



---

# Modélisation de la rupture dynamique par une méthode de différences finies pour des failles non-planaires

Par Víctor M. Cruz-Atienza<sup>1,\*</sup>, Jean Virieux<sup>1</sup> et Hideo Aochi<sup>2</sup>

1 Géosciences Azur, CNRS, Sophia-Antipolis, France

2 Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Orléans, France

\* Maintenant au Department of Geological Sciences, San Diego State University, USA

**RÉSUMÉ.** : L'émission radiative des sources sismiques étendues de forme complexe est analysée par une méthode de différences finies. Dans un milieu arbitrairement hétérogène, la dynamique de la rupture sismique s'effectue par des conditions aux limites explicites dans des éléments de frontière tandis qu'un schéma aux différences finies en grille partiellement en quinconce permet de résoudre la propagation sous-jacente. Sur ces éléments de frontière centrés sur le tenseur de contrainte, une extrapolation précise du glissement ou de la vitesse de glissement est effectuée et permet l'implémentation de critères de rupture comme les critères d'affaiblissement en glissement ou en vitesse. Pour des failles de 30 km de long, une discrétisation de l'ordre de 70 m dans le pas de la grille est réclamée pour une évolution précise de la rupture le long de failles de forme quelconque soumise à un chargement tectonique arbitraire. Une comparaison quantitative avec une méthode d'équations intégrales dans un milieu homogène a permis cette évaluation de la discrétisation nécessaire pour décrire précisément le critère de rupture bien au-delà de la discrétisation nécessaire pour la propagation des ondes. Un outil précieux pour la rupture dynamique en milieu hétérogène a donc été construit.

**MOTS-CLÉS :** *séisme, rupture dynamique, fracture, faille, source étendue, propagation spontanée.*

**KEYWORDS:** *earthquakes, dynamic rupture, fault, crack, extended seismic source, spontaneous propagation.*

---

## 1. Introduction

L'estimation de la radiation des ondes sismiques est critique pour l'évaluation de l'accélération du sol au même titre que l'estimation des lois d'atténuation. Cette radiation peut varier fortement quand on considère une source étendue de forme géométrique quelconque au lieu d'une source ponctuelle. On ne considère pas dans ce travail les effets de l'atténuation géométrique liée à la propagation des ondes en dépit de son importance.

Si la radiation dépend de la distribution spatiale et temporelle du glissement sur la faille, sa forme géométrique modifie aussi considérablement cette radiation ainsi que l'insertion de cette faille dans un milieu aux propriétés hétérogènes. On se rend compte que l'approximation planaire de la faille souvent prise pour des raisons de simplicité dans les simulations numériques doit être complètement revue. Pour cela, il nous faut introduire de nouveaux outils de simulation prenant en compte la complexité de la configuration géométrique des zones sources des séismes.

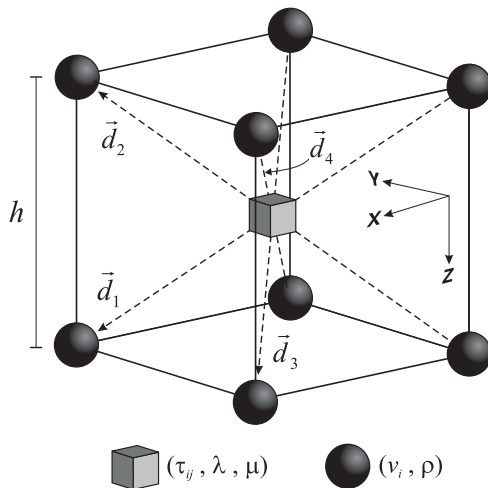
Tel est le but de cet article qui présente un nouvel outil de modélisation de la rupture dynamique fondé sur une méthode numérique de différences finies. On abordera dans un premier paragraphe la manière de discrétiser le milieu encaissant où se trouve la faille. Dans le deuxième paragraphe, on décrira la manière de discrétiser la rupture quand elle a lieu sur la faille. Nous discuterons ensuite les conditions aux limites à appliquer en tout point de cette rupture en insistant sur l'orientation locale arbitraire de la faille et nous indiquerons la loi de fracture que nous appliquons pour décrire cette rupture. Nous validerons ensuite cette approche de simulation par comparaison avec une technique d'équations intégrales avant de conclure.

## 2. Discrétisation du milieu

Considérons un milieu 3D linéairement élastique, homogène et isotrope : il est complètement décrit par les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , et la masse volumique  $\rho$ . Selon Madariaga (1976), en absence des forces de volume, les équations élastodynamiques qui gouvernent la propagation des ondes P et S dans ce milieu expriment l'évolution du vecteur de vitesse  $v_i$  et du tenseur de contrainte  $\tau_{ij}$  de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \tau_{ij,j} \\ \rho \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} &= \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}). \end{aligned} \quad (1)$$

Le système (1) contient neuf équations différentielles partielles qui peuvent être discrétisées dans une grille structurée avec une cellule de base carrée constante sur l'ensemble du domaine. Cette grille reliée à la méthode de différences finies que nous allons utiliser est partiellement en quinconce (GPQ) car les vitesses et les contraintes sont définies dans deux sous-grilles régulières séparées suivant la diagonale principale équivalente à une structure cristallographique cubique centré, comme le montre la Figure 1. Ainsi, le calcul d'une dérivée suivant l'axe x s'appuiera sur les huit valeurs du carré dont le centre est l'endroit où cette



**Figure 1.** Stencil dans la grille partiellement en quinconce pour opérateurs spatiaux à l'ordre deux utilisés pour dériver le champ de vitesse ( $v_i$ ) dans un nœud de contraintes ( $\tau_{ij}$ ).  $\rho$  est la masse volumique et  $\lambda$  et  $\mu$  le coefficients de Lamé.

dérivée doit être évaluée (Saenger et al., 2000). Cette discrétisation spatiale bénéficie donc de l'efficacité des grilles en quinconce standard (QQS) (Madariaga, 1976 ; Virieux, 1986) où chaque composante des vitesses ou des contraintes est calculée en différents points de la grille en raison de l'utilisation systématique des différences finies centrées pour le calcul des dérivées. Dans l'approche GPQ, on estime toutes les composantes de la vitesse (resp. la contrainte) en un seul point de la grille. Cette propriété est celle qui va nous intéresser dans notre approche. L'intégration en temps se fait suivant un schéma saute-mouton renseignant à des instants décalés en temps d'un demi-pas les vitesses et les contraintes. Notons un avantage

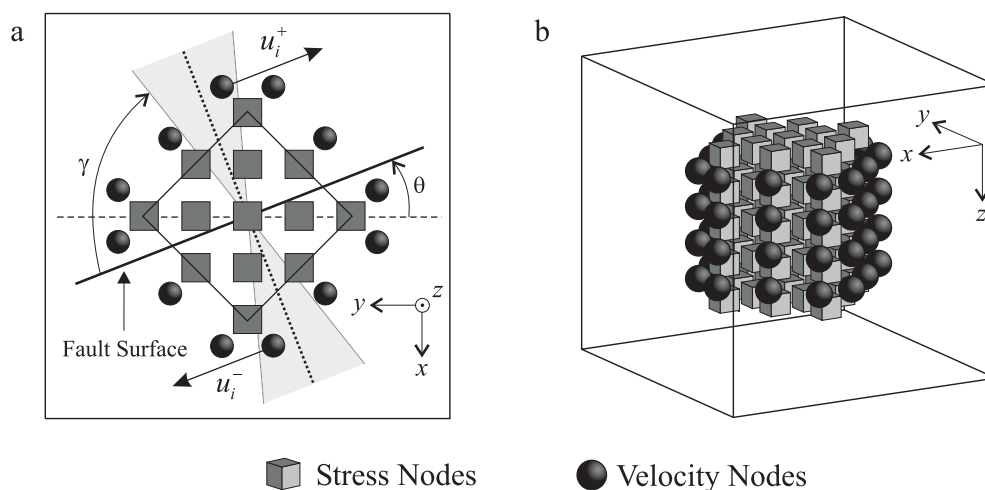


supplémentaire venant d'une condition de stabilité moins restrictive (Cruz-Atienza, 2006). L'analyse de stabilité de Von Neumann à l'ordre quatre révèle que dans leur seuil de stabilité, le pas de temps dans la GPQ est 1.7 fois plus grand que celui de la grille standard QQS. Cela se traduit par un nombre d'itérations 40% plus faible pour réaliser la même simulation dans les deux grilles.

Afin de simuler un espace infini, nous avons mis au point des conditions d'absorption d'énergie PML (Perfectly Matched Layer) dans chaque frontière extérieure du domaine numérique (Berenger, 1994 ; Collino et Tsogka, 2001) en utilisant une décomposition des champs seulement dans les zones dites PML, réduisant le sur-coût en mémoire associé à ces conditions d'absorption.

### 3. Discrétisation de la source étendue

Cruz-Atienza et Virieux (2004) ont proposé de décrire une surface de rupture donnée par un ensemble d'éléments source voisins formant ainsi une discrétisation de cette surface. Avant rupture, les nœuds de ces éléments se comportent comme des points du milieu continu. Quand il y a rupture, un élément source, ensemble structuré de nœuds de la grille, agit comme une source unitaire élémentaire. Un élément source décrit ainsi un parallélépipède suivant le nombre de nœuds intégrés dans cet élément tourné de 45 degrés par rapport à un axe de référence, comme celui montré sur la Figure 2. Cette configuration avec 65 nœuds de contraintes assure un bon compromis entre la résolution du champ de contraintes et la flexibilité géométrique nécessaire pour décrire des failles non-planaires avec des pas de discrétisation spatial allant de 20 m à 70 m (Cruz-Atienza, 2006).

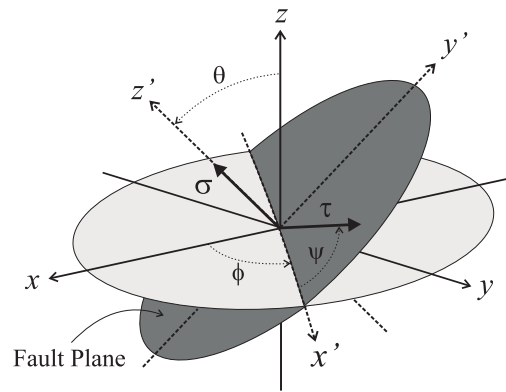


**Figure 2.** (a) Vue supérieure d'un élément source. L'angle  $\theta$  indique l'orientation locale de la faille autour de l'axe invariant à la translation. L'angle  $\gamma$  détermine le secteur (zone grise) autour de la direction normale à la faille dans lequel se trouvent les nœuds de vitesse utilisés pour évaluer la cinématique de la faille (Cruz-Atienza et al, 2007). (b) Vue 3D d'un élément source.

La discrétisation de la faille où siègera la rupture dynamique se fait au préalable de la simulation et est l'équivalent d'un maillage dans les méthodes d'éléments finis. Cette étape peut être assez longue mais reste indépendante des simulations qui seront faites une fois la géométrie de la faille fixée. Elle pourra évoluer dans le futur sans remettre en question les simulations elles-mêmes. Dans la situation actuelle, la géométrie non-planaire de la source est projetée dans le plan cartésien perpendiculaire à l'axe de rotation des éléments par une succession d'éléments placés les uns contre les autres et le plus proche de cette géométrie. Cette discrétisation bidimensionnelle est simplement étendue dans la direction de l'axe de rotation (axe invariant à la translation) en superposant des éléments discrets, ce qui permet la description tridimensionnelle de notre surface de faille. D'autres outils pourront décrire encore plus exactement une surface quelconque.

#### 4. Conditions aux limites lors de la rupture dynamique

Nous nous intéressons à une rupture cisailante de mode II ou III (i.e. sans ouverture). Nous résolvons un problème dont les conditions aux limites sont caractérisées par la chute des contraintes cisailantes associée à la dislocation tangentielle du milieu sur la faille. Considérons un repère local cartésien,  $x'y'z'$ , orienté suivant un élément source appartenant à la faille (Figure 3). Pour appliquer les conditions de frontière dans cet élément, nous transformons le tenseur de contraintes,  $\tau_{ij}$ , depuis le repère cartésien d'origine,  $xyz$ , dans le repère local au travers de deux rotations successives suivant les angles d'Euler  $\theta$  et  $\phi$ . Dans le repère local, les tractions normales et cisailantes à la faille,  $\sigma$  et  $\tau$  respectivement, sont données par



**Figure 3.** Contraintes normale ( $s$ ) et cisailante ( $t$ ) à la faille dans un repère local  $x'y'z'$  orienté parallèlement à la faille.

$$\sigma = \tau'_{zz} \quad \text{et} \quad \tau = \sqrt{\tau'^2_{xz} + \tau'^2_{yz}}. \quad (2)$$

Une fois appliquée la chute de contrainte cisailante dans le repère local, nous appliquons la transformation inverse du tenseur de contraintes pour retrouver les contraintes dans le repère général afin de réaliser l'intégration du système (1). Ce procédé est réalisé à chaque pas en temps et nous permet donc d'appliquer les conditions de frontière à l'intérieur d'un élément source arbitrairement orienté.

Les lois de frottement sur la faille réclament l'estimation du glissement (ou de la vitesse de glissement sur cette faille). Comme les éléments constituant la zone de rupture sont contrôlés par les contraintes, il nous faut estimer d'une manière indirecte le glissement (ou la vitesse du glissement) sur la zone ayant cassé de la faille. Nous suivons pour cela la même stratégie introduite par Cruz-Atienza et Virieux (2004). Elle consiste essentiellement en une extrapolation pondérée des valeurs des vitesses des particules autour de chaque élément source (sphères, Figure 2b) par l'utilisation de fonctions normalisées qui rendent à la fois le glissement (et la vitesse de glissement) indépendant de l'orientation locale de la surface de rupture (Cruz-Atienza et al., 2007).



Pour déterminer lorsqu'un élément source rompt, nous comparons à chaque instant le module  $\tau$  des tractions cisailantes dans le point central de l'élément à l'opposé de la valeur du frottement statique. L'élément rompt au moment où la contrainte cisailante  $\tau$  excède cette valeur car le matériau n'est plus capable de contenir par sa cohésion même la fracture en ce point. La loi que va suivre le frottement  $\tau_c$  en ce point rompu peut être assez complexe mais dépend même dans les lois les plus simples du glissement dont souffre cet élément. C'est pourquoi il nous fallait une évaluation de ce glissement en ce point de rupture. Fort de cette extrapolation, nous avons donc assumé une loi constitutive de frottement de type Coulomb linéairement dépendante du glissement. La contrainte du point rompu suit la loi suivante en fonction du glissement en ce point

$$\tau_c(\sigma, s) = \tau_s + (\tau_u - \tau_s)(1 - s/\delta_c)H(1 - s/\delta_c) \quad (3a)$$

où nous définissons les deux coefficients de friction statique  $\mu_s$  et de friction dynamique  $\mu_d$  reliés respectivement à la contrainte de friction statique  $\tau_u$  et à la contrainte de friction dynamique  $\tau_d$  par la contrainte normale  $\sigma$  suivant les équations

$$\tau_u = \sigma\mu_s \quad \text{et} \quad \tau_s = \sigma\mu_d. \quad (3b)$$

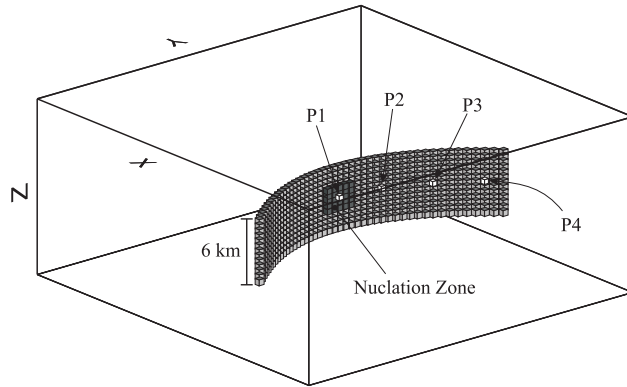
La fonction Heaviside est notée par  $H(\cdot)$ . Le glissement d'affaiblissement caractéristique est noté par  $\delta_c$  et introduit dans le problème de la rupture une dimension spatiale reliée à la zone de cohésion en bord de fracture (Barenblatt, 1959).

De nombreux tests de validité numérique pour assurer de la convergence et de la stabilité de ces conditions aux limites ont été conduits par Cruz-Atienza (2006) et Cruz-Atienza et al. (2007). Nous ne revenons pas sur ces points techniques qui permettent de montrer qu'il faut un pas de discrétisation relativement fin pour assurer la convergence de la méthode d'au moins 4 élément source dans la zone de cohésion définie par les points ayant cassé mais n'ayant pas encore atteint le frottement dynamique. Si cette condition n'est pas vérifiée, la simulation doit être reprise car on ne peut pas vérifier a priori de cette condition de validité sur la taille de la zone de cohésion dépendante de la vitesse de rupture. Ce pas de discrétisation de l'ordre de 70 m pour les problèmes de fracture rencontrés pour décrire la rupture sismique est inférieur au pas spatial qu'il faut prendre pour assurer la convergence et la stabilité pour la propagation des ondes.

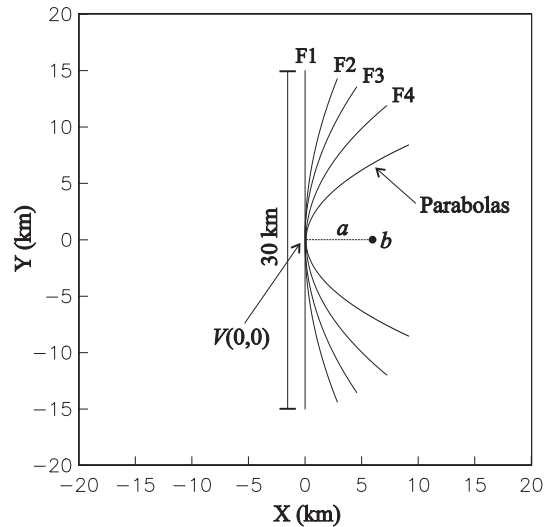
## 5. Précision de la simulation dynamique

La précision de la solution dynamique spontanée ne peut être étudiée par comparaison avec des solutions analytiques. Dans la configuration 3D qui nous intéresse avec une loi de comportement de type Coulomb, il nous faut comparer notre solution à celle obtenue par une autre méthode numérique de préférence différente dans sa philosophie de discrétisation. Ainsi, la méthode des équations intégrales suppose un milieu homogène et construit la solution dynamique en ne discrétisant que la faille elle-même. En raison de son utilisation des

solutions analytiques dans le milieu homogène, nous considérerons cette méthode comme une méthode semi-analytique qui a été développée par Aochi et al (2000) pour les failles non-planaires.



**Figure 4 :** Description d'une faille de forme courbe dans un milieu homogène. Quatre points d'observation sont sélectionnés sur la faille pour comparaison des solutions. La zone de nucléation où la rupture chute brutalement à l'instant initial est représentée par un petit carré central.



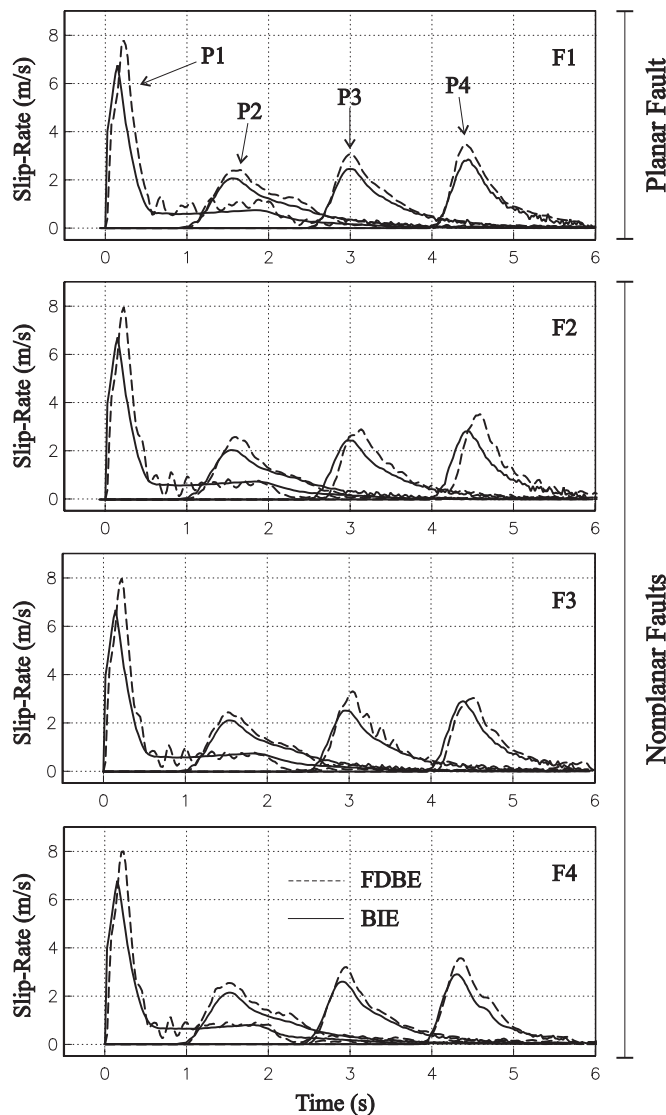
**Figure 5 :** Projection horizontale des failles de plus en plus courbes suivant une géométrie parabolique.

Nous proposons un exercice suivant lequel la précision des solutions numériques est appréciée en considérant des failles cisailantes sénestres de formes de plus en plus courbes dans un milieu homogène défini par une vitesse des ondes P de 6000 m/s et des ondes S de 3464 m/s et une masse volumique de 2670 kg/m<sup>3</sup> (Figure 4). On sélectionne quatre points P1, P2, P3 et P4 où seront présentées les solutions des approches numériques et semi-analytiques. La projection de la faille cisailante est une parabole de plus en plus excentrée (Figure 5). Cette représentation analytique est bien adaptée à l'approche par équations intégrales.

La taille de la zone de nucléation sous forme d'un carré est de 2 km par coté. Le premier point d'observation P1 se trouve à l'origine de cette zone et une distance de 4 km le sépare du deuxième point P2 ainsi que les points suivants de son précédent. La faille est délimitée dans sa configuration finale par un seuil de cohésion du matériau très élevé l'empêchant de se casser. On supposera une contrainte normale initialement constante égale à 120 MPa sur l'ensemble de la faille ainsi que des coefficients de frottement  $\mu_s$  et  $\mu_d$  tels que les contraintes associées aux frottement statique  $\tau_u$  et au frottement dynamique  $\tau_s$  valent respectivement 81,24 MPa et 63 MPa. On négligera les perturbations dynamiques sur la contrainte normale le long des simulations. Le champ initial de contrainte  $\tau_0$  produit un mouvement de cisaillement sénestre sur la faille et vaut 73.73 MPa excepté pour la zone de nucléation où elle vaut 97.49 MPa afin d'initier la rupture. Le glissement caractéristique vaut 0.8 m par tout dans la faille. Ces différentes valeurs caractérisent la rupture dynamique et la possibilité d'observer la transition super-sonique. Dans le cas présent, cette transition ne sera pas observée bien que la valeur de  $\tau_u$  soit assez faible pour cela : une taille plus grande de la faille est nécessaire pour l'observer.

Le pas de la grille numérique vaut 45.50 m et le pas  $\Delta t$  d'intégration en temps 0.005s. Le nombre d'éléments discrétisant la faille varie de 133 dans le cas planaire (Figure5: F1) à 175 dans le cas de la faille la plus courbe le long de la direction de la faille (Figure5: F4). Ce nombre est de 27 dans la direction du pendage de la faille dans tous les cas. En raison de ces





**Figure 6 :** Vitesse de glissement sur la faille pour les quatre formes de faille et pour quatre points d'observation. Notez le bon accord en temps et en amplitude entre les deux méthodes ainsi que les petites oscillations pour la méthode numérique.

numérique que l'on peut attribuer à la valeur du glissement caractéristique. Notons que l'amplitude est toujours plus grande pour la méthode numérique mais cette sur-estimation qui peut être au maximum de 30 % est dans les limites des précisions sur les estimations de l'ampleur des sources sismiques.

En résumé, les solutions de référence de l'approche semi-analytique sont bien reproduites par la méthode numérique de différences finies que ce soit pour la faille planaire ou pour les failles courbes. Les différences peuvent s'expliquer par les approches numériques totalement différentes qui sont utilisées, nous donnant une grande confiance dans la précision de la méthode numérique.

## 6. Conclusion

Nous avons introduit une nouvelle méthode de modélisation de la rupture dynamique spontanée pour les sources sismiques étendues en utilisant une approche par différences finies et une implémentation particulière des conditions aux limites qui varient au cours du temps le



variations de discrétisation, la taille de la zone de faille peut changer mais les variations n'excèdent pas 1.5% en valeur relative. Les paramètres numériques pour l'approche semi-analytique (BIE) sont plus simples. La faille est discrétisée avec un pas spatial de 150 m et un pas en temps de 0.0125 s.

La figure 6 montre la vitesse de glissement aux différents points d'observation sur la faille. On constate que le temps où cette vitesse devient non nulle (temps de la rupture) est le même pour les deux approches dans le cas planaire et passe d'un léger retard pour la méthode numérique dans le cas d'une faible courbure à une valeur très légèrement supérieure dans le cas de la faille la plus courbe. L'amplitude de la vitesse du glissement est correctement estimée avec de petites oscillations observées dans le cas de la méthode

long d'une surface de forme complexe. Cette approche est l'extension à 3D de l'approche proposée par Cruz-Atienza et Virieux (2004) à 2D. Un point qui a cassé suit une loi de Coulomb d'affaiblissement en fonction du glissement pour atteindre son frottement dynamique.

Cette approche donne des solutions similaires à celles obtenues par une autre méthode complètement différente puisque les conditions aux limites sont imposées implicitement et que la résolution se fait par des équations intégrales. Notons qu'il existe d'autres méthodes qui sont hautement résolventes pour des failles planes comme la méthode des nœuds scindés (DFM) par Day et al. (2005) qui peuvent considérer des milieux hétérogènes et procèdent avec des pas de discrétisation plus grossiers pour une meilleure précision.

L'approche que nous proposons permet d'introduire des hétérogénéités dans tout le milieu mais permet aussi de décrire plusieurs tronçons de faille de géométrie complexe. Il est donc possible d'envisager des simulations détaillées et quantitatives dont la seule limite est notre capacité d'interprétation.

## Remerciements

Ce travail a été financé par le “Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología” (CONACyT), Mexico, ainsi que par les projets QSHA numéro ANR-05-CATT- 011 et GIS CURARE.

## Références

- Aochi, H., E. Fukuyama, and M. Matsu'ura, 2000, Spontaneous rupture propagation of on a non-planar fault in 3D elastic medium: PAGEOPH, 157, 2003–2027.
- Barenblatt, G. I., 1959, Concerning equilibrium cracks forming during brittle fracture: the stability of isolated cracks, relationships with energetic theories: Appl. Math. Mech., 23, 1273–1282.
- Berenger, J. P., 1994, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves: J. Computational Physics, 114, 185–200.
- Collino, F. and C. Tsogka, 2001, Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media: Geophysics, 66, 294–307.
- Cruz-Atienza, V. M. and J. Virieux, 2004, Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach: Geophys. J. Int., 158, 939–954.
- Cruz-Atienza, V. M., 2006, Rupture dynamique des faille non-planaires en différences finies: Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia - Antipolis, France.
- Cruz-Atienza, V. M., J. Virieux and H. Aochi, 2007, 3D Finite-Difference Dynamic-Rupture Modelling Along Non-Planar Faults, Soumit à Geophysics.
- Day, S. M., L. A. Dalguer, N. Lapusta, and Y. Liu, 2005, Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture: J. Geophys. Res., 110, B12307, doi:10.1029/2005JB003813.
- Madariaga, R., 1976, Dynamics of an expanding circular fault: Bull. Seismol. Soc. Am., 66, 639–666.
- Saenger, E. H., N. Gold, and S. A. Shapiro, 2000, Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid: Wave Motion, 31, 77–92.
- Virieux, J., 1986, P-SV wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress finite difference method: Geophysics, 51, 889-901.