t)$ , cuya transformada de Fourier es uno. En el caso del sismograma, se busca una función  $i'(t)$ . Como se vio en el apartado anterior que la convolución corresponde a la multiplicación en el dominio de la frecuencia,

$$i'(t) * i(t) = \delta(t) \quad \implies \quad \frac{1}{I(\omega)} I(\omega) = 1. \quad (150)$$

Aplicado entonces al sismograma  $u(t) = x(t) * g(t) * i(t)$ ,

$$i'(t) * u(t) = i'(t) * x(t) * g(t) * i(t) = \delta(t) * x(t) * g(t) = \delta(t) * g(t) = g(t) \quad (151)$$

Por lo tanto,

$$\frac{U(\omega)}{I(\omega)X(\omega)} = \frac{U(\omega)}{I(\omega)} = G(\omega). \quad (152)$$

[46]. La ecuación anterior es de gran utilidad pues se ve que un simple despeje en el dominio de la frecuencia puede eliminar los efectos deseados, en este caso, los del sismómetro [9].

Aunque sea simple el método, para construir un filtro de esta forma se necesita la seguridad de que será estable. En el apartado que habla de análisis de funciones de receptor se profundizará en cómo lograrlo [9].

### 3 Fases sísmicas terrestres

Este capítulo se comenzará a particularizar la teoría vista para medios continuos, isótropos y homogéneos a los casos con que trabaja la sismología.

#### 3.1 Definición

En los registros reales de parámetros terrestres, ninguno de los supuestos anteriores (homogeneidad, isotropía y continuidad) se cumple en su totalidad. Aún así, los sismólogos utilizan esta teoría de manera prudente para determinar diferentes aspectos a partir de los registros sísmicos.

Una manera en que se pueda cuantificar el tamaño de un sismo es la escala de magnitud de momento, que, de hecho, es la utilizada internacionalmente para remitir a la talla de un temblor. Es ésta, se toma en cuenta tanto la geometría de la falla en que ocurrió el sismo como la dimensión del evento. Dos ventajas que presenta esta magnitud son que aplica para sismos en todo el mundo y que no tiene un límite superior. La magnitud de momento sísmico se calcula a partir del momento sísmico

$$M_0 = \mu S \langle d \rangle, \quad (153)$$

donde  $\mu$  es el módulo de rigidez de la roca en donde ocurrió el sismo,  $S$  es la superficie de deslizamiento del evento y  $\langle d \rangle$  el desplazamiento promedio en la falla. La magnitud de momento sísmico se define como

$$M_w = \frac{2}{3} \log_{10}(M_0) - 10.7. \quad (154)$$

[33]Esta cantidad es de utilidad pero no de primera importancia en el presente trabajo, pues su fin es inferir la estructura terrestre en la zona de Guerrero a partir del procesamiento y modelado de registros sísmicos conocidos también como sismogramas [9]. En los sismogramas se registra la vibración de la superficie terrestre cuando alguna onda elástica arriba [46].

La señal registrada por el sismograma es una combinación de todos los efectos que suceden desde el origen de la onda hasta su llegada al aparato. Es una señal compuesta de una compleja combinación de dichos efectos. Conforme más se puedan separar y caracterizar, más se podrá conocer el interior de la Tierra y su dinámica.

Las diferentes ondas elásticas que llegan a un sismómetro se conocen como fases sísmicas (no se confundan con la fase de las funciones periódicas). Cada una de las diferentes fases está asociada a una estructura especial en el interior terrestre. Los distintos procesos para identificar la procedencia de dichas fases en un sismograma son: determinar su comportamiento en función de la distancia que separa la génesis del sismo con el sismógrafo, medir el tipo de movimiento que inducen en la superficie terrestre y establecer la consistencia de diferentes fases entre diferentes sismos o eventos.

La clasificación de un número preferentemente grande de los tiempos de viaje de los sismos a distintas estaciones provee información acerca de la estructura del interior de la Tierra. Es por eso que instituciones nacionales a internacionales crean bases de datos con estos registros. Un ejemplo es el International Seismological Center (ISC), que desde 1964 ha recibido ininterrumpidamente los tiempos de arribo de sismos de cerca de 3000 estaciones de alrededor del mundo. Posee cerca de 7 millones de tiempos registrados

que han sido atribuidos a más de 25 fases diferentes. El catálogo donde se encuentran las fases internacionalmente aceptadas se puede encontrar en [www.isc.ac.uk](http://www.isc.ac.uk) [18].

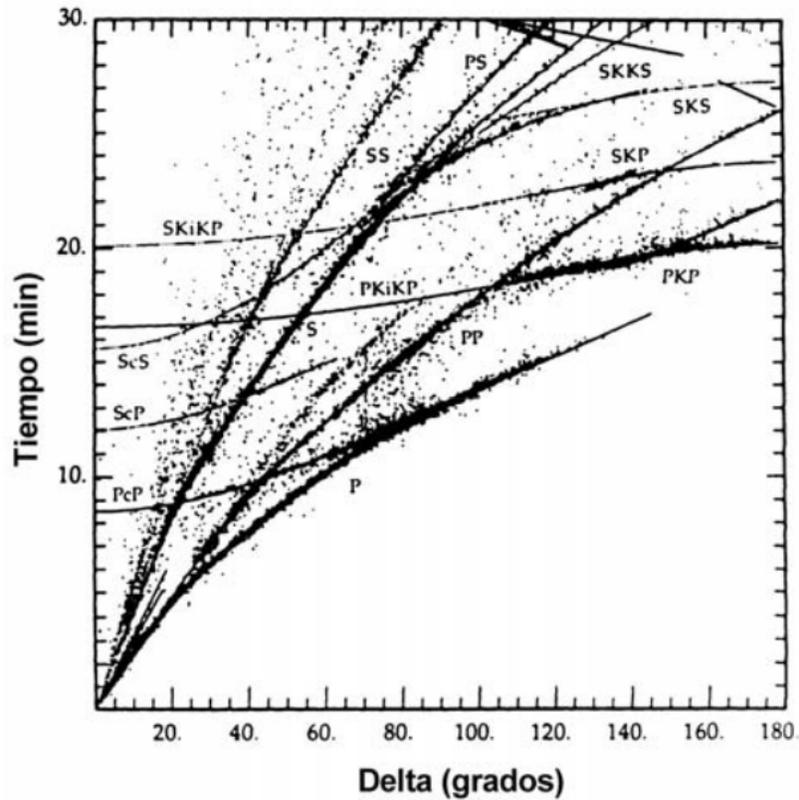


Figura 12: Gráfica de tiempos de arribo en función de su distancia epicentral. Las curvas fueron trazadas por Kennett y Engdahl en 1991 [9].

En la imagen (12) se puede ver un gran conjunto de tiempos en función de la distancia epicentral. Se observa que se forman curvas o ramas, cada una asociada a una fase diferente. El hecho de que cada una de las curvas sea completamente diferenciable demuestra que, en términos generales, la Tierra tiene simetría radial en cuanto a la velocidad de propa-

gación de ondas. Por otro lado, los eventos que se encuentran fuera de las ramas muestran heterogeneidades tridimensionales en las velocidades [ $P$  y  $S$ ]. Asumiendo la simetría radial se pueden predecir los tiempos de llegada de muchas fases sísmicas con alto grado de exactitud [9] gracias a la interpolación en las curvas que ajustan a los eventos [46]. Esto provee las cimientos para muchos de los procesos usados para hallar el epicentro del sismo en cuestión [9].

### 3.2 Modelo estructural de velocidades terrestres

Para entender la trayectoria de las ondas, se supone un medio lateralmente homogéneo en que las velocidades longitudinales y transversales aumentan con la profundidad. Si un rayo se propaga hacia abajo, en consecuencia con la ley de Snell, el ángulo irá en aumento hasta que la onda se propague de manera horizontal, como se ve en la figura (13).

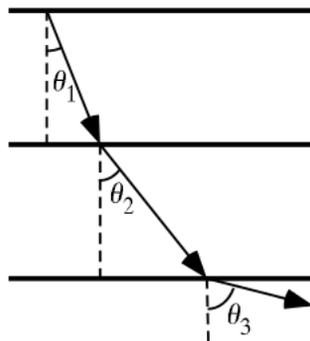


Figura 13: Onda que se propaga a través de diferentes interfaces homogéneas, diferenciables porque entre más profundas, las velocidades  $P$  y  $S$  son mayores [43].

Las ondas con menor parámetro de rayo alcanzarán mayor profundidad antes de llegar a la horizontal. Ahora, si existen heterogeneidades laterales en el camino de la onda, el parámetro de rayo cambiará. La explicación que concierne este cambio y su relación con las ondas  $SH$  y  $SV$  es expuesto por Shearer en su libro [43]. Para un medio continuo con un gradiente de velocidades vertical y un inhomogeneidad lateral de propagación de ondas transversales en función de la profundidad, existe una simetría tal que el tiempo y la inclinación con que un rayo se "curva" yendo hacia abajo son los mismos a los que el rayo se dirige de nuevo hacia arriba. En la práctica, el medio continuo se discretiza en pequeñas capas homogéneas para hacer una suma [43].

Para generar un modelo global de velocidades se utilizan las curvas o ramas de la figura (12). Una vez que se definió cada curva, se hace un modelo de velocidades de las ondas  $P$  y  $S$  en función de la profundidad con métodos de inversión, de los que se hablará en el capítulo cinco. En el proceso se consideran también las ondas superficiales de periodo largo y las oscilaciones libres del planeta. Con toda esta información, y sumando la curvatura de la Tierra a lo que se sabe de la propagación de rayos, los sismólogos han determinado modelo unidimensionales de velocidades elásticas para todo el planeta [9]. En los años cuarenta, el modelo de la Tierra fue desarrollado ampliamente por sismólogos, entre los que se encuentran Jeffreys y Bullen, que infirieron de éste la simetría radial de la velocidades [46]. Uno de los modelos más aceptados es el de Dziewonski y Anderson, 1981, que se ve en la figura (14).

Este modelo muestra las discontinuidades principales del interior

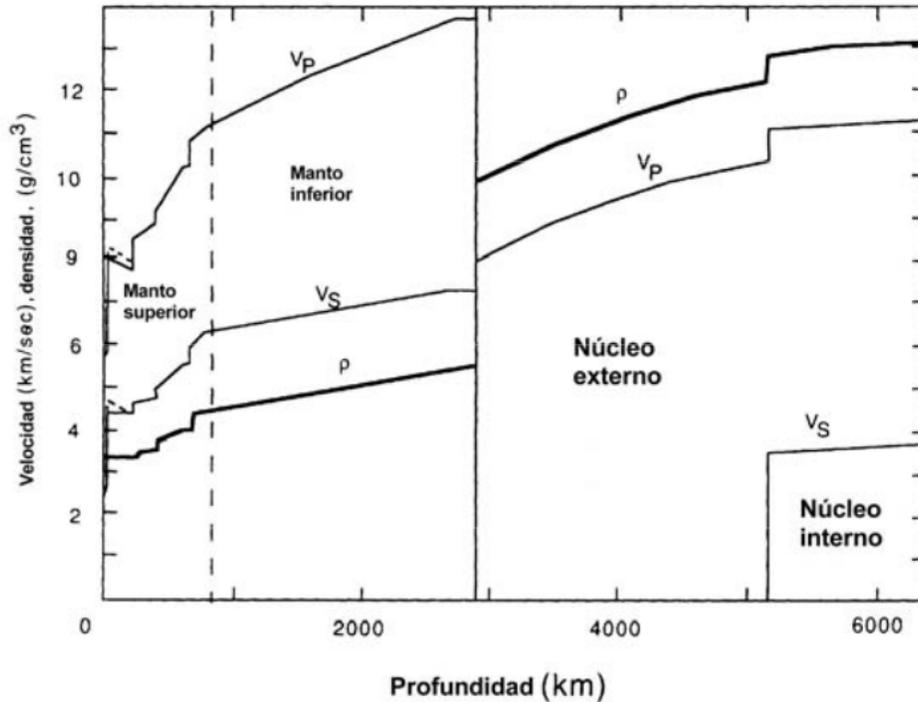


Figura 14: Modelo de velocidades, profundidad y densidad para el interior de la Tierra propuesto por Dziewonski y Anderson en 1981 [9].

de nuestro planeta: el núcleo interno sólido, el núcleo externo fluido, el manto inferior sólido y el manto superior líquido. El modelo provee también información de las velocidades a las que se propagan las ondas dentro de cada sección y su densidad de masa. Dado que la corteza es una capa superficial relativamente delgada, a la escala a la que está hecha esta imagen no se alcanza a distinguir [9]. Modelos más actuales incluyen mayor resolución para la zona entre el manto y el núcleo. Como promedio mundial, la profundidad de la corteza continental es de 40 km, la de la corteza oceánica de 6 km [43], el manto superior se transforma en manto inferior entre 400 700

km de profundidad, el manto inferior en el núcleo externo entre 700 y 2890 km y el núcleo externo en el interno cerca a de 5200 m [46]. Además existe una discontinuidad importante en la corteza continental llamada de Conrad entre los 15 y 20 km de profundidad. En la imagen inferior se pueden ver estas discontinuidades [9].



Figura 15: Representación esquemática del interior terrestre donde se ven las principales discontinuidades en su interior [9].

Un problema que surge de estas generalizaciones es que no se expresa la complejidad del sistema terrestre, que es dinámico. La convección en el planeta ocasiona cambios en la temperatura que tienen como consecuencia variaciones tridimensionales en la velocidad. Otros efectos que inducen cambios son el flujo del núcleo, que hace variar el campo magnético, y el flujo

del manto, que parece ocasionar anisotropía sísmica [46]. Es por eso que los sismólogos buscan crear modelos a diferentes escalas y con mayor grado de detalle. En este trabajo se hace justamente eso, un modelo de velocidades y profundidades que muestra más pormenores en la zona de Guerrero, México.

### 3.3 Nomenclatura

La información de un sismograma depende en gran medida de su distancia al epicentro. Si la distancia es grande, mayor es el dominio de la estructura del manto y del núcleo, así como de las características locales de estructura cortical. Si la distancia es pequeña, la mayor parte de la influencia es debida a la corteza. La profundidad que alcanzan las ondas en función de la distancia de las mismas tiene que ver también con el sismograma, pues se puede pensar en dos diferentes ondas que toman diferentes caminos, uno más superficial que el otro, que lleguen al receptor al mismo tiempo.

Los sismogramas se clasifican según la distancia entre el origen y la detección del sismo: de distancias locales, de distancias regionales, de distancias del manto superior y de distancias telesísmicas. Los sismogramas de distancias locales son de trayectorias de menos de 100 km, los de distancias regionales de  $100 \leq x \leq 1400$  km ( $1^\circ \leq \Delta \leq 13^\circ$ ), los de distancias del manto superior de ( $13^\circ \leq \Delta \leq 30^\circ$ ) y los de distancias telesísmicas de  $\Delta \leq 30^\circ$  [9]. Hay que mencionar que esta clasificación no es definitiva y que varios autores difieren al respecto.

Las ondas de cuerpo (que viajan por el interior de la Tierra) que se estudian regularmente son las  $P$  y  $S$  directas, de trayectoria muy simple.

Describen el tiempo mínimo de recorrido entre la fuente y el receptor. Si una onda  $P$  o  $S$  se genera en un ángulo menor a  $90^\circ$  (debajo de un plano horizontal imaginario) se etiqueta con una letra mayúscula  $P$  o  $S$  respectivamente. Por otro lado, si la onda sale con un ángulo mayor a  $90^\circ$  las fases se nombran con las minúsculas  $p$  o  $s$ . Si estas últimas suben hacia la superficie para llegar al sismómetro se conocen como fases de profundidad. Cada vez que una onda alcanza una interfase, si continúa hacia la superficie se le asignará una letra minúscula y si va hacia abajo una letra mayúscula. Así, los nombres de todas las fases se conforman de una sucesión de letras según haya sido la trayectoria que la onda haya seguido hasta la superficie [9]. Su nomenclatura está registrada en una lista en la Comisión de interpretación sísmica y observación de la IASPEI <sup>1</sup> [18].

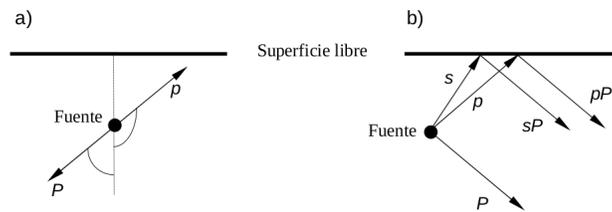


Figura 16: a) Ondas de diferentes ángulos de salida. b) Nomenclatura de ondas que se reflejan en la superficie [9].

Para sismos locales y regionales ( $\Delta \leq 13^\circ$ ) se usa una nomenclatura especial pues se supone un frente de onda plano que atraviesa planos paralelos [18]. Las ondas  $P$  y  $S$  directas se llaman  $Pg$  y  $Sg$ . Las que viajan en el manto o a lo largo de la discontinuidad entre corteza y manto (descubierta por Mohorovicic y llamada Moho) son llamadas  $Pn$  y  $Sn$ . Estas dos fases

<sup>1</sup>Asociación Internacional de Sismología y Física del Interior de la Tierra.

son de especial importancia porque permiten encontrar las distancias epicentrales [18]. Las reflexiones en el Moho son  $PmS$ ,  $PmP$ ,  $SmS$ ,  $SmP$ . La discontinuidad entre la superficie terrestre y el Moho es la discontinuidad de Conrad, que es observada en muchos lugares de la corteza terrestre. Las ondas que se reflejan en ella son  $Pb$  y  $Sb$  [18]. Muchos autores relacionan esta discontinuidad con el metamorfismo de rocas.

Si la distancia epicentral es mayor a  $13^\circ$ , las ondas llegan a profundidades mayores en las que interactúan con otras interfases. Una onda que se refleja en el núcleo (core en inglés) para seguir hacia la superficie se llama  $PcP$ . Las ondas que se reflejan en la superficie terrestre, conocidas como reflexiones de superficie, no se denotan con ninguna letra. Ejemplos de ello son  $PP$ ,  $SP$ ,  $SSP$ , en donde los dos primeros casos hablan de una reflexión y el segundo de dos reflexiones en la superficie. Un ejemplo de combinación entre reflexiones de superficie y en el núcleo son  $pPcP$ ,  $ScSScSScS(ScS_3)$  y  $PcPPPcP$ . Las fases que atraviesan el núcleo externo se nombran con una  $K$  (de kernwellen, pozos del núcleo en alemán). Las ondas  $P$  que atraviesan el núcleo interno con una  $I$ . Un ejemplo es una fase  $PKIKP$ . En cambio, las ondas  $S$  que atraviesan en núcleo interno se denotan con la letra  $J$ , como  $PKJKP$  [9]. Esta es particularmente interesante pues demuestra la existencia y solidez del núcleo interno [46]. Una reflexión (de onda  $P$ ) entre el núcleo externo y el interno se llama con la vocal minúscula  $i$ , como en  $PKiKP$  [9].

La frontera entre el núcleo y el manto es un fuerte reflector tanto por la parte interior como por la exterior por el gran contraste de velocidades entre ellos. En la parte interior, si hay una reflexión se menciona con la

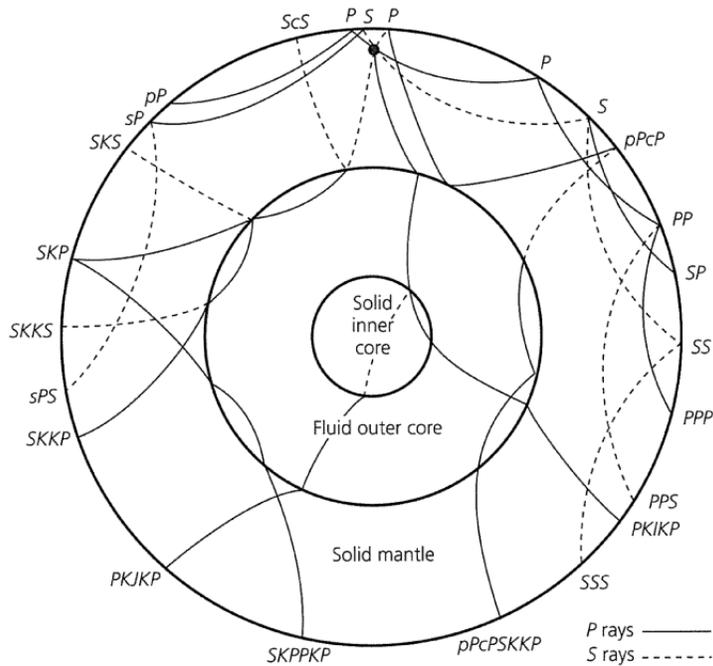


Figura 17: Ejemplo de ondas de cuerpo que ilustra la nomenclatura empleada. Las líneas continuas representan ondas  $P$  y las punteadas ondas  $S$  [46].

repetición de la letra  $K$ , como en  $PKKP$ . Si hay múltiples reflexiones se abrevia como  $PmKP$ , donde  $m$  es el número de reflexiones internas que sufre la onda. Otro aspecto que hace especial a esta interfase es que el núcleo externo no transmite ondas  $S$  [46]

Hay ciertas ondas que pueden existir de manera geométrica pero que no son detectables en los sensores. Un ejemplo son las ondas  $P$  que se reflejan verticalmente en el núcleo, las cuales tienen una reflexión casi nula por el pequeño contraste acústico (complementario a lo que sucede con las

ondas  $S$ ), al contrario de lo que sucede cuando la onda incide en un ángulo casi horizontal [9]. Otro ejemplo es el rango de distancia entre  $103^\circ$  y  $140^\circ$  pues las ondas encuentran a su paso el núcleo, como se ve en la imagen (17), por lo que no hay ondas  $P$  directas [18]. Esto significa que las ondas registradas a esas distancias son producto de reflexiones en interfases menos profundas, o de difracción [46].

De hecho, un fenómeno que no se toca en este trabajo es la difracción en cada interfase por ser de mayor dificultad matemática y física. Tampoco se toman en cuenta interfases inclinadas. Y es de notar que a pesar de esta descripción detallada, muchas ondas no siguen la trayectoria predicha dadas las heterogeneidades en cada medio, que reflejan y refractan ondas también. Esta discrepancia se observa sobre todo en las fases que se encuentran (se reflejan o son transmitidas) a través de la frontera entre el manto y el núcleo [46].

Es importante mencionar que la aproximación de cada fase como una "línea" es una simplificación de lo que sucede con una onda esférica tras generarse un temblor. Diferentes secciones de la onda interactúan con la frontera entre capas a diferente tiempo, generando una gran cantidad de ondas que pueden interferir entre sí [46]. Un claro ejemplo de lo anterior puede verse en la imagen (18).

La parte interpretativa en este trabajo se vuelve fundamental dado cuán complejas pueden ser las señales sísmicas [9].

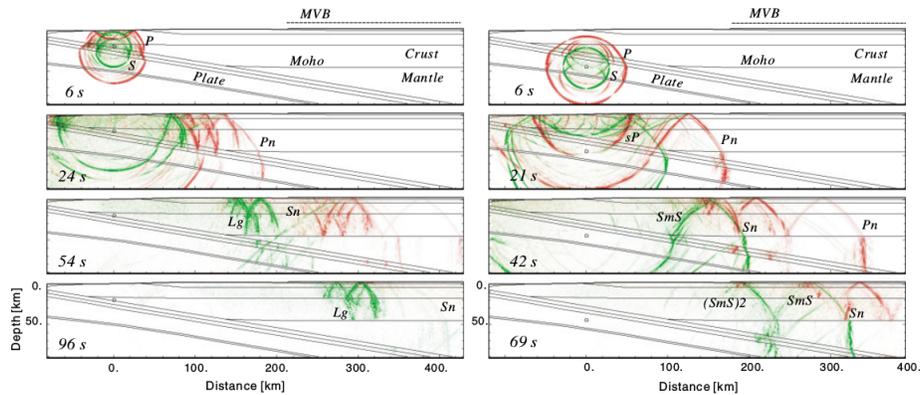


Figura 18: Simulación de cómo se propagan las ondas  $P$  y  $S$  de un sismo en México. los diferentes paneles indican diferentes tiempos tras la ruptura [15].

## 4 Funciones de receptor

### 4.1 Definición

El estudio en capítulos anteriores de la estructura interna de la Tierra debe considerar las heterogeneidades presentes en la corteza local. Estas heterogeneidades tiene consecuencias importantes en la forma de las funciones de onda observadas en superficie, y si no se toman en cuenta la verosimilitud de los modelos propuestos es muy pobre. Algunos elementos importantes de los modelos locales son los sedimentos, las capas de lava y el grosor de la corteza (oceánica o continental).

Desde la década de 1960, las ondas telesísmicas  $P$  se han utilizado para modelar la estructura bajo el receptor de la señal. Algunos de los primeros en emplear este método fueron Burdick y Langston [7] y Phin-

ney [40]. La mayor parte de estos estudios utilizó datos de periodo muy largo para resolver estructuras muy generales en la corteza. Los datos fueron procesados tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Más adelante, gracias al desarrollo de mejores métodos de análisis de registros telesísmicos y al introducirse los sismógrafos digitales de banda ancha se pudieron estudiar estructuras con mejor resolución [9].

En este trabajo se utiliza un método para determinar la estructura terrestre que se sirve de las ondas telesísmicas tipo  $P$  después de su paso a través de la corteza. Para resolver esta estructura se debe aislar la influencia de la fuente sísmica y del trayecto a través del manto. Esto se hace con una deconvolución de los componentes del registro. Antes de explicar el procedimiento, se ahonda en las características del fenómeno a modelar.

Los telesismos tienen una distancia entre receptor y fuente considerablemente grande (i.e.,  $\Delta \geq 30^\circ$ ). Esta distancia permite que el tren de ondas  $P$  se separe de la primera onda  $S$  algunos minutos, dada la diferencia en la velocidad de propagación de ambos tipos de onda. Debido al gradiente de profundidad con velocidad en la Tierra, el frente de onda  $P$  llega a la base de la corteza con un ángulo pequeño con respecto a la vertical (i.e., ángulo de incidencia). Conforme la onda asciende a través de la corteza, el paso por cada interfase hace que su rayo tienda aún más a la vertical, como se ve en la figura (19 a)). Es por eso que la incidencia de la onda  $P$  queda grabada en su mayor parte en la componente vertical del sismograma, y las ondas  $S$  generadas por la conversión de dicha onda  $P$  durante su ascenso en la corteza se graban predominantemente en las componentes horizontales [9].

Hay un procedimiento previo que debe hacerse con los registros,

que corresponde a una rotación de los mismos relacionada al ángulo que forman el arco entre la fuente y el receptor con el norte geográfico. Este ángulo se mide en la estación de registro a partir del norte en dirección a las manecillas del reloj, y se conoce como Back-Azimuth. Las componentes usuales de un sismograma son n-s, e-w y vertical, que con este tratamiento cambian a radial, transversal y vertical tal como se ve en la imagen (19 b)). En un caso ideal de capas planas y horizontales, las ondas  $P$  inducirán en el receptor movimientos de tipo radial y vertical, mientras que en la componente transversal no habrá registro. Esta componente sigue teniendo utilidad, pues su amplitud representa un indicador de la estructura tridimensional de las capas; de las desviaciones del modelo de capas planas propuesto [9].

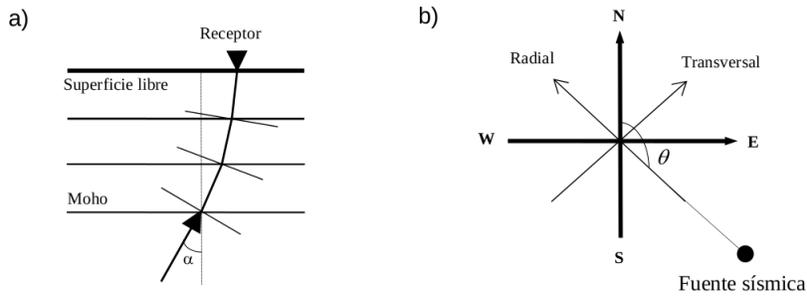


Figura 19: a) Incidencia de una onda  $P$  con un ángulo  $\alpha$  en el Moho y su modificación al ascender por las capas terrestres. b) Rotación de las componentes de un sismograma de n-s y e-w a radial y transversal [9].

El ángulo de incidencia de la onda  $P$  y su procedencia azimutal influyen directamente en la inferencia sobre las capas bajo el receptor. Es por eso que se organizan los sismos en grupos provenientes de una misma región del planeta; i.e., de un mismo Back-Azimuth a una misma distancia. Sismos que lleguen a una misma estación y sean de un diferente grupo pueden

revelar estructuras muy distintas. Un ejemplo claro es el de una estación que se encuentra en la costa con el mar al sur. Las ondas que viajen a ella desde el sur revelarán la estructura de la corteza oceánica y las que vengan desde el norte mapearán la corteza continental [41].

## 4.2 Construcción

En 1979, Langston propuso un procedimiento para ecualizar la información de los telesismos, eliminando los efectos de la fuente y del trayecto profundo [9]. El resultado son series de tiempo que muestran la respuesta relativa de la estructura terrestre cerca del receptor. Están compuestas por fases convertidas en la estructura debajo del sismómetro, tanto en  $P$  como en  $S$ . Estas funciones se conocen como funciones de receptor. La gran ventaja de este método es que, asumiendo interfases cuasi-horizontales, se pueden determinar las características principales de un medio [41].

Acorde con lo que se ha tratado en el capítulo de sistemas lineales, cada una de los componentes del desplazamiento en el dominio del tiempo generados por el arribo de ondas  $P$  casi verticalmente en la base de una estructura se compone como

$$\begin{aligned}
 D_V &= I(t) * S(t) * E_V(t) \\
 D_R &= I(t) * S(t) * E_R(t) \\
 D_T &= I(t) * S(t) * E_T(t).
 \end{aligned}
 \tag{155}$$

En este conjunto de ecuaciones,  $S(t)$  es la función de la fuente en el dominio del tiempo,  $I(t)$  es la respuesta al impulso unitario del instrumento y  $E_V$ ,  $E_R$  y  $E_T$  son la respuesta vertical, radial y trasversal de la estructura al

impulso unitario.

En un telesismo, la componente vertical del sismograma se comporta casi como una función impulsiva asociada a la onda  $P$  directa convolucionada con las respuesta del instrumento y la función de la fuente. Otras fases con amplitudes mucho menores en dicha componente que corresponden en su mayor parte a reverberaciones y fases convertidas en interfases profundas también están presentes pero no se consideran en el análisis. A pesar de las aproximaciones, existe un número de ventajas comparablemente alto si se utiliza la suposición de Langston, donde la respuesta vertical de la corteza es aproximadamente igual a

$$E_V(t) \approx \delta(t). \quad (156)$$

Si se introduce (156) en (155),

$$D_V(t) \approx I(t) * S(t). \quad (157)$$

Esta aproximación será más exacta si existen contrastes de velocidad menores a 2 km/s entre las interfases. Si es así, las fases convertidas de considerable amplitud que surgen vuelven más complicada  $D_V$ .

Dado que en la ecuación (155) se supone el mismo efecto de la fuente y del instrumento, se puede utilizar la ecuación (157) para aislar las funciones de transferencia por medio de deconvolucionar los efectos de fuente e instrumento de las componentes radial y transversal.

La deconvolución se logra en el dominio de la frecuencia de forma

sencilla (ver capítulo de sistemas lineales)

$$\begin{aligned} E_R(\omega) &= \frac{D_R(\omega)}{I(\omega) \cdot S(\omega)} \approx \frac{D_R(\omega)}{D_V(\omega)} \\ E_T(\omega) &= \frac{D_T(\omega)}{I(\omega) \cdot S(\omega)} \approx \frac{D_T(\omega)}{D_V(\omega)}. \end{aligned} \quad (158)$$

Se utiliza un filtro Gaussiano para eliminar frecuencias altas y para funcionar como señal de entrada [9]. Se elige este filtro sobre cualquier otro por su forma simple, por no distorsionar las fases [sísmicas] en absoluto y por su ausencia de lóbulos laterales en el dominio de la frecuencia. [41]. Su expresión en el dominio del tiempo y la frecuencia es

$$\begin{aligned} G(t) &= \xi \exp\left[\pi\left(\frac{t-t_s}{t_p}\right)^2\right] \\ G(\omega) &= \exp\left(\frac{\omega^2}{4a^2}\right) \end{aligned} \quad (159)$$

donde  $t_s$  es el desfase temporal,  $t_p$  el periodo propio de la campana,  $\xi$  un constante de normalización que depende de  $t_p$  [9] y  $a$  una constante. Dados diferentes valores de  $a$  habrá diferentes anchos de pulso (en segundos) y el filtro tendrá un valor de .1 a una diferente frecuencia. Distintos valores de  $a$  se exponen en la página web de Ammon citada en el escrito. Para el análisis del presente trabajo se utiliza  $a = 2.5$ , con una frecuencia a la que la gaussiana vale .1 de 1.2 Hz y un ancho de pulso de 1 s [41].

En el caso de la componente radial,

$$E'_R(\omega) = \frac{D_R(\omega)}{D_V(\omega)} \cdot G(\omega) \quad (160)$$

Dado que este cociente tiene un comportamiento inestable si  $D_V \rightarrow 0$  [9], se reemplazan los valores muy pequeños por una fracción del valor

máximo del denominador. Este valor se conoce como nivel de agua  $\Phi_{SS}(\omega)$ .

$$\Phi_{SS}(\omega) = \max\left\{D_V(\omega) \cdot \bar{D}_V(\omega), c \cdot \max\left[D_V(\omega) \cdot \bar{D}_V(\omega)\right]\right\}, \quad (161)$$

donde  $\bar{D}_V$  representa el complejo conjugado de  $D_V$ . El nivel de agua (proceso en que se introduce  $\Phi_{SS}$ ) se utiliza cuando los datos son de buena calidad [41]; al "eliminar" estas bajas frecuencias se tienen sismogramas casi completos. La constante  $c$  se encuentra por prueba y error. El valor del parámetro de nivel de agua que se elegirá es el mínimo que produzca una relación aceptable de ruido entre la inserción o remoción del parámetro. Algunos valores típicos son 0.0001, 0.001 y 0.01.

Así, la función de transferencia lineal queda como

$$E'_R(\omega) = \frac{D_R(\omega) \cdot \bar{D}_V(\omega)}{\Phi_{SS}(\omega)} \cdot G(\omega). \quad (162)$$

Ésta y la correspondiente transversal  $E'_T$  son finalmente curvas a escala de su correspondiente desplazamiento eliminando el efecto de la onda  $P$  [9]. Son adimensionales, pero si se trasladan de nuevo al dominio del tiempo quedan en unidades de  $1/s$ . El espectro que espera verse en la escala temporal debe mostrar una señal concentrada entre 20 y 40 segundos normalmente.

La amplitud de las ondas en las funciones de receptor depende del ángulo incidente de la onda  $P$  en la base y del contraste de velocidades que genera las conversiones entre  $P$  y  $S$ . A su vez, los tiempos de arribo dependen de la profundidad de los contrastes de velocidad, las velocidades  $P$  y  $S$  a ambos lados de la interfase y el parámetro de rayo.

Tras construirse funciones de receptor para todos los eventos de cada grupo, se hace un apilado de las mismas para obtener una media que

represente la forma promedio de la función en cada grupo. Este proceso requiere un análisis cuidadoso pues es posible encontrarse con funciones de receptor "ruidosas" que desvíen perjudicialmente el apilado [41].

### 4.3 Contenido

Charles Ammon [41] analiza los componentes de desplazamiento radial y vertical para la incidencia de una onda  $P$  desde el punto de vista del trazado de rayos. Los componentes vertical y radial de desplazamiento están dados por las sumas

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{k=0}^n z_k s(t - t_k) \\ R(t) &= \sum_{k=0}^n r_k s(t - t_k), \end{aligned} \tag{163}$$

donde  $s(t)$  es la función de la fuente,  $t_k$  es el tiempo de arribo del  $k$ -ésimo rayo y la suma hasta  $n$  representa los  $n$  rayos que llegan al receptor. Las letra minúsculas frente a cada función de la fuente representan la amplitud del rayo en cuestión. En el dominio de la frecuencia, y tomando en cuenta los primeros tres rayos (onda  $P$  directa, conversión  $Ps$  y  $PP$ )

$$\begin{aligned} R(\omega) &= r_0 \left[ 1 + \hat{r}_p e^{-i\omega t_p} + \hat{r}_s e^{-i\omega t_s} \right] \\ Z(\omega) &= z_0 \left[ 1 + \hat{z}_p e^{-i\omega t_p} + \hat{z}_s e^{-i\omega t_s} \right] \end{aligned} \tag{164}$$

En donde  $\hat{r}_p = r_p/r_0$  y  $\hat{r}_s = r_s/r_0$ , lo mismo para las amplitudes verticales.

Para un telesismo es apropiado asumir que la amplitud vertical  $\hat{z}_s$  es muy pequeña. Y dada la construcción de las funciones de receptor,  $\hat{r}_p = \hat{z}_p$ .

Tomando esto en cuenta en las ecuaciones precedentes y sustituyéndolas en (160),

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{Z(\omega)}. \quad (165)$$

Tomando solamente los primero dos términos de la expansión de  $Z(\omega) = (1 + x)^{-1}$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{r_0}{z_0} \left[ 1 + \hat{r}_s e^{-i\omega t_s} \right] \\ \implies h(t) &= \frac{r_0}{z_0} \left[ \delta(t) + \hat{r}_s \delta(t - t_s) \right] \end{aligned} \quad (166)$$

Si se compara la última de las ecuaciones con la ecuación (164) se confirma lo dicho en la sección anterior: una función de receptor es una versión a escala con las fases  $P$  removidas. Esta demostración matemática se ilustra en la figura (20).

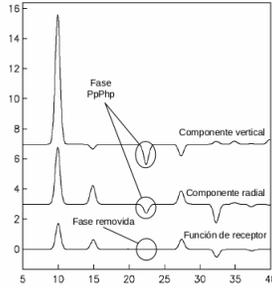


Figura 20: Componentes radial y transversal en función del tiempo de un sismograma para un modelo de corteza continua y homogénea encima de el Moho. La tercera gráfica es la función de receptor generada

La nomenclatura será la que utiliza en la figura inferior (21), de una onda  $P$  incidente en una interfase  $h$ , que puede corresponder al Moho, a la discontinuidad de Conrad o a cualquier otra inferior a la superficie libre. Las letras mayúsculas diferentes a la primera representan fases reflejadas en

la superficie libre, las minúsculas las ondas refractadas en la interfase y las letras posteriores a  $h$  las reflexiones en la interfase [9].

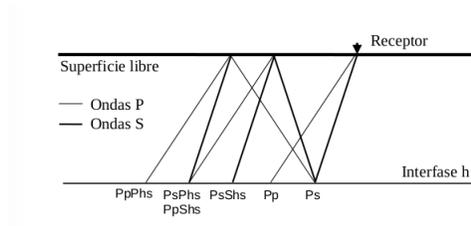


Figura 21: Onda  $P$  que llega a una interfase con las primeras trayectorias que puede tomar a la superficie, acompañadas de su nomenclatura [9]

## 5 Teoría de inversión

### 5.1 Uso en la sismología

La sismología es la ciencia que estudia, entre otras cosas, la propagación de las ondas en el interior de la Tierra. Con el paso del tiempo se han desarrollado modelos que toman la [gran cantidad de] información almacenada en las ondas para generar modelos matemáticos de diferentes características elásticas del interior de la Tierra como la densidad, la velocidad de propagación y las dimensiones espaciales de unidades geológicas, volviendo a la sismología la mejor herramienta científica para crear modelos estructurales de interior terrestre. Para modelar la corteza y el manto superior se utilizan diferentes fenómenos sísmicos como los temblores, los sismos lentos, los temblores y los terremotos, y para modelar zonas alejadas como el núcleo y el manto externo se utilizan los terremotos. En la imagen (15) se ven las interfases que la sismología ha detectado dentro de la superficie terrestre. Todo lo anterior no sería posible sin métodos de análisis de registros sísmicos empleando la teoría de inversión, que es el tema del que tratará este capítulo [9].

### 5.2 Términos generales

La teoría de inversión es un conjunto de técnicas matemáticas que sirven para obtener información a partir de observaciones de un fenómeno (i.e., de datos). La información se obtiene a través de los valores que adopten ciertos parámetros de interés, mismos que gobiernan al modelo matemático

que vincula los datos con dichos parámetros.

La teoría directa es el proceso de predecir resultados partiendo de algún principio general (modelo) o de ciertos parámetros establecidos *a priori*. Por lo tanto, se busca que la perturbación de los parámetros explique distintas observaciones. En cambio, la teoría inversa parte de los datos y del marco teórico del fenómeno para determinar finalmente los valores de los parámetros. El propósito de la inversión es estimar los valores de los parámetros a través de un proceso que termina cuando el ajuste entra dentro de un rango de diferencia aceptable entre el modelo y los datos observados [9]. Es importante notar que tanto los modelos directos como los inversos solamente son posibles si se asume el conocimiento de la física detrás de los fenómenos que se tratan de explicar. Dada nuestra incapacidad para tener un marco teórico robusto que explique la relación entre los parámetros y los datos, y dado que los datos sísmicos son muy ruidosos, el modelo obtenido se debe siempre tomar con cuidado y dentro de las limitaciones predictivas que ofrece [46]. La diferencia entre los problemas inversos y los directos se muestra en la imagen siguiente

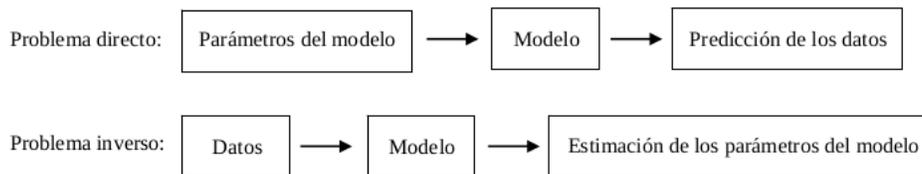


Figura 22: Diferencia en el proceso de resolver un problema directo y uno inverso [9]

Un ejemplo útil para entender la diferencia entre establecer un problema directo e inverso es el estudio de la variación de la temperatura en

el interior de la Tierra. Supóngase un incremento lineal de la misma con la profundidad. Partiendo de esto, la relación entre profundidad y temperatura queda como

$$T(z) = az + b, \quad a, b \text{ constantes.} \quad (167)$$

Si se sabe que  $a = 0.1$  y  $b = 25$  entonces uno puede resolver el problema directo; determinar la recta que relaciona  $T(z)$  con  $z$ . El problema inverso correspondiente a este ejemplo podría ser determinar  $a$  y  $b$  partiendo de un conjunto de mediciones de temperatura para diferentes profundidades. El objetivo es ajustar una recta a estas observaciones.

Tanto los datos como los parámetros son normalmente valores numéricos. Por lo tanto, se pueden construir dos vectores: uno  $\mathbf{m}$  en que cada componente representa un parámetro y otro  $\mathbf{d}$  en que cada componente representa un dato. La longitud de cada vector puede ser diferente.

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (m_1, m_2, \dots, m_M) \\ \mathbf{d} &= (d_1, d_2, \dots, d_N) \end{aligned} \quad (168)$$

La premisa de la que se parte para resolver el problema es que de alguna manera los datos y los parámetros están relacionados. La relación entre ellos se conoce como modelo. El modelo se expresa como una o más ecuaciones. Aunque, como se dijo anteriormente, en los problemas reales el vínculo entre  $m$  y  $d$  es complicado, en general la relación entre los parámetros y los datos se puede expresar como

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{d}, \mathbf{m}) &= 0 \\
f_2(\mathbf{d}, \mathbf{m}) &= 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
f_L(\mathbf{d}, \mathbf{m}) &= 0,
\end{aligned} \tag{169}$$

donde  $L$  es la cantidad de ecuaciones necesarias para representar el modelo. Las ecuaciones (169) se pueden agrupar en un vector de ecuaciones  $\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mathbf{0}$ . El propósito de la teoría de inversión es resolver estas ecuaciones en función de los datos para obtener los parámetros. Este proceso se conoce como invertir las funciones. Existen muchas formas de lograrlo, que se pueden agrupar en dos bloques: por un lado las lineales o que linearizan la solución a través de aproximaciones y por otro las no lineales. El grupo que contiene a las primeras se denomina de métodos de búsqueda local y el segundo, de métodos de búsqueda global [9].

### 5.3 Métodos de inversión locales

La forma implícita lineal es la que posee la funcional  $F$  (una función de funciones) que depende intrínsecamente tanto de los datos como de los parámetros

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = F \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \tag{170}$$

donde  $F$  es una matriz de dimensiones  $L \times (M + N)$ . Por otro lado, la función lineal  $\mathbf{f}$  puede asociarse a una funcional  $G$  llamada el Kernel o núcleo de los

datos. Ésta opera solamente sobre los parámetros del modelo

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mathbf{d} - G\mathbf{m} \quad \Longrightarrow \quad G\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (171)$$

La ecuación lineal explícita (171) es el origen de todos los métodos de inversión locales. Cada uno tiene una manera distinta de resolverlo.

### 5.3.1 Métodos de búsqueda local

El método más simple de resolver un problema inverso lineal requiere de una estimación inicial de los parámetros. Con ella, se calculan unos datos sintéticos [usando 171] y se comparan con los datos reales. Esta comparación se hace por medio de una función de error, que determina la diferencia entre cada pareja de datos

$$e_i = d_i^{obs} - d_i^{sintéticos}. \quad (172)$$

El objetivo entonces es lograr que la longitud euclidiana del vector, la raíz cuadrada de la norma euclideana del vector  $\mathbf{e}$ ,  $L_2(\mathbf{e})$ ,  $E = \sqrt{L_2}$  sea mínima.

El uso de la norma dos o euclideana garantiza que la presencia de algunos pocos  $e_i$  extremos no afecten significativamente a  $L_2(\mathbf{e})$ . Los métodos de inversión que convergen hacia una solución sin verse afectados por estos datos extremos se conocen como métodos robustos.

Una solución que utiliza esta medida de desajuste se llama de mínimos cuadrados. En ella, la diferencia que define  $\mathbf{e}$  está dada por (172) como

$$\mathbf{e} = G\mathbf{m}^{est} - \mathbf{d}^{obs}. \quad (173)$$

La longitud euclidiana de  $\mathbf{e}$  se puede expresar como el producto interno de  $\mathbf{e}$  [9]

$$E = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) \quad (174)$$

Encontrar la inversa de  $G$  solamente es posible si esta matriz es cuadrada [46]. El mínimo de  $E$  se obtiene derivándola con respecto a los parámetros e igualando el resultado a cero. Conociendo la ecuación (174),

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} (\mathbf{m}^T G^T G \mathbf{m} - \mathbf{d}^T G \mathbf{m} - \mathbf{m}^T G^T \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{d}) = 0, \quad (175)$$

lo que lleva a las ecuaciones normales

$$G^T G \mathbf{m} = G^T \mathbf{d}. \quad (176)$$

Escritas en función de los parámetros del modelo estimados dan la solución del problema inverso:

$$\mathbf{m}^{est} = (G^T G)^{-1} G^T \mathbf{d}. \quad (177)$$

[9]. La matriz que permita encontrar el modelo a partir de de los datos  $(G^T G)^{-1} G^T$  es la matriz de resolución del modelo.

Se ilustrará el proceso por medio de un ejemplo real. Se trata de estimar los valores de los coeficientes de un polinomio de segundo grado que ajuste mejor una serie de temperaturas a diferentes profundidades. El vector  $\mathbf{d}$  será  $\mathbf{d} = (T_1, T_2, \dots, T_N)$ . Se asumirá que la temperatura varía como el cuadrado de la profundidad,  $T = a + bz + cz^2$ . Por consiguiente, el vector de parámetros del modelo será  $\mathbf{m} = (a, b, c)$ . El sistema de ecuaciones a resolver para hallar  $\mathbf{m}$  es

$$\begin{aligned}
T_1 &= a + bz_1 + cz_1^2 \\
T_2 &= a + bz_2 + cz_2^2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
T_N &= a + bz_N + cz_N^2.
\end{aligned} \tag{178}$$

Si estas ecuaciones se expresan de la forma explícita matricial  $G\mathbf{m} = \mathbf{d}$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_N & z_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{pmatrix}. \tag{179}$$

Se puede ver que aunque la ecuación es lineal en los parámetros y en los datos, no lo es en las variables  $z$ , que son concidas pues son las profundidades a las que se hicieron las mediciones. Este ejemplo sigue siendo resuelto sin problemas por un método lineal.

Para la ecuación (177),

$$G^T G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & \dots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & \dots & z_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_N & z_N^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{pmatrix} \quad (180)$$

y también

$$G^T \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & \dots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & \dots & z_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum d_i \\ \sum z_i d_i \\ \sum z_i^2 d_i \end{pmatrix}. \quad (181)$$

Se forma con las dos anteriores la ecuación (177) expresada matricialmente

$$\mathbf{m}^{est} = (G^T G)^{-1} G^T \mathbf{d} = \begin{pmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum d_i \\ \sum z_i d_i \\ \sum z_i^2 d_i \end{pmatrix}. \quad (182)$$

La diferencia entre las expresiones (179) y (182) es que en el caso de la primera se trata del simple planteamiento de un problema a resolver por un método local, mientras que la segunda es el resultado del tratamiento de mínimos cuadrados, y consiste (y consistirá en todos los casos) de un sistema de ecuaciones cuadrado.

Pensando en la ecuación (182) como  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ , el sistema se puede

escribir también de la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (183)$$

Gracias a que es cuadrado, su solución puede hallarse por medio de técnicas matemáticas adecuadas, de algunas de las cuales se hablará a continuación.

Un problema inverso lineal del tipo de la ecuación (177) tiene la propiedad de poseer una única solución. Además de los problemas lineales, existen algunos moderadamente no lineales que también tienen esta propiedad. Para resolver estos problemas existen varios métodos que exploran de forma característica el dominio de soluciones de forma iterativa. Estos problemas comienzan la búsqueda de la solución a partir de un valor inicial de los parámetros. A partir de este valor, cada método tiene su manera de converger. De hecho, el origen del nombre "métodos de búsqueda local" se relaciona con cómo se encuentran los valores. Y es que por depender de una solución inicial, éstos restringen su búsqueda a un sector muy localizado del amplio dominio de soluciones, a una localidad.

La gran dependencia de estos métodos a la solución inicial los vuelve susceptibles a no cumplir su objetivo. Cuando se trata de un problema de inversión no lineal con muchos mínimos, un método local divergirá o encontrará un mínimo que sea cercano a su inicio. Más allá de sus problemas operacionales, el algoritmo siempre expresa los problemas de forma lineal, lo cual es muy perjudicial en el caso de funciones fuertemente no lineales porque el error de truncamiento al primer grado de la expansión de una función es mayor que el orden de la aproximación.

En el caso de un problema de inversión lineal abordado con el criterio de mínimos cuadrados, llegar a los valores de los parámetros se hace

resolviendo un sistema de ecuaciones lineales cuadrado de dimensiones  $n \times n$  como en la ecuación (183). En la tabla (1) se muestran los métodos más comunes para resolver sistemas de ecuaciones.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Métodos directos	Métodos indirectos
Eliminación gaussiana	Jacobi
Gauss-Jordan	Gauss-Seidel
Escalamiento	Relajación
Descomposición LU	Sobrerelajación
Cholesky	Newton
	Newton modificado
	Quasi Newton
	Máxima pendiente
	Gradiente conjugado

Tabla 1: Diferentes maneras de resolver un sistema lineal de ecuaciones [9]

Los métodos directos son los que van eliminando incógnitas sucesivamente por medio de operaciones de fila, que son:

- Multiplicar cualquier fila por una constante.
- Sumar el múltiplo de una fila con el múltiplo de otra, y que el resultado sustituya cualquiera de las dos.
- Cambiar el orden de los renglones.

En los siguientes párrafos se hace una breve descripción de cada método directo, se menciona su utilidad específica y/o sus particularidades.

Eliminación gaussiana: Se agrega a la matriz  $A$  la fila de resultados. Se posiciona el mayor elemento de la primera columna en la primera fila. Con operaciones de fila se convierten en cero todos los términos debajo del mismo. Se convierten después en cero todos los elementos debajo del segundo elemento de la diagonal, y se hace lo mismo con cada elemento de la diagonal. Al terminar, el último elemento del vector solución se determina con facilidad. Con éste se encuentra el elemento superior del vector solución y así hasta tener todos los elementos de  $\mathbf{x}$ .

Gauss-Jordan: Igual al la eliminación gaussiana pero transformando en ceros los elementos tanto debajo como encima de la diagonal. Normalmente esto convierte a los elementos de la diagonal en uno. Por lo que  $A$  se transforma en la matriz identidad y los elementos de  $\mathbf{b}$  serán la solución  $\mathbf{x}$ . Este método es útil cuando se tienen entre 15 y 20 ecuaciones.

Escalamiento: Es útil cuando en  $A$  se tienen términos de diferentes magnitudes pues se evitan errores por redondeo. Ampliando la matriz con  $\mathbf{b}$ , se divide cada fila entre su coeficiente más grande. Posteriormente se hace eliminación gaussiana.

Descomposición LU: Es un método muy utilizado en programación porque su uso de memoria computacional es muy eficiente. En este método, la matriz  $A$  se descompone en un producto de matrices triangulares, una inferior  $L$  y otra superior  $U$ . Las fórmulas para obtener los términos de las matrices

para un sistema de  $n \times n$  ecuaciones son

$$\begin{aligned}
 l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k_1}^{j-1} l_{ik_1} u_{k_1 j}, \quad i \geq j, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 \text{si } j &= 1 \implies l_{i1} = a_{i1} \\
 u_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k_1}^{i-1} l_{ik_1} u_{k_1 j}}{l_{ii}}, \quad i > j, \quad j = 2, 3, \dots, n \\
 \text{si } i &= 1 \implies u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}.
 \end{aligned} \tag{184}$$

Como  $L$  es un registro de todas las operaciones que deben aplicarse a  $A$  para obtener  $U$ , entonces al aplicar  $L$  al vector  $\mathbf{b}$ , se obtiene el nuevo vector  $\mathbf{b}'$ . Después  $\mathbf{b}'$  se aumenta a la matriz  $U$  y se encuentran las coordenadas del vector solución. Las ecuaciones a las que se reduce aplicar  $L$  a  $\mathbf{b}$  son

$$\begin{aligned}
 b'_i &= \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} b'_k}{l_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n \\
 b'_1 &= \frac{b_1}{l_{11}}.
 \end{aligned} \tag{185}$$

Por otro lado, los métodos indirectos resuelven los mismos sistemas de ecuaciones de los métodos directos pero de forma más eficiente, sobre todo si el sistema a resolver es poroso; con muchos ceros como coeficientes. Economizan memoria de almacenamiento y sirven también para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Ahora se hará una breve descripción de los métodos indirectos enlistados en la tabla.

Jacobi: En primer lugar, se acomodan las filas para que en la diagonal del a matriz ampliada queden los elementos de mayor amplitud. Después se despeja de cada renglón la incógnita, dejando ecuaciones del tipo

$$x^{n+1} = b - Ax^n. \tag{186}$$

La solución se encuentra a partir de un vector solución inicial que será sustituido en cada una de las iteraciones

$$x_i^{n+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (187)$$

Para que este método converja, la condición suficiente es que el valor absoluto de cada término en la diagonal sea mayor que la suma de los elementos del mismo renglón.

Gauss-Seidel: Es similar al método de Jacobi pero para calcular las  $x_i^{n+1}$  se utiliza una fórmula que converge más rápido,

$$x_i^{n+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (188)$$

Relajación: Converge aún más rápido que Gauss-Seidel pero es difícil de programar. Es importante para la historia de la computación pues fue el que introdujo la idea de reducir el error durante el proceso iterativo. En este método, en cada fila se colocan todos los términos del lado izquierdo, igualándolos con cero. Después se divide cada ecuación entre su coeficiente (en valor absoluto) más grande y se multiplica por  $-1$ , dejando una variable de magnitud unitaria en cada fila. Se elige una solución inicial y se evalúa en cada fila. Dado que es el primer intento, muchos de los resultados serán diferentes de cero. A estos valores se les llama residuo  $R$ . El programa hará a continuación un ajuste en la variable cuya ecuación tenga el mayor residuo, buscando que el residuo se relaje; que sea cero. La incógnita ahora valdrá  $R$ , y al evaluarse la ecuación, ésta será igual a cero.

Sobrerelajación: Se trata de la relajación interativa del método de Gauss-Seidel. El método parte de la ecuación (188) de Gauss-Seidel pero se incluye

una parte que incrementa el residuo para relajarlo a cero.

Los métodos siguientes en la tabla (1) tiene la particularidad de ser también útiles para resolver sistemas moderadamente no lineales: funciones  $g(x)$  suaves con solución única y con un mínimo, un máximo y un punto de inflexión no múltiples. Para resolver un problema no lineal, lo primero que se debe hacer es linealizarlo. Como se ha hecho anteriormente, se continuará con las descripciones breves de cada método

Newton: Trunca la expansión de Taylor como se ve a continuación

$$g(x^{k+1}) \approx g(x^k) + g'(x^k)(x^{k+1} - x^k). \quad (189)$$

Si se iguala a cero se obtiene la expresión

$$g'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -g(x^k) \implies x^{k+1} = x^k - \frac{g(x^k)}{g'(x^k)} \quad (190)$$

Para el caso de  $n$  dimensiones, la solución se puede expresar usando una matriz Jacobiana que tiene las derivadas de las ecuaciones del sistema con respecto a los parámetros o incógnitas del problema.

$$J(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -g(x^k). \quad (191)$$

Newton modificado: En algunos casos, encontrar las derivadas contenidas en  $J$  puede ser computacionalmente pesado. Por lo tanto, en este método se fija el jacobiano para evaluar en su matriz solamente el valor  $x^0$ , modificando la ecuación (191) a

$$J^0(x^{k+1} - x^k) = -g(x^k). \quad (192)$$

Este método converge lentamente pues, si se analiza de manera geométrica, emplea tangentes paralelas en lugar de actualizarlas en cada aproximación

y puede diverger dada la posibilidad de un cambio abrupto en las funciones de  $J$ .

Quasi-Newton: Actualiza la información de  $J$  con cada iteración. Se calcula el cambio en  $J$  a partir del desplazamiento anterior; con  $\Delta x = x^1 - x^0$  y  $\Delta g = g(x^1) - g(x^0)$ . La matriz tras el desplazamiento  $J^1$  satisface entonces la función  $J^1 \Delta x = \Delta g$  y se calcula como

$$J^1 = J^0 + \frac{(\Delta g - J^0 \Delta x)(\Delta x)^T}{(\Delta x)^T (\Delta x)}. \quad (193)$$

El método es más [computacionalmente] costoso que Newton modificado pero tiene menor riesgo a no converger.

Máxima pendiente o steepest descent: Partiendo del método de Newton, se convierte la matriz Jacobiana en un múltiplo de la matriz identidad  $I/\alpha$ ,  $\alpha \in \Re$ . Este es otro método para minimizar funciones, como lo es minimizar el error. Incrementa las incógnitas hacia donde la función objetivo decrece más rápidamente. Si se busca minimizar  $P(x_i)$ , la relación de recurrencia mediante la cual procede el método es

$$\Delta x = -\alpha g(x^k) \Rightarrow x^{k+1} = x^k - \alpha g(x^k), \quad g(x^i) = \nabla P(x^i) = \frac{\partial P}{\partial x^i}. \quad (194)$$

Aunque en cada iteración la solución mejora, si el tiempo es finito puede no alcanzar una solución mínima pues la dirección de la máxima pendiente no es siempre la mejor para hallarla.

Gradiente conjugado: Uno de los métodos más usados porque forma parte de un subgrupo de métodos que supone que la función objetivo es perfectamente cuadrática en cada punto. Lo anterior le permite elegir un vector de direcciones de convergencia  $d(x^k)$  mejor que cuando las direcciones

las indica el gradiente de la función. En el caso de gradiente conjugado,  $d(x^k) = -g(x^k) + \beta d(x^{k-1})$ . Beta se define como

$$\beta = \frac{g_k^T(g_k - g_{k-1})}{g_{k-1}^T g_{k-1}}. \quad (195)$$

Beta es importante porque, en el caso lineal que  $g = Ax - b$ , la nueva dirección  $d(x^k)$  es A-ortogonal [ $d(x^k)^T A d(x^{k-1}) = 0$ ]. Esto garantiza que la solución exacta se alcance en  $n$  iteraciones. La operación que define la método de gradiente conjugado se ve como

$$x^{k+1} = x^k - \alpha d(x^k). \quad (196)$$

[9].

### 5.3.2 Modelado de funciones de receptor con métodos locales

La primera aproximación para resolver la estructura debajo de las estaciones sísmicas usando funciones de receptor fue con métodos de búsqueda local [28], [36], [2]. Como el cálculo de una función de receptor sintética, según Ammon, es altamente no lineal, para encontrar la solución se debería comenzar la búsqueda con parámetros iniciales muy cercanos a la solución "real" [9].

En las décadas del 1950 y 1960, se construían modelos de velocidades y profundidades a partir de estimaciones por segmentos de recta dispuestos empíricamente sobre curvas que relacionaban distancias y tiempos de arribo. Esto porque no se tenía acceso a computadores que permitieran análisis más preciso. Estos modelos, conocidos como "pastel de capas" por su estructura escalonada como se ve en la figura (23), eran muy imprecisos

porque una pequeña variación en los ajustes se traduce en una gran variación en el modelo [43].

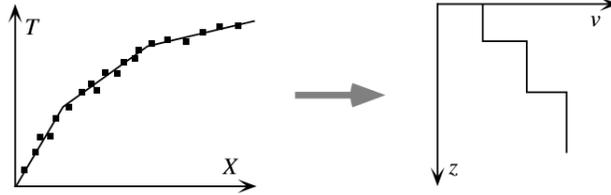


Figura 23: Modelo de velocidades y profundidades calculado a base de tiempos de arribo y distancias epicentrales [43].

En el trabajo de Owens y compañía de 1984 se plantea partir de una expansión de Taylor truncada igual a la ecuación (189). Después, minimizar la diferencia entre la función de receptor observada y la sintética  $dR_i$

$$dR_i = R_i^{obs} - R_i(p_k) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial R_i}{\partial p_k} dp_k, \quad (197)$$

donde la función de receptor sintética es  $R_i(p_k)$ ,  $i$  es el subíndice relacionado a la muestra en el dominio del tiempo,  $p_k$  los parámetros iniciales del modelo y  $R_i^{obs}$  la función de receptor radial observada. Por lo tanto, los parámetros  $p_k$  son corregidos cada iteración por el incremento  $dp_k$  hasta satisfacer algún criterio de convergencia.

Ya que el problema de las funciones de receptor está descrito por una gran cantidad de parámetros y es altamente no lineal, esta primera aproximación evolucionó. Ammon, Randall y Zandt propusieron en 1990 una técnica en la cual se parametriza la velocidad  $S$  para una cierta cantidad de capas constantes (dado el problema del múltiple e incluso infinito ajuste posible) que se hace también a partir de una serie de Taylor truncada. Si el problema directo está dado por los datos  $d_i$  como resultado de la funcional

$F_j$  aplicada sobre los parámetros  $m$  del modelo

$$d_j = F_j(m), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (198)$$

entonces su aproximación queda como

$$F_j(m) \approx F_j(m_0) + D \cdot \delta m \quad \Rightarrow \quad D \cdot \delta m \approx F_j(m) - F_j(m_0), \quad (199)$$

en donde  $D$  es la matriz de las derivadas de  $F$  en  $m_0$ , y  $\delta m$  es el vector de correcciones. Si se suma a ambos lados de la ecuación el producto interno entre  $D$  y  $m_0$

$$(D \cdot m)_j \approx d_j - F_j(m_0) + (D \cdot m_0)_j, \quad (200)$$

entonces se resuelve para los parámetros  $m$  del modelo y no para  $\delta m$ . Cuando esta ecuación fue introducida por Shaw y Orcutt y por Constable et al., se agregó una condición de simplicidad. Así, la inversión del modelo se restringe empleando una norma de suavidad construida de tal forma que no se eliminan las discontinuidades de primer orden pero sí hay un suavizamiento general de la función. El método utilizado echa mano de las segundas diferencias de los parámetros para diferentes modelos de prueba. La ecuación (200) queda como

$$\begin{pmatrix} D \\ \sigma \Delta \end{pmatrix} m \approx \begin{pmatrix} r = d_j - F_j(m_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Dm_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (201)$$

donde  $\Delta$  contiene las segundas diferencias de  $m$  y  $\sigma$  es un parámetro que controla el sacrificio del ajuste de las formas de onda en favor de la suavidad [9]. La ventaja de tratar de suavizar un modelo es que todas los cambios de estructura que aparecen como resultado del proceso son reales, pues el modelo intentó eliminarlos [43]. En 1997 se hace otro intento con métodos lineales ampliando la ecuación anterior con más restricciones, ahora relacionadas

con los valores observados de velocidades superficiales. La condición está contenida en la nueva matriz  $F$ , formada por las derivadas parciales de la velocidad de fase de las ondas superficiales

$$\begin{pmatrix} D \\ \sigma\Delta \\ F \end{pmatrix} m \approx \begin{pmatrix} r_r \\ 0 \\ r_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Dm_0 \\ 0 \\ Fm_0 \end{pmatrix}, \quad (202)$$

en donde  $r_r$  es la función de receptor y  $r_c$  el residuo de las velocidades de fase.

A pesar de su creciente sofisticación, los métodos locales para estudiar las funciones de receptor conservan la desventaja de la parametrización inicial; se mueven muy posiblemente hacia el mínimo local más cercano [9]. Es por eso que el estudio de las funciones de receptor requieren un método global para su modelado.

#### 5.4 Métodos de inversión heurísticos

La ventaja de estos métodos es que aunque la solución final se encuentre alejada de la solución inicial, éstos se mueven hasta encontrarla. En las secciones anteriores se ha hablado de dos características por las cuales los métodos locales se aproximan a mínimos cercanos, las cuales las "atrapan" en mínimos próximos a su comienzo de búsqueda. La primera es la inversión de la matriz  $A$  expuesta en el método de mínimos cuadrados, y el segundo es el gradiente de la función, como en el caso de máxima pendiente o gradiente conjugado. El problema de ambas es que emplean pocos datos para decidir hacia dónde se moverán.

En contraste, los métodos de búsqueda global examinan todo el dominio de soluciones empleando procesos estocásticos y heurísticos en la búsqueda del mínimo global.

El espacio de soluciones explorado por estos métodos tiene tantas dimensiones como parámetros tenga el modelo. Cada uno de los parámetros puede variar libremente entre ciertos valores predefinidos según el problema. Estos límites acotan el espacio  $n$ -dimensional [de  $n$  parámetros]. El proceso de inversión en este problema se reduce a la búsqueda del valor máximo de la función de costo. La función de costo o función objetivo define el ajuste entre los datos observados y los datos sintéticos [9], que dice cuán bueno es un sistema de parámetros para describir los datos [24]. En un caso bidimensional, la función de costo describe una superficie como la que se ve en la imagen (24). Cada punto en el plano corresponde a un valor determinado de cada uno de los parámetros; es un modelo determinado. Como la función tiene dos máximos, es claro que con un método local que tenga como solución inicial un valor cercano al máximo secundario, su solución será una solución parcial del problema. En cambio, si se encuentra el máximo global de la función se puede decir que se optimizó el problema inverso.

A pesar de que un método local se desplace sobre la superficie hacia un máximo de la función objetivo, métodos como el de Steepest Descent se desplazan solamente en la dirección en que mejora la función de costo. Si el máximo se encontrase muy cerca pero hubiera en su trayectoria un modelo que "empeore" la función de costo, el método local sería incapaz de seguir avanzando directamente hacia la solución adecuada [9].

Los métodos globales se dividen en dos sub-categorías: la que de-

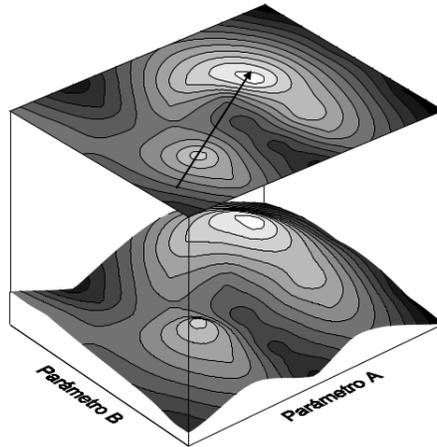


Figura 24: Función de costo definida para un sistema de dos parámetros que contiene una máximo parcial y uno global [9].

scompone el problema en problemas menores, los resuelve y luego los une, y la que encuentra la solución de forma iterativa. En los párrafos siguientes se expondrán las características principales de tres métodos globales de inversión: Monte Carlo, Algoritmos genéticos y Cristalización simulada. Cristalización Simulada y Algoritmos Genéticos son métodos que se diferencian de Monte Carlo porque toman en cuenta las configuraciones del sistema que se van obteniendo para decidir sobre hacia dónde evoluciona el sistema, lo que los cataloga en la clase de métodos globales iterativos [24].

Monte Carlo: Realiza una búsqueda aleatoria no direccionada, y evalúa la función objetivo en estos puntos aleatorios del espacio de soluciones hasta encontrar un modelo que satisfaga un cierto criterio de convergencia.

Algoritmos genéticos o Genetic Algorithms: Se inspira en la evolución biológica de las especies. El método expresa a través de cadenas binarias los modelos,

las cuales representan el "código genético" de cada modelo. Estas cadenas se modifican siguiendo tres procesos evolutivos: selección [natural], cruza y mutación. La selección consiste en elegir valores para las variables por medio de su probabilidad de ser elegidos. La cruza consiste en formar parejas de modelos, partarlos en un bit aleatoriamente definido e intercambiar entre ambos modelos una de sus mitades. La mutación se realiza cambiando un cero por un uno, o viceversa, del código genético de un porcentaje de modelos de la población. Un problema que puede presentar este algoritmo es la convergencia prematura si la población se homogeneiza alrededor de una solución parcial (i.e., un máximo local de la función de costo) de tal forma que ni la mutación ni la cruza provean variación suficiente para salir de la zona.

Cristalización simulada o Simulated Annealing: Está inspirado en la mecánica estadística detrás de cristalización. Esta habla de un sistema en que la temperatura es el indicador del orden estructural y de la energía de las partículas. Así, el enfriamiento paulatino del material permite que la materia alcance su estado de energía mínima y de máximo orden, en que las moléculas cristalizan. Ya que este es el algoritmo que se utiliza en este trabajo para resolver el problema inverso de funciones de receptor, a continuación se profundiza la explicación [9].

#### **5.4.1 Cristalización simulada**

Este método heurístico de optimización se inspira en la cristalización de una sustancia inorgánica. Cuando un sólido se calienta más allá de su punto de fusión, los átomos se encuentran completamente desordenados.

El parámetro del que dependen tanto la energía total como el orden microscópico de la sustancia es su temperatura. Si ésta aumenta, el desorden y la energía aumentan, y ambas descienden si la temperatura baja. Un requisito para que una sustancia se convierta en un cristal es que el decremento en la temperatura sea lento, dando tiempo a las moléculas de ordenarse geoméricamente.

La cristalización es el proceso opuesto a la disociación. Durante la disociación, si en una solución un soluto sólido se empieza a disolver, aumenta su probabilidad de chocar con su análogo aún sólido y volverse a unir a él. Por lo tanto, en una solución que hay un soluto no disuelto se dan al mismo tiempo la disolución y la cristalización [6].

Si se trata de una solución saturada, aunque se agregue más soluto ya no será posible disolverlo. Sin embargo, como a una mayor temperatura hay una mayor solubilidad, se puede tener una solución saturada a una cierta temperatura y después bajar la temperatura lentamente. En este caso especial, el soluto permanecerá disuelto de manera sobresaturada pero inestable. Para que haya cristalización, las moléculas o iones deben ordenarse en forma cristalina. Si se agrega un pequeño cristal del soluto, llamado cristal semilla, la sustancia se vuelve una disolución saturada con un sólido en exceso en la que iniciará entonces la cristalización de la sustancia disuelta [6].

En 1953, Metropolis et al. [34] introdujeron ideas de la mecánica estadística a la computación con las que se puede simular la configuración atómica de un sistema a una temperatura dada. En este algoritmo se consideran diferentes soluciones para el problema de minimización de la energía del sistema y se determina la mejor configuración de todos sus componentes

involucrando conceptos probabilísticos para no caer en soluciones parciales. En 1983 Kirkpatrick et al. realizan la primera adecuación del algoritmo de Metrópolis et al. La interpretación que estos científicos le dan es la simulación de la cristalización de los parámetros que determinan un problema de optimización. Tras esta publicación, la Cristalización simulada ha sido usada en muchos campos de investigación. En geofísica ha sido utilizado en optimización para problemas de reflexión (Landa et al. 1989), inversión de perfil sísmico vertical (Basu y Frazer 1990), inversión de formas de ondas sísmicas (Sen y Stoffa 1991), inversión de datos apilados (Vestergaard y Mosegaard 1991), inversión de sismogramas de incidencia normal (Scales et al. 1992), tomografía de transmisión (Ammon y Vidale 1993), tomografía de formas de onda [1], evaluación magnetoteléurica (Dosso y Oldenburg 1991), gravimetría [48] y otros trabajos [42].

La mecánica estadística es fundamental para entender el proceder de este algoritmo. Se trata de una rama de la física que vincula las propiedades microscópicas de un grupo de partículas con sus propiedades macroscópicas [5]. Ya que en un centímetro cúbico hay alrededor de  $10^{23}$  átomos, en equilibrio térmico, será observado el comportamiento más probable del sistema. Esto se puede caracterizar por el valor promedio de los estados de cada átomo y por pequeñas fluctuaciones alrededor del mismo [24]. Si la configuración espacial del sistema está dada por la posición  $r_i$  de cada partícula, a altas temperaturas la probabilidad de que un átomo tenga cierta posición está dada por la distribución de Boltzmann

$$P(r_i) = C_N e^{\frac{-E(r_i)}{k_B T}}, \quad (203)$$

donde  $C_N$  es una constante de normalización,  $E(r_i)$  es la energía de la

partícula  $i$ -ésima,  $k_B$  es la constante de Boltzmann, que vale  $1.38 \times 10^{23} \frac{J}{K}$ , y  $T$  es la temperatura. Cuando la temperatura desciende esto se acompaña con una disminución de la energía hasta llegar al valor de su estado base [9]. Los estados base y sus configuraciones cercanas son muy poco comunes entre todas las configuraciones posibles de un cuerpo macroscópico.

Para lograr la cristalización no es solamente necesario el descenso de  $T$  sino que el proceso deje que el sistema pase bastante tiempo alrededor de la temperatura de solidificación; no habrá un cristal si la reducción de la temperatura es rápida.

Para vincular lo anterior con los métodos globales de optimización, se puede ver que la estructura molecular del estado base de un sistema como función de su energía es un problema de optimización. La estructura molecular tiene una fácil analogía, mientras que la temperatura y la energía no. En el algoritmo de Metrópolis et al., el símil computacional del proceso se hace desplazando en cada paso un átomo una distancia pequeña y aleatoria. Dicho desplazamiento provoca un cambio en la energía total del sistema. Si el cambio en la energía es menor o igual a cero, el desplazamiento del átomo es aceptado y la nueva configuración es tomada como configuración inicial. Si  $\Delta E$  es mayor a cero, la probabilidad con que será o no aceptado el desplazamiento está determinada por la ecuación

$$P(\Delta E) = e^{\frac{-\Delta E}{k_B T}}, \quad (204)$$

que es muy parecida a la fórmula de la distribución de Boltzmann. Esta fórmula se compara con un número aleatorio entre cero y uno. Si el número aleatorio es menor que la probabilidad, entonces el desplazamiento es aceptado y se toma como nueva configuración inicial. Si es mayor, entonces se

rechaza el desplazamiento y se vuelve a la configuración previa.

Todo lo anterior simula el movimiento atómico en un sistema a temperatura constante: los átomos representan los parámetros del modelo y la energía representa la función de costo. La temperatura es solamente un parámetro en las mismas unidades que  $\Delta E$  [24] encargado de controlar la forma de la distribución de Boltzmann y por lo tanto los modelos aceptados o no en el proceso de optimización. La imagen (25) muestra el cambio en el perfil de la función (204) a diferentes temperaturas [9]. En este proceso, siempre habrá una posibilidad de salir de máximos locales mientras la temperatura no sea cero, además de que se presenta como una adecuación de los métodos globales que descomponen el problema en problemas menores, si se considera cada temperatura como un problema menor a una diferente escala [24]. Para alcanzar el estado base, la temperatura se debe disminuir de forma lenta para que el sistema esté en una sucesión de estados muy cercanos al equilibrio térmico. Si el proceso se termina, se puede decir que es más probable que los valores de los parámetros determinados durante el proceso correspondan a los de una energía mínima [9].

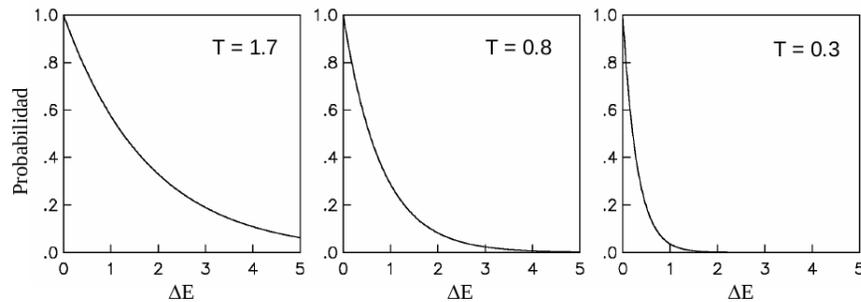


Figura 25: Perfil de la distribución utilizada para aceptar a rechazar desplazamientos que aumentan  $\Delta E$  para distintas temperaturas [9].

Una diferencia que presenta el algoritmo computacional con la realidad es que en fluidos ideales, los átomos son muy parecidos por lo que los cristales se ordenan de forma geométrica. Dado que la naturaleza de los parámetros en un problema cualquiera de optimización es muy diversa, su posición no es intercambiable así que una solución regular es poco probable. Sin embargo, hay investigación dirigida hacia la física de estados condensados de manera aleatoria, más parecidos a la optimización que los cristales. Una de las áreas de oportunidad para mejorar el algoritmo de Cristalización simulada es estudiar la propiedad de "frustración" de estos materiales, en el que se favorecen al mismo tiempo dos configuraciones que llevan a un orden muy distinto e incompatible. Estudiando estos sistemas es posible que se lleguen a resolver los problemas a los que uno se enfrenta usando este programa [24].

Uno de los mayores problemas a los que se enfrenta el algoritmo de Cristalización simulada se relaciona con la escala a la que disminuye la temperatura. Es cierto que debe ser lento, así que un exceso de tiempo de cómputo es común. Se pueden definir diferentes formas de disminuir  $T$ : multiplicando por una constante, decreciendo en valores cada vez más cercanos entre sí, usando una escala logarítmica o una división. Cada una de las opciones tiene sus particularidades y ventajas. Este tema ha impulsado también a buscar otras maneras de optimizar su funcionamiento bajo un tiempo de cómputo definido, como la optimización de los decrementos en las temperaturas y la paralelización del problema. El tema sigue en investigación y está abierto a muchas posibilidades [4].

El algoritmo computacional implementado en este trabajo está for-

mado por tres ciclos anidados. El ciclo externo controla la temperatura. Cada vez que concluye una vuelta, la temperatura disminuye un factor  $0 < RT < 1$  a determinar por el usuario, que normalmente es cercano a 1 para que el descenso de la temperatura sea paulatino.

El ciclo intermedio actualiza los valores de una serie de constantes  $VM_i$ , donde cada una es la máxima perturbación que puede sufrir el parámetro  $i$ -ésimo. El valor de estas constantes depende de la cantidad de veces que haya sido aceptado el modelo actual tras pasar por el ciclo interno. El presente ciclo tiene como objetivo equilibrar las veces que se acepta y que se rechaza una nueva configuración.

El ciclo interno es donde se perturban los parámetros multiplicando cada parámetro por el producto de su  $VM_i$  por un valor aleatorio entre menos uno y uno. Con el modelo actual se construye una función de receptor que se compara con los datos. Si el desajuste entre el modelo actual y los datos es menor que el desajuste de los datos al modelo anterior entonces el cambio de energía es negativo. Si el desajuste es mayor, entonces el cambio de energía es positivo. En el caso que haya un decremento energético,  $\Delta E$  tomará el valor del desajuste. Si hay un incremento energético, a la configuración del parámetro se le asigna una probabilidad de aceptación por medio de la ecuación (204) con el  $\Delta E$  de su desajuste y la temperatura del sistema en ese momento.

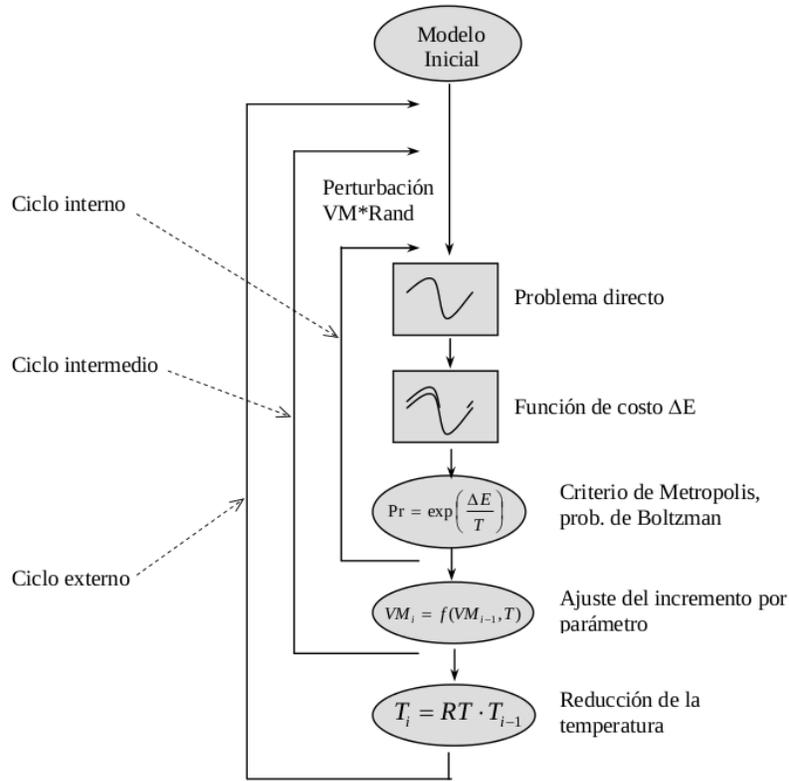


Figura 26: Diagrama de flujo que describe el algoritmo de Cristalización Simulada en términos del modelo [9].

Conforme la temperatura se vuelve más pequeña, las variaciones aleatorias en los parámetros tienden a ser menores. Así, si la búsqueda comienza en todo el espacio de soluciones, el descenso de la temperatura hace que comience a converger a zonas en las que se encuentran los mínimos. Al final del proceso se obtiene el valor de los parámetros para los cuales la función sintética tiene un error suficientemente pequeño con respecto a los datos [9].

## 6 Inversión de funciones de receptor en Guerrero, México

### 6.1 Introducción

En los capítulos anteriores de este escrito se explica cada una de los aspectos físicos, matemáticos y computacionales que intervienen en el desarrollo de este trabajo. En éste, se describirá el proceder de la aplicación de todo este conocimiento para analizar la estructura de la corteza terrestre en una zona de Guerrero, México.

Bajo la placa de Norteamérica, la placa de Cocos está en subducción a una velocidad promedio de 6 cm por año [39]. Como ya se dijo, dicha subducción es plana en la región de estudio, pues el rango que ocupan las estaciones sísmicas utilizadas está en una pequeña zona entre 120 y 200 km de distancia perpendicular a la costa. Al este o al oeste esta característica no prevalece [39]. Esta es una característica muy especial que corresponde solamente al 10% de los márgenes entre placas tectónicas [30]. Está delimitada al este por la frontera entre las placas de Rivera y de Cocos, y al oeste por el Istmo de Tehuantepec [12]. La presente configuración [plana] de la placa de Cocos se estima que inició hace entre 13 y 11 millones de años, sin deformación en la placa superior [30]. Evidencia de que en los últimos 20 millones de años no se ha formado ninguna estructura comprimida apoya la estimación anterior, por lo que parece que la placa tectónica está en extensión. Así mismo, Sdrolias y Müller reportan una estabilidad en el movimiento de la placa en subducción de 60 millones de años. [39]. Datos provenientes del sismo lento de 2001 sugieren un desacoplamiento

entre las dos placas [39] en esta zona pues no se han detectado sismos de magnitud mayor a 6 desde 1911, ocurriendo los mismos a una distancia inferior o igual a 20 km de la costa; a 80 km de la trinchera [31]. Entre la placa de Norteamérica y la de Cocos se ha reportado una presión de poro de 0.98 %. En la zona plana, desacoplada, las rocas son principalmente jadeíta ( $Na(Al, Fe^{3+})Si_2O_6$ ), lawsonita ( $CaAl_2(Si_2O_7)(OH)_2$ ) y esquisto azul [31] provenientes de la placa en subducción [30]. Estas tres diferentes rocas están relacionadas con una alta presión y un baja temperatura: entre  $250 - 450^\circ C$  y entre 0.6 y 1.3 GPa. Hay que mencionar que la presencia del esquisto sugiere un comportamiento dúctil. Además, a estas presiones y temperaturas los minerales se deshidratan, siendo liberado más del 2 por ciento del agua que contienen [31]. Hablando de sus características electromagnéticas, un estudio magnetotelúrico revela que en la zona hay una baja resistividad y alta conductividad, interpretadas como la presencia de fluidos o de un manto derretido [30]. Por otro lado, la región en que se hace este estudio está relacionada con una gran ocurrencia de tremores no volcánicos y sismos lentos [44], como se detalló en la introducción.

Conocer la estructura terrestre es útil, además de su importancia intrínseca, para ayudar a esclarecer la evolución tectónica de la zona, para estimar el movimiento terrestre producido por sismos futuros y para localizar el hipocentro de los temblores. La estructura de la corteza terrestre se ha estudiado desde 1961 [8], cobrando mayor importancia tras el evento del 19 de septiembre de 1985. En 1996 Campillo et al. [8] propusieron inicialmente un modelo de la estructura cortical entre la costa de Guerrero-Michoacán y la Ciudad de México a partir de la dispersión de ondas superficiales registradas en la estación sísmica GEOSCOPE, en la UNAM. Este modelo propone tres

capas sobre el semiespacio de velocidades  $S$  de 3.1, 3.3 y 3.7 m/sa profundidades 5, 17 y 45 km respectivamente, y una velocidad del manto de 4.7 m/s. Posteriormente, en 2002, Furumura y Singh construyeron un modelo de la estructura cortical a partir de eventos dentro de la corteza oceánica en subducción debajo de México con estaciones del Servicio Sismológico Nacional. Este modelo contempla siete capas entre las que se incluye una superficial correspondiente al cinturón volcánico transversal y tres inferiores que describen la placa de Cocos.

La zona de Guerrero que interesa a este trabajo ha sido revisada con mayor detalle a partir de la instalación del arreglo de estaciones sísmicas Meso-American Subduction Experiment (MASE), que estuvo operando de 2005 a 2007. Esto ha sido posible ya que la densidad de estaciones, de una estación por cada 6 km [32], permite resolver características de las capas corticales antes inobservables. Pérez Campos et al., en 2008, publicaron un estudio donde se propone por primera vez la presencia de una capa de baja velocidad entre la corteza oceánica y la continental. Utiliza eventos telesísmicos registrados en MASE que transformados en funciones de receptor muestran claramente la estructura de la corteza oceánica a lo largo de todo el arreglo. En este estudio, una capa de baja velocidad fue observada a partir del perfil de las funciones de receptor, y se estima de un espesor de  $10 \pm 3$  km de ancho. No se pudo resolver dicha capa adecuadamente dadas las frecuencias utilizadas en el estudio [39] ( $\lambda_{min} = V_p/\nu_{max}$ ). Song et al. (2009) sugieren también la capa de baja velocidad (USL) entre la corteza continental y la corteza oceánica a partir del perfil de conversión de ondas  $P$ , que además coincide con la zona en que ocurren temblores y sismos lentos. Según este artículo, que estudia 40 telesismos y dos eventos

intraplaca, existe una clara forma de onda que refleja dicha USL, confinada a una región inferior a 150 km entre la costa de Guerrero y la Ciudad de México. El estudio estima que la USL tiene una velocidad  $S$  de entre 2 y 2.7 km/s; de un 30 a un 54% menor que la velocidad de la corteza oceánica [44].

También con datos del arreglo MASE, Kim et al. en 2010 hacen un estudio telesísmico de la estructura cortical. Construyen funciones de receptor sintéticas con un modelo de diferencias finitas a partir de las cuales propone un modelo estructural para la zona entre la capa oceánica y la continental. Este trabajo propone dos capas de baja velocidad delgadas y sucesivas para explicar las amplitudes de las funciones de receptor. La capa de menor velocidad se establece en  $V_s = 2.6$  km/s, de 3 km de espesor y la inferior de 4.06 km/s y 5 km de espesor [22]. Finalmente, en 2014 Dougherty y Clayton publicaron un artículo que estudia la zona central sur del país mediante la modelación de formas de onda usando un algoritmo de diferencias finitas con telesismos de MASE, SSN y otros dos arreglos de estaciones en Oaxaca (VEOX y OXNET). En este estudio se generan funciones de receptor sintéticas de forma directa que se comparan con las formas de onda reales. El modelo de velocidades y espesores que reportan como más apegado a la realidad consiste en ocho capas de las cuales la USL tiene una  $V_s$  de 2.6 km/s y un espesor de alrededor de 2 km.

Por otro lado, la inversión por medio de Cristalización simulada ha sido ya aplicada a funciones de receptor en diferentes regiones del mundo para mapear la estructura de la corteza terrestre. Un ejemplo es el trabajo de Cruz Atienza et al. [11]. La técnica no ha sido utilizada aún para observar la estructura que se desea dilucidar en este trabajo. Con las motivaciones

que se exponen en la introducción, determinar con una mejor resolución la estructura de las capas terrestres bajo las estaciones seleccionadas impulsará el mejor entendimiento de los mecanismos mediante los cuales ahí interactúan la placa de Norte América y la placa de Cocos.

Las estaciones con las que se trabajó fueron seleccionadas por encontrarse dentro de la zona en que una capa de baja velocidad es posible de encontrar [44], [12]. La estación AMAC forma parte del arreglo G-GAP. Este proyecto franco-mexicano operó entre 2008 y 2012. Su objetivo fue comprender con mayor exactitud cómo opera la mecánica de zonas de periodicidad sísmica grande, como es la zona de Guerrero [16]. Las estaciones ATLI, SATA, SAGR, TOMA, TEPO y ZACA pertenecen al Servicio Sismológico Nacional (SSN).

Como se dijo anteriormente, la inversión de funciones de receptor es un problema altamente no lineal y de solución no única, en el que existe un acoplamiento entre profundidad y velocidad [9]. Es por eso que en este trabajo se han utilizado las investigaciones previas, restringiendo la búsqueda de soluciones a lo ya observado anteriormente. No significa comprometer los resultados para obtener lo mismo, sino tener un punto de partida sensato.

## 6.2 Los datos

Este trabajo se hizo con base en telesismos registrados por varias estaciones sísmicas de banda ancha en el estado de Guerrero. AMAC cuenta con un sismómetro (.033 a 50 Hz) GURLAP CMG-40 [17], Las estaciones ATLI, SAGR, SATA, TEPO, TOMA y ZACA cuentan con un sismómetros Quan-

terra STS-2 (0.01 a 30 Hz), un acelerómetro FBA-23 y un registrador Quanterra con digitizador de 24 bits [45]. Las estaciones con las cuales se trabajó pueden verse en la imagen (27).

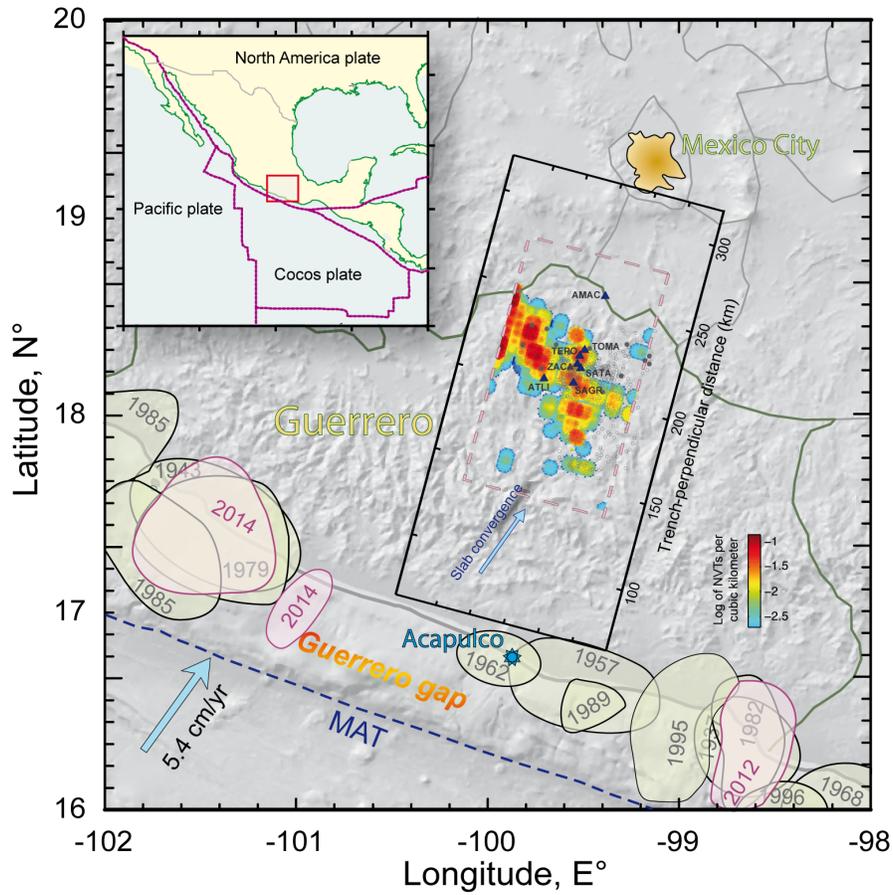


Figura 27: Mapa con las estaciones utilizadas en este trabajo y la densidad de tremores no volcánicos.

Los eventos utilizados poseen distancias epicentrales entre  $30^\circ$  y  $90^\circ$  [telesismos] y corresponden al periodo entre septiembre del 2009 y abril del 2011. La Dra. Pérez-Campos proveyó las funciones de receptor ya

calculadas en todas las estaciones, con  $a = 2.5$  para el filtro gaussiano. No se usó nivel de agua en la deconvolución ya que se realizó en el dominio del tiempo

El programa de selección forma grupos de eventos de cuatro diferentes Back-Azimuth. Por el ángulo que forman con la estación, su origen (y por lo tanto su nombre) puede ser Sudamérica, Fiji, Alaska o Atlántico. Se analizaron sólo las funciones provenientes de Sudamérica (i.e., Back-Azimuth entre  $115^\circ$  y  $190^\circ$  y distancia epicentral de  $48^\circ$  en promedio). En promedio, esto supone un ángulo de incidencia del frente de onda  $P$  de  $32^\circ$  en la base de la corteza.

Estos parámetros pueden considerarse comunes a todas las estaciones gracias a su cercanía. En la tabla siguiente se puede ver la clasificación de estos grupos de datos

Origen	$\Delta$	Back-Azimuth	Ángulo de incidencia
Sudamérica	$46^\circ$	$141^\circ$	$32^\circ$
Fiji	$87^\circ$	$245^\circ$	$19^\circ$
Alaska	$71^\circ$	$322^\circ$	$24^\circ$
Atlántico	$50^\circ$	$91^\circ$	$32^\circ$

Tabla 2: Características de los eventos telesísmicos analizados en este trabajo [9]. Sólo los provenientes de Sudamérica fueron invertidos para determinar la estructura de velocidades

### 6.3 Construcción de apilados y selección de los modelos solución

La selección de los datos se hace de forma automatizada. Para ello, con el fin de optimizar la coherencia de los registros, se aplica un filtro pasa-altas Butterworth de cuarto orden con frecuencia corte de 0.1 Hz, después se elige una función de receptor de referencia y, con base en ella, se seleccionan las funciones de receptor que se incluirán en el apilado. En la figura (28 a) se muestran apilados sucesivos (de abajo hacia arriba) en la estación ATLI sin aplicar el filtro. La figura (b) muestra las mismas funciones después de aplicar el filtro. Nótese cómo aumenta significativamente la coherencia entre los apilados (sin afectar las amplitudes absolutas) y por ende cómo la banda de error es más estrecha. Figuras similares para las otras estaciones se muestran en el anexo.

Para elegir la función de receptor de referencia, se utiliza un criterio basado en la semblanza, mismo que se define como

$$S = 0.5 - \frac{\max(\text{corr}(A, B))}{\max(\text{corr}(A, A)) + \max(\text{corr}(A, A))} \quad (205)$$

, donde  $\text{corr}(A, B)$  es la correlación cruzada entre las funciones de receptor A y B, y  $\text{corr}(A, A)$  es la autocorrelación de la función de receptor A. Si las funciones de receptor son idénticas, entonces S es igual a cero.

Dado un conjunto de funciones de receptor susceptibles a ser apiladas, la función de referencia será aquella que sea parecida a la mayor cantidad de funciones del conjunto. En otras palabras, dado un valor umbral de semblanza  $S_{max}$ , la función de referencia será aquella para la cual exista la mayor cantidad de funciones con las cuales su semblanza sea menor a  $S_{max}$ . Por ejemplo, la función de referencia determinada empleando esta

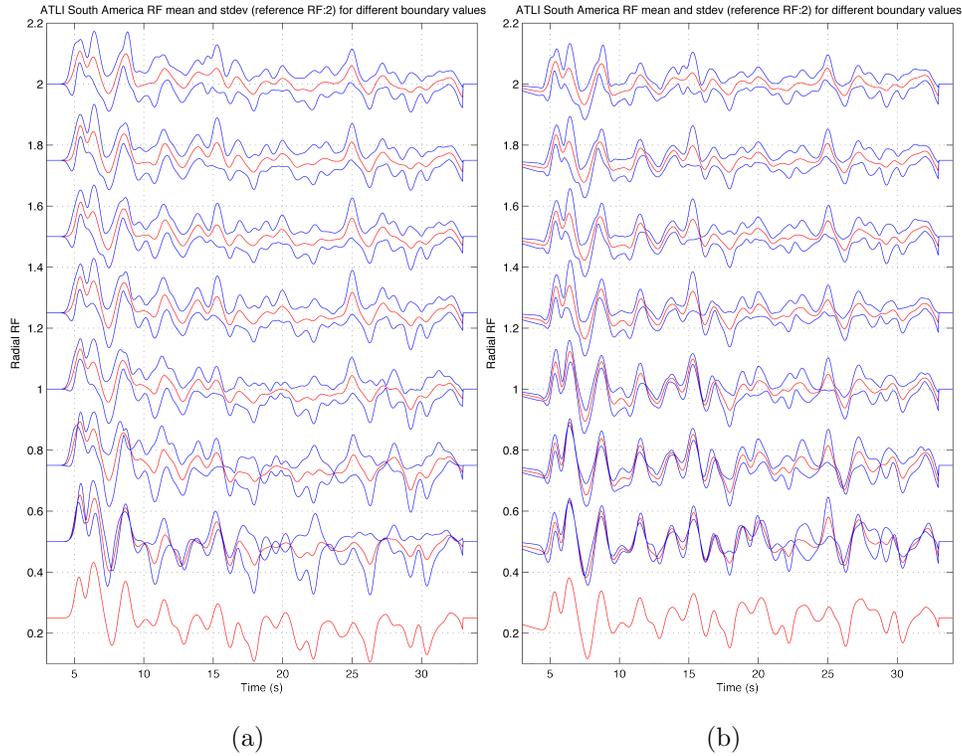


Figura 28: Incremento paulatino de número de funciones de receptor sin (a) y con (b) filtro para ATLI.

metodología para la estación ATLI se muestra en la parte baja de la figura (28 b).

Una vez identificada la función de referencia, el apilado se construye promediando dicha función con las  $n$  funciones con quienes la referencia tiene una  $S$  menor a un umbral. El umbral fue determinado con base en un criterio visual de la calidad del apilado y del ancho de la banda de error. Con base a la calidad de los apilados, cuatro estaciones fueron seleccionadas para su inversión: AMAC, ATLI, SATA y TOMA. En la tabla (3) se reporta

la cantidad total de funciones por estación (incluyendo las que no fueron invertidas) así como la cantidad de las que fueron seleccionadas por apilado.

A partir del apilado, se computa la desviación estándar asociada al promedio de cada punto temporal. Sumando y restando las desviaciones estándar al promedio, se define una banda de error en torno al apilado. Como se describirá más adelante, el área de la banda de error será empleado para determinar si un modelo debe ser retenido o no como solución del problema.

Estación	Funciones disponibles	Funciones apiladas
AMAC*	7	3
ATLI*	8	4
SAGR	5	-
SATA*	11	4
TEPO	7	-
TOMA*	6	4
ZACA	4	-

Tabla 3: Cantidad de eventos analizados y seleccionados para los apilados por estación. Sólo los eventos procedentes de Sudamérica y registrados en las estaciones marcadas con un asterisco fueron invertidos en este trabajo.

El procedimiento para seleccionar modelos durante el proceso de inversión de un apilado fue introducido por Cruz-Atienza et al. [11] y depende de qué tanto se parece la función de receptor sintética al apilado. Esto se logra empleando dos condiciones que deben cumplirse simultáneamente. La primera consiste en garantizar que la norma de error, que en este trabajo se nombra semblanza (ecuación (205)), entre la función de receptor sintética

y el apilado sea menor a un umbral establecido a la hora de invertir. La segunda, que dicha función esté acotada por la banda descrita por la desviación estándar en torno al apilado. Para cuantificar lo último, se compara el área contenida en la banda (Ab), con el área descrita por la función sintética por afuera de la banda (Ae) como se muestra en la figura (??). Si el cociente es menor a un umbral establecido, entonces la condición se cumple [11]. Se debe tomar en cuenta la limitación predictiva de los modelos, el ruido y la complejidad de los datos.

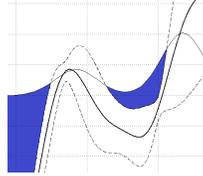


Figura 29: Sección de una función de receptor apilada, la banda de error en torno a ella (líneas discontinuas) y una función de receptor sintética. La superficie azul representa el área por afuera de la banda.

#### 6.4 Inversión de funciones de receptor

En la imagen (30) se muestran los apilados por estación ordenados de norte (arriba) a sur (abajo). El área de las bandas de error y los valores umbrales empleados para la selección de los modelos durante la inversión se muestra en la tabla (4).

Para invertir las funciones de receptor se utilizó el programa introducido por Cruz-Atienza et al. [11]. Este programa determina los espesores y las velocidades para las ondas  $S$  de un medio estratificado asumiendo un medio de propagación Poissoniano (i.e.,  $\nu = .25$ ) a excepción de las cua-

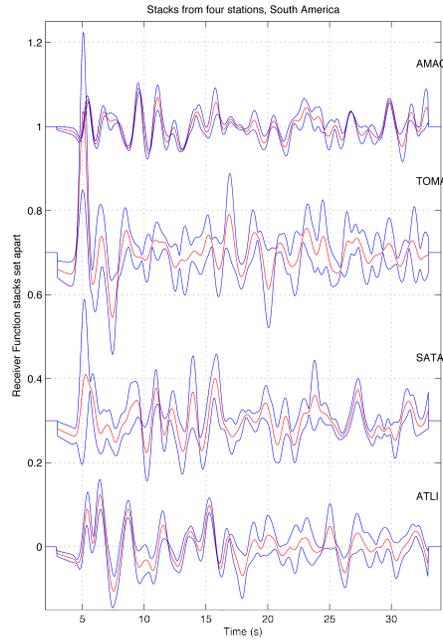


Figura 30: Apilados por estación ordenados de norte a sur según la posición geográfica de las estaciones (ver figura (27)).

Estación	Semblanza	Área de la banda de error
AMAC	.1508	16.63
ATLI	.2516	31.5
SATA	.3538	211.9
TOMA	.3153	269.78

Tabla 4: Tabla con los valores de los dos criterios utilizados para seleccionar modelos durante la inversión para cada estación.

tro capas más profundas, donde también se invirtió la relación de Poisson. Inicialmente, la parametrización para las inversiones se hizo igual para todas las estaciones, para ver si comparten la estructura cortical o hasta qué

grado se parecen. La parametrización está basada en modelos estructurales para la región introducidos por Campillo et al. [8] y Furumura y Singh [15]. Asimismo, se consideró lo propuesto por Song et al. [44], Kim et al. [22] y Dougherty y Clayton [12] referente a la presencia de una zona de baja velocidad por debajo del Moho continental. La parametrización final por estación es el resultado del ensayo y error resolviendo múltiples veces el problema directo.

Las figuras en las que se muestran los resultados de las inversiones están compuestas de la siguiente manera: en el p nel superior se compara el apilado (rojo) y su banda de error (azul) con la función de receptor sintética del mejor modelo (negro). En el p nel inferior izquierdo se muestra el rango de variación de los parámetros invertidos (líneas discontinuas), el conjunto de modelos solución (azul cielo) y la estructura de velocidad del mejor modelo (línea negra). Finalmente, en el p nel inferior derecho se muestran los valores de la relación de Poisson del mejor modelo para las cuatro capas más profundas.

En las imágenes (31), (32) y (33) se muestran los resultados de las inversiones en ATLI, AMAC y SATA, respectivamente. A pesar de haber diferencias notables entre los tres apilados, sus inversiones revelan ciertas similitudes en los modelos determinados en cada sitio. Por ejemplo, nótese la consistencia de la fase positiva convertida en la base de la capa más superficial, con arribo entre 1 y 2 s después de la onda  $P$  (a 3 km de profundidad), en dos de los tres sitios (ATLI y SATA). Aproximadamente 5 s después del arribo de la onda  $P$ , en los tres sitios se encuentra una fase negativa prominente, posiblemente asociada a la existencia de una capa de baja velocidad

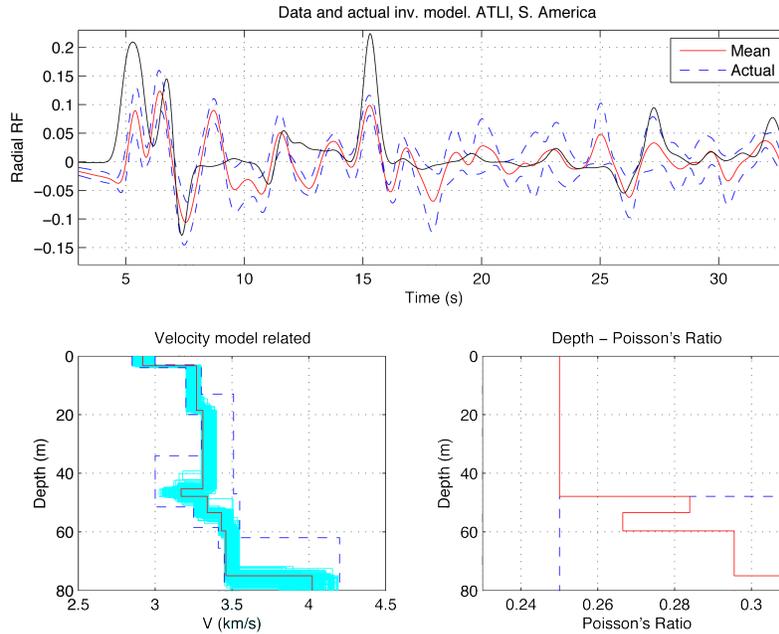


Figura 31: Inversión en ATLI: función de receptor con apilado, modelo cortical de velocidades y módulo de Poisson.

en la base de la corteza continental. Por su polaridad, esta fase debe surgir de la conversión de la onda  $P$  en el techo de dicha capa (aproximadamente entre 40 y 45 km de profundidad). De la misma manera, las fases positivas con tiempo de arribo de 7 s después de  $P$  podrían corresponder a la conversión en la base de esta capa. Análogamente, las fases positivas alrededor de 10 s después de la  $P$  podrían surgir de la base de la litósfera (profundidades mayores a 70 km). Arribos más tardíos, entre 20 y 22 s después de la  $P$  directa, en donde se ve una fase negativa seguida de una positiva, corresponden a múltiples reflejados en la superficie de la Tierra y en las interfaces que acotan la capa de baja velocidad de la base de la corteza. Sus amplitudes dependen del gradiente de velocidad debajo de dicha capa.

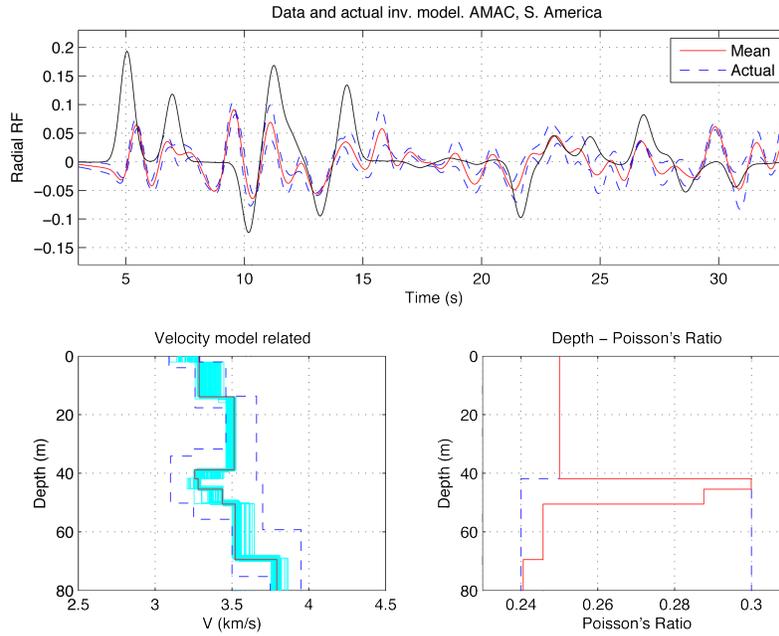


Figura 32: Inversión en AMAC: función de receptor con apilado, modelo cortical de velocidades y módulo de Poisson.

Los valores remarcablemente altos del módulo de Poisson en las capas más profundas por abajo de la corteza continental fueron necesarios para mejorar significativamente los ajustes.

Los ajustes obtenidos hasta el momento demuestran que la parametrización considerada necesitaría incluir más capas para poder explicar arribos presentes en las funciones observadas. Véase, por ejemplo, arribos alrededor de 4, 7.5, 12.5 y 20 s después de la onda  $P$  en ATLI.

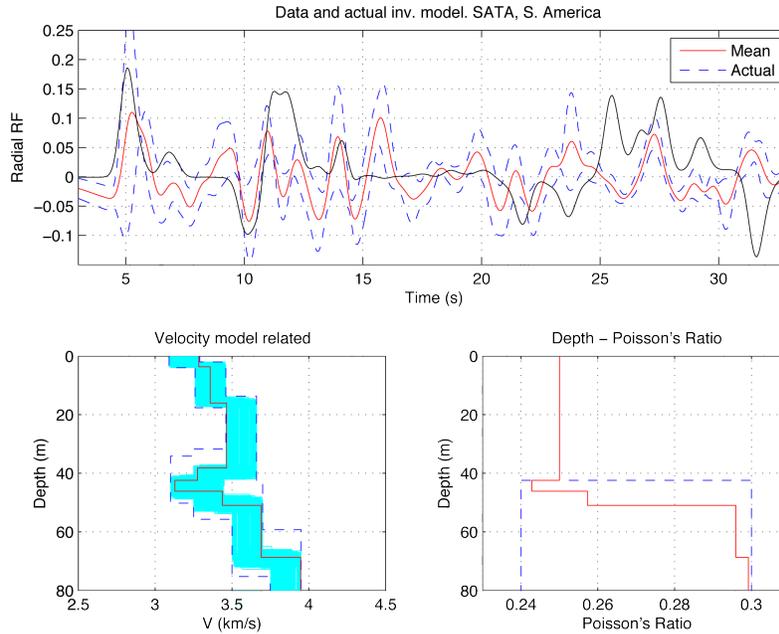


Figura 33: Inversión en SATA: función de receptor con apilado, modelo cortical de velocidades y módulo de Poisson.

## 7 Conclusiones

En este trabajo se analizó una gran cantidad de funciones de receptor en 7 estaciones localizadas en la región del Sweet Spot en el estado de Guerrero. Esta región es de gran interés geofísico por la abundancia de tremores tectónicos generados en la base de la corteza continental. Se introdujo una metodología para mejorar significativamente la calidad de los apilados de funciones de receptor. Esta metodología permite identificar automáticamente, para cada grupo de eventos telesísmicos, una función de receptor de referencia empleando un filtro pasa-altas a 0.1 Hz y un criterio de semblanza entre las funciones. La inversión de estas funciones de receptor

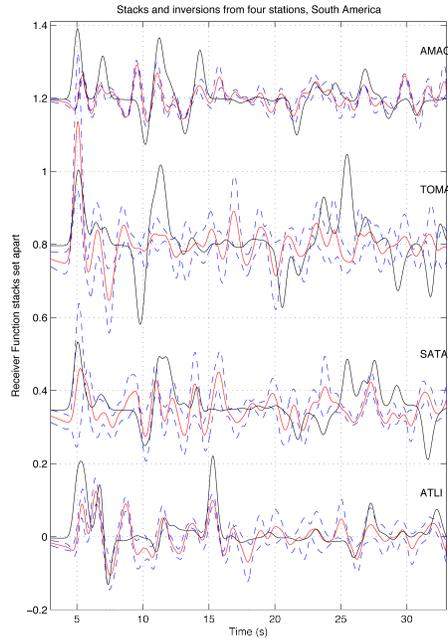


Figura 34: Apilados y mejores modelos de la inversión para cada estación. El superior corresponde a la estación más al norte y los inferiores a estaciones cada vez más al sur

se llevó a cabo empleando el método de Cristalización Simulada adaptado al sistema de referencia longitudinal (paralelo al rayo de la onda  $P$  directa) y transversal de las funciones de receptor observadas.

La estructura de velocidad determinada en la zona de interés sugiere la presencia de una zona de baja velocidad por debajo de la corteza continental. Asimismo, que las capas más profundas poseen un módulo de Poisson más elevado que el asumido en la corteza continental. Estos resultados son consecuentes con varios modelos regionales propuestos por otros autores [39], [44], [22], [12]. El contenido espectral de las funciones de receptor es alto (periodos mayores a cerca de 2 Hz). Por esta razón,

la parametrización explorada resulta insuficiente para explicar varias fases prominentes en las observaciones. Una mayor cantidad de capas en nuestro modelo parece necesaria para identificar posibles variaciones locales de la estructura en la región de estudio. Sin embargo, los resultados obtenidos en este estudio preliminar admiten la hipótesis propuesta por varios autores, e.g. [3] y [38] de la existencia de fluidos sobrepresurizados en la parte superior de la corteza oceánica.

A pesar de que los alcances de este trabajo no permitieron resolver como se hubiera deseado la estructura profunda en la región del Sweet Spot, esta investigación representa el primer esfuerzo por lograrlo invirtiendo funciones de receptor.

Dentro de las perspectivas que se pretenden abordar en un futuro cercano, además de las mejoras mencionadas en la parametrización del modelo, se encuentra el análisis de otros grupos azimutales telesísmicos como el de Fiji y el del Atlántico. Además, se realizará un análisis multi-escala de las funciones de receptor, el cual supone un incremento paulatino en el ancho de banda contenido en las observaciones. Finalmente, existen modificaciones del método de optimización que podrían mejorar su desempeño, como lo es la paralelización del proceso de cristalización para explorar de forma más eficiente el espacio de soluciones.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido para mi el trabajo académico más interesante, cautivador, motivador e intenso de mis cortos 22 años. Estas líneas se quedarán cortas hablando de quienes contribuyeron a que así fuera, trataré de ser concreta.

En primer lugar, quisiera agradecer a mi asesor, Víctor Manuel Cruz Atienza, por el enorme apoyo conceptual, la paciencia, la apertura y sobre todo, por contagiarme de su entusiasmo por la sismología. Me aportó todo lo que estaba en sus manos para crecer como estudiante, fue para mí un honor sentarme trabajar a su lado. De verdad, muchas gracias.

En segundo lugar, quiero reconocer que el Departamento de Sismología en la UNAM entero fue una bellísima sorpresa. Ir una vez a la semana fue para mi un gran incentivo. Tengo el honor ahora de conocer a científicos de trabajo muy interesante y sobre todo, que me apoyaron siempre con una sonrisa, con puertas abiertas y discusiones interesantes. La calidad humana de con quienes tuve el placer de interactuar fue siempre excelente. Tanto así, que espero en el futuro seguir trabajando con ellos, son un ejemplo a seguir para mí. Gracias en especial a Allen Husker, la primera cara que vi al llegar en septiembre 2014.

En tercer lugar, quiero agradecer a los estudiantes de posgrado del Instituto. Me sentí muy bien acogida, ayudada, comprendida y contenta. A todos les deseo de verdad el mejor futuro, que lleguen, como yo, poco a poco a donde quieren estar.

Agradezco también a la Universidad de las Américas Puebla, que me permitió hallar mi vocación a través de la apertura disciplinar. Es por eso que estuve en Francia, donde descubrí la geofísica, y también por eso que pude hacer una tesis tan interesante. Los profesores saben en qué medida los estimo, y cuánto me han aportando como científica. Aunque ahora continúo con una carrera de geofísica, guardaré la visión matemática y física que durante estos cinco años desarrollé, que permite percibir de una forma tan crítica y clara la naturaleza. Muchas gracias.

Finalmente, las personas que contribuyeron a que este trabajo se presentara como Tesis de Licenciatura son quienes siempre me han apoyado, han creído en mí como científica, han compartido mi entusiasmo por conocer y me han acompañado en los momentos en que necesito un descanso. Entre ellos cuento a mis padres, a mi maravilloso hermano y a varias personas que tengo el honor de llamar amigos.

## Anexos

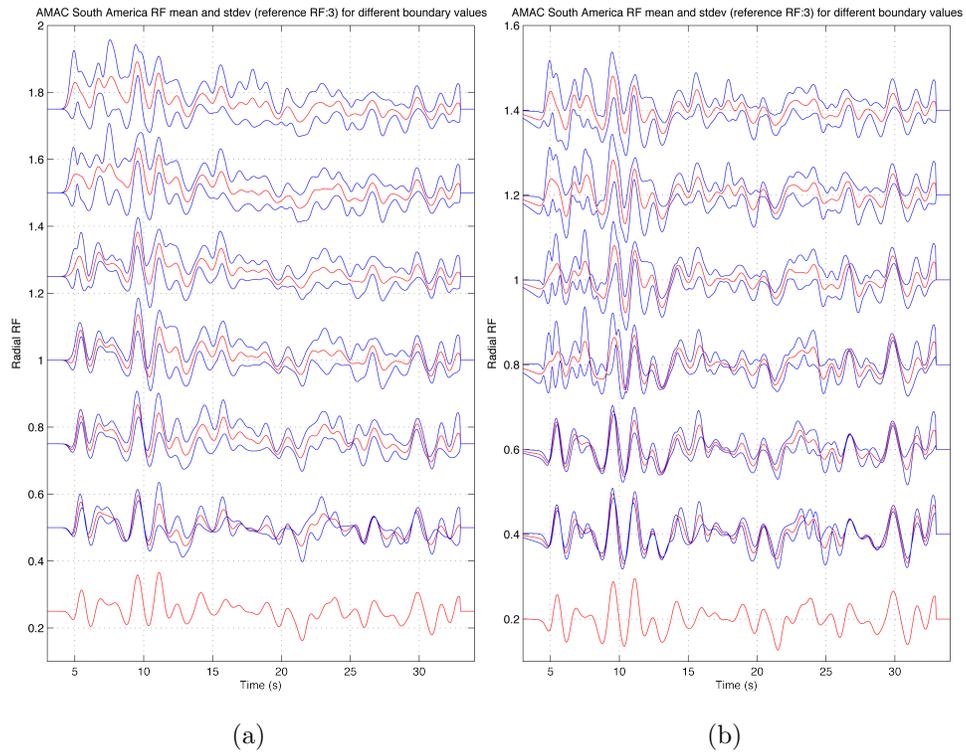


Figura 35: Incremento paulatino de número de funciones de receptor sin (a) y con (b) filtro para AMAC.

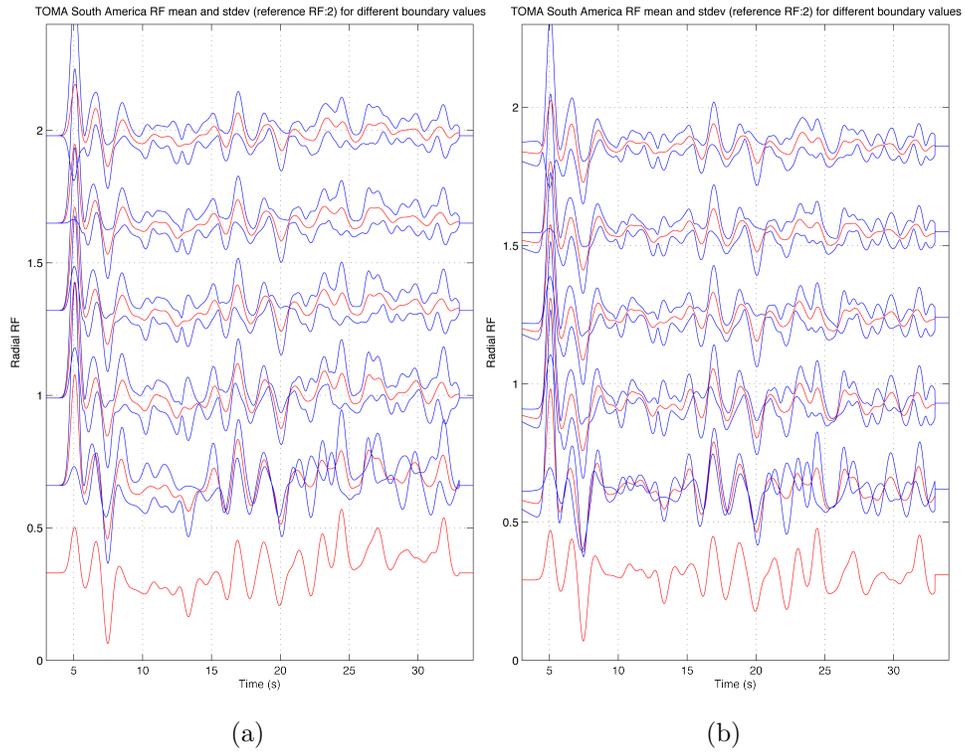


Figura 36: Incremento paulatino de número de funciones de receptor sin (a) y con (b) filtro para TOMA.

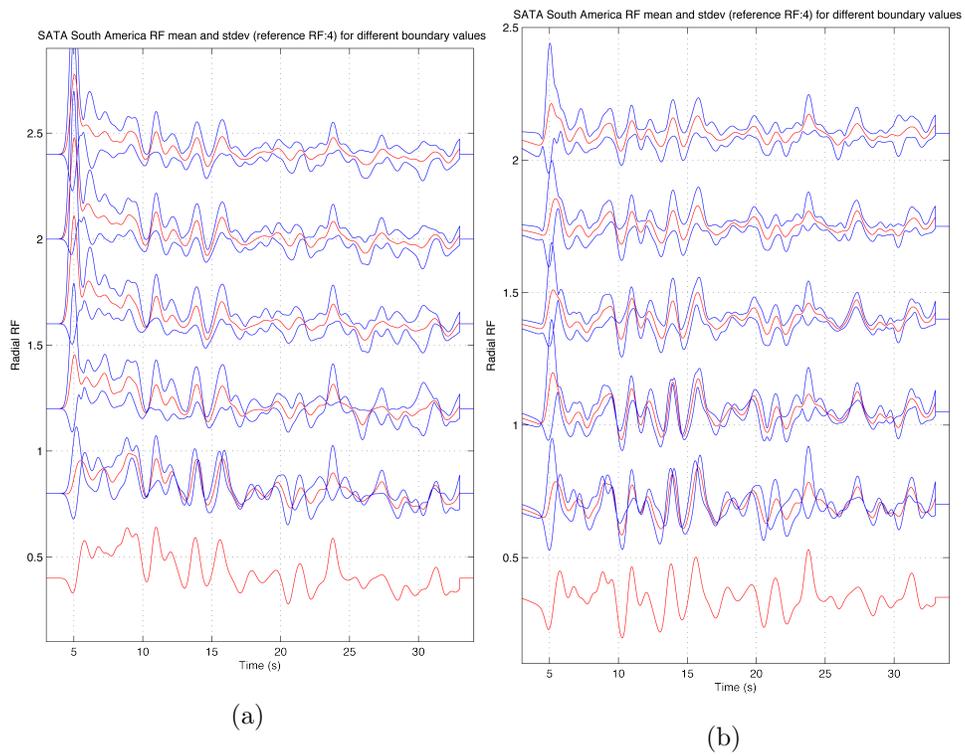


Figura 37: Incremento paulatino de número de funciones de receptor sin (a) y con (b) filtro para SATA. En la imagen se muestran únicamente los primeros seis apilados

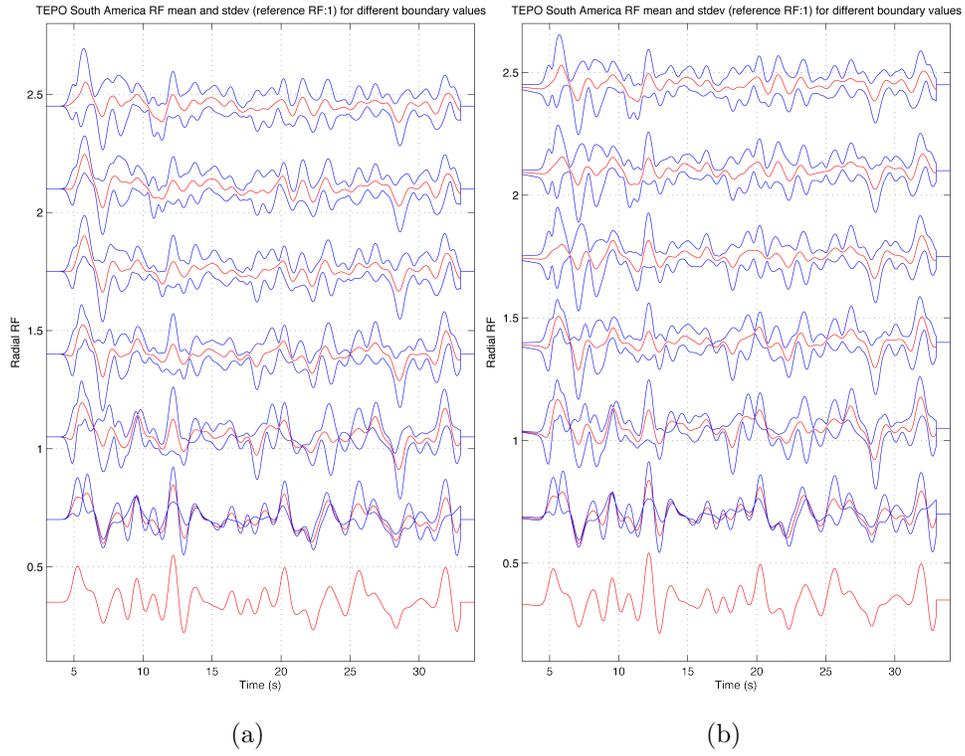


Figura 38: Incremento paulatino de número de funciones de receptor sin (a) y con (b) filtro para TEPO.



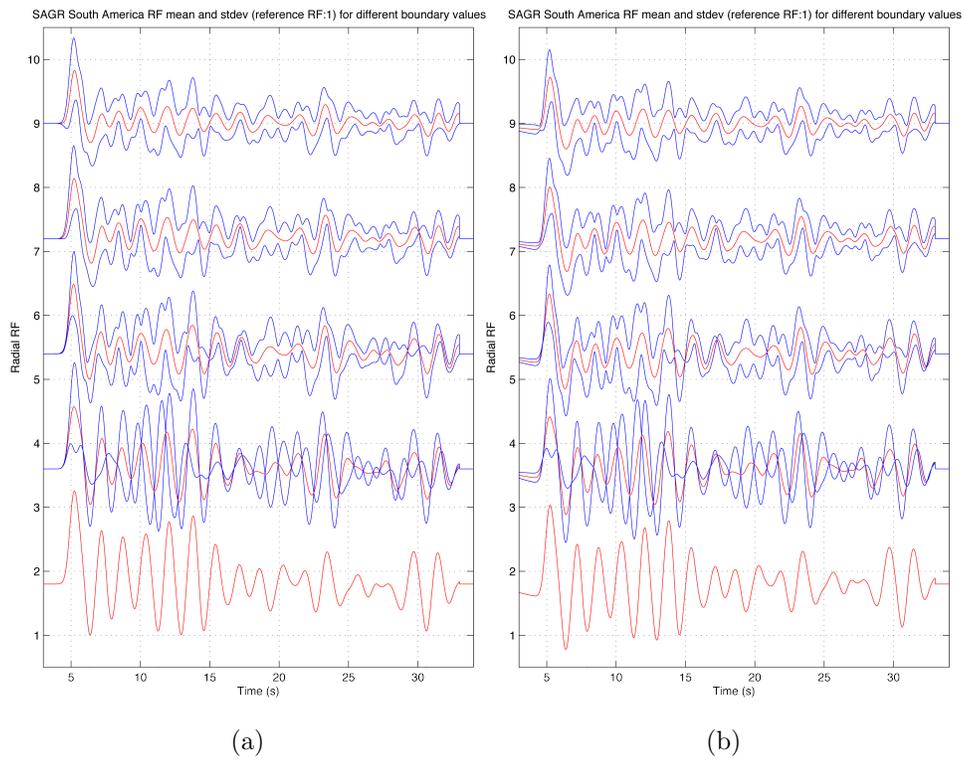


Figura 40: Incremento paulatino de número de funciones de receptor sin (a) y con (b) filtro para SAGR.

## Referencias

- [1] AFANASIEV, M. V., PRATT, R. G., KAMEI, R., AND MCDOWELL, G. Waveform-based simulated annealing of crosshole transmission data: A semi-global method for estimating seismic anisotropy. *Geophysical journal international* 199, 3 (dec 2014), 1586–1607.
- [2] AMMON, C. J. The isolation of receiver effects from teleseismic p waveforms. *Bulletin of the Seismological Society of America* 81, 6 (1991), 2504–2510.
- [3] AUDET, P., BOSTOCK, M. G., CHRISTENSEN, N. I., AND PEACOCK, S. M. Seismic evidence for overpressured subducted oceanic crust and megathrust fault sealing. *Nature* 457, 7225 (2009), 76–78.
- [4] AZENCOTT, R., Ed. *Simulated Annealing Parallelization Techniques*. Wiley-Interscience, EEUU, 1992.
- [5] BEISER, A. *Concepts of Modern Physics*. McGraw-Hill, Japón, 1973.
- [6] BROWN, T., LEMAY, H., BURSTEN, B., AND BURDGE, J. *Química: La ciencia central*. Pearson Educación, México, 2004.
- [7] BURDICK, L. J., AND LANGSTON, C. A. Modeling crustal structure through the use of converted phases in teleseismic body-wave forms. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67, 3 (1977), 677–691.
- [8] CAMPILLO, M., SINGH, S., SHAPIRO, N., PACHECO, J., AND HERMANN, R. Crustal structure south of the mexican volcanic belt, based on group velocity dispersion. *GEOFISICA INTERNACIONAL-MEXICO- 35* (1996), 361–370.

- [9] CRUZ-ATIENZA, V. M. Inversión global con algoritmos genéticos y cristalización simulada, aplicada a funciones de receptor: modelos estructurales de velocidades para la corteza en la república mexicana. University Press, February 2000. Engineering Thesis.
- [10] CRUZ-ATIENZA, V. M., HUSKER, A., LEGRAND, D., CABALLERO, E., AND KOSTOGLODOV, V. Nonvolcanic tremor locations and mechanisms in guerrero, mexico, from energy-based and particle motion polarization analysis. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 120, 1 (2015), 275–289. 2014JB011389.
- [11] CRUZ-ATIENZA, V. M., IGLESIAS, A., PACHECO, J. F., SHAPIRO, N. M., AND SINGH, S. K. Crustal structure below the valley of mexico estimated from receiver functions. *Bulletin of the Seismological Society of America* 100, 6 (2010), 3304–3311.
- [12] DOUGHERTY, S. L., AND CLAYTON, R. W. Seismicity and structure in central mexico: Evidence for a possible slab tear in the south cocos plate. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 119, 4 (2014), 3424–3447.
- [13] FRANK, W. B., SHAPIRO, N. M., HUSKER, A. L., KOSTOGLODOV, V., ROMANENKO, A., AND CAMPILLO, M. Using systematically characterized low-frequency earthquakes as a fault probe in guerrero, mexico. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 119, 10 (2014), 7686–7700.
- [14] FUNG, Y. *A First Course in Continuum Mechanics*, 2 ed. Prentice Hall, New Jersey, 1977.

- [15] FURUMURA, T., AND SINGH, S. K. Regional wave propagation from mexican subduction zone earthquakes: The attenuation functions for interplate and inslab events. *Bulletin of the Seismological Society of America* 92, 6 (2002), 2110–2125.
- [16] Projet g-gap. <http://isterre.fr/staff-directory/member-web-pages/michel-campillo/article/projet-g-gap>. Accesado: 2015-03-23.
- [17] G-gap france-mexico project. [http://usuarios.geofisica.unam.mx/vladimir/SMA\\_web/g-gap.html](http://usuarios.geofisica.unam.mx/vladimir/SMA_web/g-gap.html). Accesado: 2015-03-23.
- [18] HAVSKOV, J. Y OTTEMÖLLER, L. *Routine Data Processing in Earthquake Seismology*. Springer, S.L., 2010.
- [19] HECHT, E. *Teoría y problemas de óptica*. McGraw-Hill de México, México D.F., 1977.
- [20] HUSKER, A., KOSTOGLODOV, V., CRUZ-ATIENZA, VICTOR, M., LEGRAND, D., SHAPIRO, N., PAYERO, J. S., CAMPILLO, M., AND HUESCA-PÉREZ, E. Temporal variations of non-volcanic tremor (NVT) locations in the Mexican subduction zone: Finding the NVT sweet spot. *Geochemistry Geophysics Geosystems VOL. 13* (Mar. 2012), 12 PP.
- [21] IGLESIAS, A., CLAYTON, R. W., PÉREZ-CAMPOS, X., SINGH, S. K., PACHECO, J. F., GARCÍA, D., AND VALDÉS-GONZÁLEZ, C. S wave velocity structure below central mexico using high-resolution surface wave tomography. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 115, B6 (2010), n/a–n/a.

- [22] KIM, Y., CLAYTON, R. W., AND JACKSON, J. M. Geometry and seismic properties of the subducting cocos plate in central mexico. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 115, B6 (2010), n/a–n/a.
- [23] KIM, Y., MILLER, M. S., PEARCE, F., AND CLAYTON, R. W. Seismic imaging of the cocos plate subduction zone system in central mexico. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 13, 7 (2012), n/a–n/a.
- [24] KIRKPATRICK, S. Optimization by simulated annealing: Quantitative studies. *Journal of Statistical Physics* 34, 5-6 (1984), 975–986.
- [25] KOSTOGLODOV, V., HUSKER, A., SHAPIRO, N. M., PAYERO, J. S., CAMPILLO, M., COTTE, N., AND CLAYTON, R. The 2006 slow slip event and nonvolcanic tremor in the mexican subduction zone. *Geophysical Research Letters* 37, 24 (2010), n/a–n/a. L24301.
- [26] KUKKONEN, I. T., AND CLAUSER, C. Simulation of heat transfer at the kola deep-hole site: implications for advection, heat refraction and palaeoclimatic effects. *Geophysical Journal International* 116, 2 (1994), 409–420.
- [27] LANDAU, L.D. Y LIFSHITZ, E. *Theory of Elasticity ( Volume 7 of A Course of Theoretical Physics )*. Pergamon Press, 1970.
- [28] LANGSTON, C. A. Structure under mount rainier, washington, inferred from teleseismic body waves. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 84, B9 (1979), 4749–4762.
- [29] LEVI, E. *Elementos de mecánica del medio continuo*. Limusa, México D.F., 1987.

- [30] MANEA, V., AND MANEA, M. Flat-slab thermal structure and evolution beneath central mexico. *Pure and Applied Geophysics* 168, 8-9 (2011), 1475–1487.
- [31] MANEA, V. C., MANEA, M., KOSTOGLODOV, V., CURRIE, C. A., AND SEWELL, G. Thermal structure, coupling and metamorphism in the mexican subduction zone beneath guerrero. *Geophysical Journal International* 158, 2 (2004), 775–784.
- [32] Mexico subduction experiments (mase and veox). <http://web.gps.caltech.edu/~clay/MexWeb/MexSubduction.html>.  
Accesado: 2015-03-24.
- [33] Measuring the size of an earthquake. <http://earthquake.usgs.gov/learn/topics/measure.php>. Accesado: 2015-04-01.
- [34] METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., TELLER, A. H., AND TELLER, E. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics* 21, 6 (June 1953), 1087–1092.
- [35] Non-volcanic tremors. <http://www.seismo.ethz.ch/research/groups/stek/projects/nvt/index>.  
Accesado: 2015-04-02.
- [36] OWENS, T. J., ZANDT, G., AND TAYLOR, S. R. Seismic evidence for an ancient rift beneath the cumberland plateau, tennessee: A detailed analysis of broadband teleseismic p waveforms. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 89, B9 (1984), 7783–7795.

- [37] PAYERO, J. S., KOSTOGLODOV, V., SHAPIRO, N., MIKUMO, T., IGLESIAS, A., PÉREZ-CAMPOS, X., AND CLAYTON, R. W. Nonvolcanic tremor observed in the mexican subduction zone. *Geophysical Research Letters* 35, 7 (2008), n/a–n/a. L07305.
- [38] PEACOCK, S. M., CHRISTENSEN, N. I., BOSTOCK, M. G., AND AUDET, P. High pore pressures and porosity at 35 km depth in the cascadia subduction zone. *Geology* 39, 5 (2011), 471–474.
- [39] PÉREZ-CAMPOS, X., KIM, Y., HUSKER, A., DAVIS, P. M., CLAYTON, R. W., IGLESIAS, A., PACHECO, J. F., SINGH, S. K., MANEA, V. C., AND GURNIS, M. Horizontal subduction and truncation of the cocos plate beneath central mexico. *Geophysical Research Letters* 35, 18 (2008), n/a–n/a.
- [40] PHINNEY, R. A. Structure of the earth’s crust from spectral behavior of long-period body waves. *Journal of Geophysical Research* 69, 14 (1964), 2997–3017.
- [41] An overview of receiver-function analysis. <http://eqseis.geosc.psu.edu/~cammon/HTML/RftnDocs/rftn01.html>. Accesado: 2015-03-11.
- [42] SEN, M. K., AND STOFFA, P. L. Geophysical applications of simulated annealing and genetic algorithms. In *Global Optimization Methods in Geophysical Inversion*, second ed. Cambridge University Press, 2013, pp. 157–240. Cambridge Books Online.
- [43] SHEARER, P. *Introduction to Seismology*, 2 ed. Cambridge University Press, 2009.

- [44] SONG, T.-R. A., HELMBERGER, D. V., BRUDZINSKI, M. R., CLAYTON, R. W., DAVIS, P., PÉREZ-CAMPOS, X., AND SINGH, S. K. Subducting slab ultra-slow velocity layer coincident with silent earthquakes in southern Mexico. *Science* 324, 5926 (2009), 502–506.
- [45] Red de banda ancha. [http://www2.ssn.unam.mx:8080/website/jsp/red\\_sismologica.jsp](http://www2.ssn.unam.mx:8080/website/jsp/red_sismologica.jsp).  
Accesado: 2015-03-23.
- [46] STEIN, S., AND WYSESSON, M. *An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure*. Wiley, 2009.
- [47] TRUESDELL, C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Academic Press, Nueva York, 1977.
- [48] UZUN, S., AND JEKELI, C. Comparison of least-squares and simulated annealing to estimate fault parameters from airborne gravity gradiometry. *Studia Geophysica et Geodaetica* 59, 1 (2015), 21–50.
- [49] VELASCO-BELMONT, R. *Introducción a la Elasticidad*. Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F., 2009.