

UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES
Ecole Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

Thèse de Doctorat

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : Sciences de l'Univers - Géophysique

présentée et soutenue par

Víctor Manuel CRUZ ATIENZA

Rupture Dynamique des Failles Non-Planaires en Différences Finies

Thèse préparée dans le laboratoire Géosciences Azur (UMR 6526)
Dirigée par **Jean VIRIEUX**

Soutenue le 5 mai 2006 à 14h, dans l'UMR Géosciences Azur,
site Sophia-Antipolis, devant le jury composé de :

Hideo AOCHI	Chercheur BRGM	Examineur
Michel CAMPILLO	Professeur UJF	Rapporteur
Raúl MADARIAGA	Professeur ENS	Examineur
Stefan NIELSEN	Chercheur INGV	Examineur
Jean-Pierre VILOTTE	Physicien IPGP	Rapporteur
Jean VIRIEUX	Professeur UNSA	Directeur de thèse

Rupture Dynamique des Failles
Non-Planaires en Différences Finies

par

Víctor Manuel CRUZ ATIENZA

À Diane.

- COMMENT -

*Comment peut-on vivre face à une telle fuite.
Sachant qu'elles passent si vite l'une après l'autre,
comme tirées par un fil aussi long que leur propre existence,
par un fil raide et tendu qui pointe leur destin,
l'endroit où finira un jour chacune des choses
qui passent devant nos yeux sans repos,
guidées par leur propre destin,
pressées d'y arriver sans le moindre détournement,
sans aucune hésitation. . .*

*Comment continuer en les sachant si près un instant
et pour toujours inaccessibles dès l'instant qui suit.
Comment saisir la fraîcheur de l'espace sillonné par leurs ailes en fuite.
Comment fixer la saveur d'un regard si rond, si éphémère, si vrai. . .*

*Comment vivre, hélas, en les ayant perdues,
avec la certitude de les savoir ailleurs
en dansant gaiement,
loin de nos yeux,
loin de nous. . .*

*Peut être,
le seul secours qui nous reste est de s'accrocher
humblement au fil qui nous emporte,
en espérant un beau jour se retrouver,
à jamais,
devant les choses nées pour mourir à nos côtés.*

Víctor Manuel CRUZ ATIENZA

C E travail a été réalisé dans les murs de l'UMR « Géosciences Azur », ayant comme cadre l'École Doctorale « Sciences Fondamentales et Appliquées » de l'Université de Nice - Sophia Antipolis (UNSA). Sans l'accueil et le support que les personnes membres de ces deux institutions m'ont apportés depuis le début de ma thèse, ce travail n'aurait pas eu lieu. Pour cette raison, je suis très reconnaissant à vous tous. Je voudrais également faire part au peuple mexicain, à travers le « Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología » (CONACYT), de ma plus grande gratitude et le remercier de m'avoir donné l'opportunité de réaliser mon doctorat. Pour le suivi et le soutien fournis tout au long du projet, je remercie de la même façon la « Société Française d'Exportation des Ressources Éducatives » (SFERE).

Je remercie tout spécialement Hideo AOCHI, Michel CAMPILLO, Raúl MADARIAGA, Stefan NIELSEN et Jean-Pierre VILOTTE, membres du jury de thèse, pour avoir accepté la lourde tâche de lire ce manuscrit. C'est un honneur et un grand privilège pour moi de bénéficier de vos regards scientifiques et critiques sur mon travail. Je remercie en particulier Hideo AOCHI pour sa collaboration. Par ailleurs, je remercie Kim OLSEN de son soutien et de son intérêt à l'égard de mon travail, Luis DALGUER pour les longues et prolifiques conversations que nous avons eues, et Ruth HARRIS pour le protocole de comparaison mené par le « Southern California Earthquake Center » (SCEC).

Jean VIRIEUX a été le capitaine du navire pendant cette longue aventure. Nous avons partagé des grandes joies, des moments où la magnificence de toute chose semblait témoigner des états de profond bonheur acquis. Néanmoins, il y eu aussi des grandes tempêtes, des rafales intempestives où le désespoir présidait le moindre geste, le moindre souffle que l'on fournissait pour éviter le naufrage. Dans ces longues périodes de solitude, le capitaine a toujours trouvé les bonnes paroles, le courage nécessaire pour me pousser en avant. Surtout, il s'est toujours battu pour que ce navire, le nôtre, devienne un jour le mien. Pour que je sois le maître de nouvelles aventures, le capitaine d'un nouveau navire, du navire qui aujourd'hui porte mon nom. Pour tout cela, merci Jean. Je te dis merci, si c'est ça qu'il faut dire quand on doit autant.

Que peut-on dire quand on aime quelqu'un ? Quelles sont-elles les paroles suffisantes pour exprimer le tout ? Comment partager une victoire qui est à la fois celle de l'autre ? ... sagesse, courage, loyauté, sensibilité ... Je te remercie, Diane RIVET, de partager avec moi la plus grande des aventures. Je te remercie en te dédiant mon travail.

Remerciements

Je remercie ma mère, la Nena ATIENZA ; mon père, Aurelio CRUZ et mon frère, Alejandro CRUZ ATIENZA, toujours aussi près, toujours donnant un sens à ma vie, un essor qui m'a permis d'écrire ma propre histoire. Je remercie également ma très aimée famille, celle qui habite Madrid, Espagne, et la ville de Mexico, de sa veille sur moi, toujours fondamentale. Un gros remerciement à Jessie et Jean-Paul RIVET qui m'ont toujours soutenu et encouragé dans les moments les plus durs.

Redécouvrir quelque chose est toujours agréable. Pourtant, quand il s'agit de l'amitié, alors c'est un véritable régale. Merci de croire en moi, merci d'être avec moi, merci de partager ce qui est important pour vous avec moi, chère Diane ARCAÏ, cher James PUGLISI, cher Layin ARIZMENDI, chère Céline GELIS, cher Patxi CONGREGADO, cher Mathieu LILLA. Je vous souhaite, à vous tous et pour toujours, les plus belles choses de la vie.

Votre présence a été pour moi fondamentale. Les moments que nous avons partagés ont profondément marqué d'une façon ou d'une autre cette période de ma vie. Merci à vous, Teresa SCOLAMACCHIA, Cécile BARRER, Tony MONFRET, Cyril AZNAR, Stéphanie GAUTIER, Sophie PEYRAT, Frédéric ROBINEL, Pascal BEAUJARD, Miguel, Mariana et Tonatiuh RODRIGUEZ.

Un gros merci à Stéphane OPERTO pour son aide toujours inconditionnelle ainsi qu'à Stéphane GAFFET pour sa sensibilité et compréhension. Rien n'aurait été possible sans Caroline RAMEL, Reine SAIGHI, Isabelle LAPASSAT, Lionel MAURINO, Véronique PISOT, Suzanne MIFSUD, Isabelle MANEAU, Marie-France GALLORINI, Sophie ROUZIERE, Emmanuel TRIC, Cécile CHAUMIER et Anna MANETA. Je vous en remercie énormément.

Merci aux collègues dont les encouragements et les sourires sont primordiaux dans la vie de tous les jours. Merci à Christopher WIBBERLEY, Claudine DAUPHIN, Aurore LEFILLEUL, Ioannis ALIFERIS, Nicolai SHAPIRO, Elena MIRALLES, Alexandre CHEMENDA, Stéphane LECAILLON, Olga KARASEVA, Diana LATORRE, Marie-Aude BONNARDOT, Thomas LEBOURG, Sébastien RAUX, Tiziana VANORIO, Bertrand DELOUIS, Collette HOOPER, Cédric JORAND, Mondher BENJEMAA, Christophe MARON, Didier BRUNEL, Georges BUFFET, Mickaël HERNANDEZ, Samyr EL BEDOUI, David BOUTELIER, Allesandra RIBODETTI, William AGU-

DELO, Carine KHORS, Martin VALLEE, Céline BEAUVAL, Marc REGNIER, Damien BACHMANN, Hervé JOMARD, Christophe LARROQUE, Françoise COURBOULEX, Anne DESCHAMPS, Mami UENO, Elodie SAILET et Perrine DESHAYES.

Enfin, je voudrais dire à mes très chers amis qui demeurent loin, de l'autre côté de l'Atlantique que, malgré l'énorme distance qui nous a séparés pendant ces dernières années, j'ai toujours pensé à vous. Vous le savez, votre présence dans ma vie, même si silencieuse, a été toujours mon trésor.

Sophia-Antipolis, mai 2006

Table des matières

Introduction Générale	1
I Propagation des Ondes	7
1 Propagation des Ondes en Différences Finies	9
1.1 Introduction	11
1.2 Approximation en Différences Finies	14
1.2.1 Opérateurs Différentiels en Différences	14
1.2.1.1 Première Dérivée Partielle	15
1.2.1.2 Seconde Dérivée Partielle	18
1.2.1.3 Opérateurs d'Ordre Supérieur	20
1.2.2 Equation d'Onde	22
1.2.3 Schémas Explicites <i>vs</i> Schémas Implicites	24
1.2.4 Dispersion Numérique	26
1.2.4.1 Équation d'Onde Acoustique	32
1.2.5 Condition de Stabilité	36
1.2.5.1 CFL	36
1.2.5.2 Analyse de von Neumann	40
1.2.5.3 Stabilité Dans Différents Cas	41
1.2.6 Grilles Numériques Irrégulières	44
1.3 Equations de l'Elastodynamique	47
1.3.1 Contraintes et Déformations	47
1.3.2 Equation du Mouvement	48
1.3.3 Systèmes Hyperboliques d'EDP	49
1.3.3.1 Vitesse-Contrainte	49
1.3.3.2 Déplacement-Contrainte	51
1.4 Discrétisation des Equations	52
1.4.1 Grilles en Quinconce	53
1.4.1.1 Grille en Quinconce Standard	53

1.4.1.2	Grille Partiellement en Quinconce	54
1.4.2	Opérateurs Différentiels Tournés	57
1.4.2.1	Opérateurs à l'Ordre Deux	62
1.4.2.2	Opérateurs à l'Ordre Quatre	63
1.4.3	Equations en Différences Tournées	64
1.4.3.1	Formulation à l'Ordre (2,2)	65
1.4.4	Stabilité et Dispersion	73
1.4.4.1	Condition de Stabilité	73
1.4.4.2	Analyse de Dispersion	75
1.5	Conditions aux Limites et Conditions Initiales	82
1.5.1	Conditions de Frontière	82
1.5.1.1	Surface Libre	85
1.5.1.2	Fracture Dynamique Plane	92
1.5.2	Conditions de Radiation PML	99
1.5.2.1	Formulation et Implémentation 3D	100
1.5.2.2	Source Isotrope	105
1.5.2.3	Test d'Absorption : Énergie Mécanique	107
1.5.2.4	Test d'Absorption : Sismogrammes	117
1.6	Conclusions	127
 II Rupture Dynamique		131
 2 Mécanique de la Rupture Dynamique		133
2.1	Dynamique Macroscopique	137
2.2	Frottement	141
2.2.1	Initiation	141
2.2.2	Phase Instable	142
2.3	Elastodynamique Locale	143
2.3.1	Champs Singuliers	145
2.3.2	Forces de Cohésion	148
2.3.3	Bilan Énergétique	152
2.4	Propagation de la Rupture	155
2.4.1	Critère de Rupture	155
2.4.2	Rupture Spontanée	159
2.5	Conclusions	168
 3 Modèle 2D d'une Faille Dynamique Nonplanare		171
3.1	Introduction	174
3.2	Elastodynamic Equations for an Arbitrary Crack	175
3.3	Crack Boundary Conditions	177

3.4	Point Source Analysis	179
3.4.1	Point Source Discretization	179
3.4.2	Slip and Slip-Rate Estimation	182
3.5	Planar Finite Source	186
3.5.1	Numerical Accuracy	186
3.5.2	Self-Similar Constant Velocity Crack	189
3.5.3	Constitutive Friction Law	190
3.5.4	Spontaneous Rupture Propagation	194
3.6	Nonplanar Sources in Heterogeneous Media	196
3.6.1	A Realistic Example	198
3.7	Discussion and Conclusions	201
4	Rupture Dynamique 3D de Failles Planes et Non-Planaires	205
4.1	Modèles de Zones de Faille	208
4.1.1	Description Numérique d'une Zone de Faille	208
4.1.2	Propagation Spontanée de la Rupture	211
4.1.2.1	FDBE <i>vs</i> Stress Glut	212
4.1.2.2	Zone de Faille <i>vs</i> BIE	216
4.1.3	Représentation d'un Élément de Frontière	224
4.2	Nonplanar Dynamic Rupture Model	230
4.2.1	Introduction	230
4.2.2	Numerical Model	232
4.2.2.1	Source Discretization	235
4.2.2.2	Rupture Boundary Conditions	237
4.2.3	Fault Mechanics	239
4.2.3.1	Rupture Criterion	239
4.2.3.2	Kinematics	240
4.2.4	Resolution and Convergence	244
4.2.5	Model Validation	258
4.2.5.1	The SCEC Benchmark : FDBE <i>vs</i> TSN	258
4.2.5.2	Nonplanar Rupture : FDBE <i>vs</i> BIE	270
4.2.6	Rupture Along a Nonplanar Loaded Fault	278
4.2.6.1	Biaxial Tectonic Pre-stress	278
4.2.7	Discussion and Conclusions	291
4.3	Discussion, Conclusions et Perspectives	295
4.3.1	The 1992 Landers Earthquake ($M_W = 7.3$)	297
	Conclusion Générale	307
	Annexes	311

A Opérateurs 2D à l'Ordre 4	313
B Système d'Equations 3D en DF à l'Ordre (2,4)	317
C Valorisation de Compétences	331
C.1 Cadre général et enjeux de la thèse	333
C.1.1 Présentation du projet de thèse	333
C.1.2 La thèse dans son contexte	334
C.1.3 Moi dans ce contexte	335
C.2 Déroulement, gestion et coût du projet	336
C.2.1 Préparation et cadrage du projet	336
C.2.2 Conduite du projet	337
C.2.3 Evaluation et prise en charge du coût du projet	339
C.3 Compétences, savoir-faire, qualités professionnelles et personnelles.	340
C.4 Retombés et perspectives de la thèse	342
Table de Figures	350
Liste de Tableaux	352
Bibliographie	352
Index bibliographique	377

Introduction Générale

Mais pourquoi y a-t-il des séismes ? Pour quelles raisons, subitement, la Terre commence-t-elle à vibrer violemment, sans aucun préavis ?

COMME nous le rappellent Madariaga & Perrier (1991) dans leur livre pédagogique sur les tremblements de terre, ces deux questions sont celles que l'Homme se pose depuis l'Antiquité face à l'impuissance engendrée par un phénomène à la fois dévastateur et fascinant : les tremblements de terre. Ce sont ces mêmes questions qui ont poussé l'homme à chercher, à appréhender les difficultés inhérentes à la physique cachée derrière ce phénomène. Ces questions, qui existent depuis que l'homme est un homme, demeurent encore aujourd'hui en grande partie sans réponse. Le développement de théories, de modèles fondés sur des raisonnements inductifs à partir des observations de la nature, est l'un des seuls moyens de saisir la réalité. D'établir un cadre logique permettant d'aborder ce phénomène dont les observations sont le plus souvent indirectes.

Les lois qui gouvernent la propagation des ondes sismiques à l'intérieur de notre planète sont en général bien comprises. Hormis des effets secondaires indispensables dans certains cas, ces ondes sont fondamentalement contrôlées d'une part, par des relations linéaires entre les contraintes et les déformations du milieu, et d'autre part, par l'équation du mouvement Newtonienne, reliant les accélérations du milieu avec le gradient des contraintes. Cependant, l'observation de failles exposées à la surface de la Terre montre que les déformations et les structures géologiques associées aux failles ne sont pas en accord avec les lois physiques mentionnées. D'autres relations constitutives contrôlent le rapport entre déformations et contraintes au voisinage des failles. D'autres lois, qui tiennent compte à la fois de la mécanique du frottement et des processus inélastiques reliés au fluage, à la micro-fracturation ou à la thermo-pressurisation dans une zone autour de la surface de rupture. Un autre paramètre physique qui détermine également la rupture des séismes est la condition en contrainte le long de la faille avant l'initiation de

la rupture. Finalement, un séisme n'est que la libération brutale de l'énergie mécanique accumulée par le milieu, qui se manifeste sous la forme de déformations produites préalables, induites par ces contraintes préexistantes. Globalement, cet état initial de contraintes est le résultat de la superposition d'une charge due au régime tectonique régional et d'un champ résiduel généralement plus hétérogène, associés à la sismicité antérieure dans le milieu environnant. Ainsi, pour répondre aux questions posées au début de cette introduction, les scientifiques se sont donc consacrés à l'étude de toutes ces propriétés et paramètres physiques qui gouvernent l'histoire de la rupture des séismes, et par conséquent, à la nature du champ d'ondes sismiques excité.

De nombreuses expériences de laboratoire ont permis de caractériser précisément le frottement entre deux blocs glissant l'un contre l'autre. Des relations constitutives ont été ainsi obtenues, permettant de décrire le mouvement des blocs en fonction des tractions exercées sur la surface de contact. Des simulations numériques de la rupture dynamique des séismes ont permis de mieux comprendre l'importance de certains paramètres constitutifs dans la relaxation du milieu et dans le champ d'ondes radié. Elles ont aussi suggéré la possibilité de contraindre certains de ces paramètres à partir des enregistrements des ondes sismiques en surface, ou bien en intégrant de l'information déterminée indépendamment par le biais des descriptions purement cinématiques de la source. Néanmoins, l'état de contraintes initial reste toujours un ingrédient fondamental difficile à contraindre dans la nature. Les valeurs absolues de cet état, directement relié à la quantité d'énergie libérée par un séisme, ne peut être déterminé ponctuellement que dans des circonstances très spécifiques et rares : soit par des mesures in-situ de forage, soit lorsque le mouvement des blocs de la faille décrit des trajectoires non rectilignes. Des efforts récents sur la mise au point de techniques d'inversion ont permis d'inférer ces conditions initiales à partir des sismogrammes observés. Pourtant, les hypothèses faites pour y parvenir ont une importance capitale qui font de ces techniques un chantier encore vaste à explorer. La détermination de la chute statique des contraintes associée à l'histoire du glissement sur la faille est un procédé direct qui devient de plus en plus utilisé, surtout dans le cas de failles de géométrie plane. Même si cette information reste incomplète, elle permet d'avancer dans la reconstruction de la rupture dynamique des séismes. En raison de l'interdépendance qui existe entre tous les paramètres physiques mentionnés, modéliser ce phénomène représente un problème difficile. Ainsi, afin de le résoudre en restant proche de la réalité, l'intégration du plus grand nombre d'observations est nécessaire, et permet de mieux contraindre nos modèles en faveur d'une meilleure et plus juste détermination des paramètres physiques inconnus.

Du point de vue mathématique, la propagation de la rupture sismique le long d'une faille plane dans un milieu homogène représente un problème symétrique. Cette symétrie autorise des simplifications qui facilitent souvent l'analyse numérique du phénomène. Cependant, il suffit d'observer les traces en surface de certaines failles réactivées par de grands tremblements de terre pour comprendre que bien souvent les failles ne sont pas planes. Supposer une symétrie lorsqu'on étudie la dynamique rapide des séismes peut donc devenir un handicap. Un handicap qui affecte directement l'évaluation d'autres paramètres fondamentaux. L'étude du transfert de la rupture dans des réseaux complexes de failles sous l'action d'un chargement externe, ou bien des simulations dynamiques réalisées en tenant compte des variations de géométrie de la surface de rupture, ont mis en évidence l'importance de cette géométrie. L'excitation d'ondes diffractées quand le front de rupture change brusquement de direction a une incidence directe à la fois dans le bilan énergétique local et dans la signature spectrale du champ d'ondes radié. Les conditions initiales sur la faille sont aussi très sensibles à la géométrie. D'une part, à cause des singularités des contraintes générées par les dislocations antérieures sur cette même faille (*i.e.* champ résiduel) et d'autre part, à cause de la variation latérale de la projection du champ tectonique régional sur la surface de rupture non-planaire.

La propagation de la rupture d'un séisme dépend de la physique locale au voisinage de la faille, décrite dans les paragraphes précédents. Cependant, elle dépend aussi fortement d'une physique globale à travers la propagation des ondes. Autrement dit, les propriétés élastiques (ou inélastiques) du milieu encaissant sont un acteur primordial dans le vaste échange entre la source et son environnement pendant la dynamique rapide des séismes. Pour cette raison, afin de pouvoir étudier la rupture des tremblements de terre dans les conditions les plus réalistes possibles, nous avons décidé de construire un modèle numérique permettant de tenir compte de trois facteurs : des lois constitutives de frottement complexes, des hétérogénéités du milieu encaissant et des géométries non-planaires de la faille. Pour y parvenir, nous avons choisi la méthode des différences finies (DF) puisqu'elle permet de simuler la rupture dynamique de séismes à l'intérieur de milieux arbitrairement hétérogènes avec des lois de frottement complexes d'une manière considérablement plus efficace qu'en utilisant n'importe quelle autre méthode numérique parmi les plus répandues. Pourtant, à cause des maillages cartésiens réguliers employés dans la plupart des méthodes en DF, le volet géométrie non-planaire de la faille est toujours demeuré inabordable. Par conséquent, la première question que nous nous sommes posée dans ce travail est la suivante : *peut-on simuler la rupture dynamique de failles non-planaires en différences finies ?*

Si l'on répond à cette question par l'affirmative, alors une deuxième question se pose automatiquement : *dans quelles circonstances la géométrie joue-t-elle un rôle incontournable ?*

Ce travail est composé de deux parties. Une première consacrée à la propagation d'ondes en DF et une deuxième consacrée la rupture dynamique des séismes. La première partie possède un seul chapitre (le chapitre 1). Dans ce chapitre je propose une révision générale des concepts de base de la méthode des différences finies. Je souligne donc plusieurs aspects fondamentaux concernant sa précision, sa stabilité et l'état de l'art sur certains points. Une réflexion particulière est développée sur la comparaison de la méthode en DF utilisée pour construire les modèles de rupture, basée sur la grille partiellement en quinconce (GPQ) proposée par Saenger et al. (2000), et celle largement répandue introduite dès les années 80 par Madariaga (1976). Les conditions aux limites sur la surface libre ainsi qu'à l'intérieur d'une fracture plane sont traitées, en discutant certaines approches préexistantes dans chaque cas. Des tests d'absorption des conditions de radiation PML sont présentés en termes d'énergie mécanique dans l'espace et de sismogrammes résiduels pour des milieux hétérogènes. Ce chapitre, essentiellement tourné vers le volet propagation d'ondes, est justifié par le fait qu'il a fallu d'abord mettre au point les codes de propagation 2D et 3D dans la GPQ (avec PML) pour y construire ensuite les modèles de rupture.

La deuxième partie est composée de trois chapitres. Dans le premier (le chapitre 2), une autre révision est réalisée mais cette fois-ci sur la mécanique de la rupture. Le problème central de ce travail est posé : la rupture dynamique des séismes. Des réflexions sont consacrées à l'état de contraintes singulier et non-singulier associé à la rupture d'une faille ainsi qu'au bilan énergétique correspondant. Je discute des différents critères de rupture, en détaillant les propriétés et qualités de la formulation discrète utilisée dans les chapitres ultérieurs. Finalement, différents aspects théoriques de la propagation spontanée sont présentés et illustrés à travers des simulations numériques, en détaillant à chaque fois les causes physiques qui déterminent la vitesse de propagation des séismes. Dans le chapitre suivant (chapitre 3), j'introduis un nouveau modèle numérique en DF 2D GPQ permettant de simuler la rupture de failles non-planaires. La précision du modèle est discutée en fonction d'une loi d'échelle qui gouverne la discrétisation de la source. Des solutions numériques pour les cas « self-similaire » sont comparées avec une solution analytique. La rupture spontanée non-planaire est validée et ensuite testée à l'intérieur d'un milieu hétérogène. Dans le dernier chapitre (chapitre 4), différents modèles numériques en DF 3D GPQ sont discutés, mis en œuvre et comparés avec un modèle intégral de frontière (BIE) dans le

cadre des failles planes. Puis, le modèle de rupture 3D permettant la simulation de failles non-planaires est introduit en suivant la même philosophie que pour le modèle 2D du chapitre précédent. Une analyse de convergence de la méthode est réalisée en fonction de la résolution de la zone de cohésion. Le modèle est validé en comparant les résultats pour la rupture spontanée, le long de failles planes avec la méthode en DF « traction-at-split-node », et le long de failles non-planaires avec la méthode BIE. L'effet de la géométrie dans la propagation de la rupture est mis en évidence dans le cas de failles non-planaires (*i.e.* paraboliques) en présence d'une charge tectonique biaxiale. Des simulations du séisme de Landers (1992, $M_W = 7.3$) tenant compte de sa véritable géométrie sont présentées et discutées eu égard aux résultats publiés antérieurement, où la géométrie de la faille a été considérée comme plane. Les résultats sur le séisme de Landers indiquent que la géométrie de la faille joue un rôle fondamental.

Trois annexes sont incluses à la fin de ce travail. Dans le premier (l'annexe A), on présente les opérateurs en différences finies 2D à l'ordre quatre dans l'espace. Dans le deuxième (l'annexe B) on présente le système d'équations élastodynamiques pour la formulation vitesse-contrainte 3D en différences finies à l'ordre deux dans le temps et à l'ordre quatre dans l'espace. Enfin, dans la troisième annexe (l'annexe C) je fais une chronique personnelle du déroulement de ce projet de recherche ainsi qu'un bilan humain et économique.

Première partie

Propagation des Ondes

Chapitre 1

Propagation des Ondes en Différences Finies

Sommaire

1.1	Introduction	11
1.2	Approximation en Différences Finies	14
1.2.1	Opérateurs Différentiels en Différences	14
1.2.2	Equation d'Onde	22
1.2.3	Schémas Explicites <i>vs</i> Schémas Implicites	24
1.2.4	Dispersion Numérique	26
1.2.5	Condition de Stabilité	36
1.2.6	Grilles Numériques Irrégulières	44
1.3	Equations de l'Elastodynamique	47
1.3.1	Contraintes et Déformations	47
1.3.2	Equation du Mouvement	48
1.3.3	Systèmes Hyperboliques d'EDP	49
1.4	Discrétisation des Equations	52
1.4.1	Grilles en Quinconce	53
1.4.2	Opérateurs Différentiels Tournés	57
1.4.3	Equations en Différences Tournées	64
1.4.4	Stabilité et Dispersion	73
1.5	Conditions aux Limites et Conditions Initiales	82
1.5.1	Conditions de Frontière	82
1.5.2	Conditions de Radiation PML	99
1.6	Conclusions	127

1.1 Introduction

L'A modélisation numérique de la propagation des ondes à l'intérieur de notre planète est un moyen de plus en plus répandu pour comprendre et interpréter le mouvement du sol (*e.g.*, Tsuboi et al., 2003, Komatitsch et al., 2004, Benitez & Olsen, 2005). Grâce à une puissance de calcul grandissante, de nombreuses méthodes continuent à être développées. Les approches les plus adaptées pour l'interprétation des sismogrammes en milieux complexes sont probablement les méthodes asymptotiques, comme le tracé de rayons (*e.g.*, Virieux, 1996, Lambaré & Virieux, 2006). Pourtant, malgré leur efficacité informatique, ce sont des approches valables uniquement à hautes fréquences qui ne génèrent qu'une partie de la solution (*i.e.* l'onde P directe ou des réflexions PS). Pour cette raison, ces méthodes ne sont pas intéressantes pour la modélisation de la rupture des séismes, sujet central de ce travail, caractérisée par l'excitation d'une gamme importante de fréquences

notamment dans le champ proche de la source. Ce sont donc les méthodes numériques pour la propagation des ondes dites complètes qui ont permis le développement d'outils adaptés à l'étude de la physique de la source sismique.

Il y a essentiellement trois familles de méthodes complètes traditionnellement utilisées pour la propagation des ondes : les méthodes intégrales de frontière (IF), les méthodes en éléments finis (EF) et les méthodes en différences finies (DF). Les méthodes IF sont très répandues parce qu'elles réduisent d'un, le nombre de dimensions à discrétiser du problème. Ces méthodes discrétisent uniquement des surfaces où les propriétés du milieu permettent la construction analytique des fonctions de Green (Burridge, 1969, Aki & Larner, 1970, Sanchez-Sesma, 1983, Bard & Bouchon, 1985, Aubry & Clouteau, 1991, Sanchez-Sesma & Luzon, 1995). L'interaction des éléments de frontière peut devenir singulière lorsque cette interaction a lieu sur le même élément (voir introduction chapitre 2). Des méthodes de régularisation sont ainsi très importantes pour évaluer ces singularités et assurer la précision des approches IF. Les méthodes en EF ont été pendant longtemps utilisées pour la propagation des ondes en milieux complexes (*e.g.*, Lysmer & Drake, 1972, Day, 1977, Marfurt, 1984, Aubry et al., 1985). Cependant, une nouvelle classe de méthodes en EF a été développée (Faccioli et al., 1997, Komatitsch, 1997, Komatitsch & Vilotte, 1998, Komatitsch & Tromp, 1999, Chaljub, 2000), connue comme la méthode d'éléments spectraux (ES) qui, basée sur des interpolant locaux d'ordre supérieur, possède à la fois la flexibilité géométrique des EF et la précision des méthodes pseudo-spectrales (*e.g.*, Tessmer et al., 1992). La méthode en ES a été rapidement développée et appliquée à des problèmes divers de propagation à des échelles régionales ou bien à l'échelle global de la Terre (Komatitsch & Tromp, 2002, Capdeville et al., 2003, Tsuboi et al., 2003, Chaljub et al., 2003, Komatitsch et al., 2004).

Enfin, nous avons la méthode numérique des DF, utilisée tout au long de ce travail. Probablement aussi répandue que celle des EF, dès les années 60 jusqu'à aujourd'hui, les méthodes en DF ont représenté un outil de simulation incontournable grâce à sa simplicité et son efficacité numérique (Alterman & Karal, 1968, Alford et al., 1974, Kelly et al., 1976, Madariaga, 1976, Virieux, 1986). L'application d'opérateurs d'ordre supérieur (Dablain, 1986, Holberg, 1987, Levander, 1988) avec des moyennes harmoniques locales pour la discrétisation du milieu ainsi que des grilles irrégulières (Graves, 1996, Pitarka, 1999, Wang et al., 2001, Moczo et al., 2002, Kang & Baag, 2004) font de la méthode un outil très précis et efficace pour simuler la propagation d'ondes en 3D (Moczo et al., 1999, Olsen, 2000, Day & Bradley, 2001, Moczo et al.,

2001, Minkoff, 2002, Saenger et al., 2004, Saenger & Bohlen, 2004, Benitez & Olsen, 2005, Olsen et al., 2006). Ils existent d'autres stratégies en DF plus sophistiquées qui considèrent des grilles irrégulières non-orthogonales, soit structurées soit non-structurées (*e.g.*, Zhang, 1997, Zhang & Tielin, 1999), ou bien des grilles curvilignes. Elles permettent d'améliorer l'application des conditions aux limites le long des frontières de géométrie complexes (Taflove & Hagness, 2000, Xie et al., 2002, Zhang, 2005). Malheureusement, elles n'ont pas encore été très développées dans le domaine de la propagation des ondes élastiques. Une révision des méthodes en DF pour la propagation d'ondes sismiques a été récemment réalisée par Moczo et al. (2006).

Des approches alternatives pour la propagation d'ondes élastiques existent, comme les méthodes en volumes finis (Dormy & Tarantola, 1995, Kaser & Igel, 2001), en éléments distincts (Toomey & Bean, 2000, Dalguer et al., 2001), ou bien des méthodes mixtes combinant différentes approches existantes (Moczo et al., 1997, Aochi et al., 2005). Dans ce travail, nous avons abordé le problème de la rupture dynamique des séismes en adoptant une méthode en DF assez récente, proposée par Saenger et al. (2000) pour l'équation d'onde élastodynamique. Le développement des modèles numériques pour la rupture, basés sur cette méthode, constitue l'objet de la deuxième partie de ce travail et le sujet central de ma recherche doctorale. Puisqu'il a fallu mettre au point le code de propagation pour le développement du modèle de rupture en 3D (chapitre 4), dans cette première partie je fais une révision générale de la méthode des différences finies, en abordant les concepts de base qui la distinguent. Les avantages et inconvénients de la méthode sont soulignés ainsi que les différents aspects qui contrôlent la précision numérique (*i.e.* la dispersion) et la stabilité des différents schémas. Une fois le système d'équations élastodynamiques pour la propagation d'ondes établi, sa discrétisation est discutée et formulée rigoureusement au deuxième et quatrième ordre dans l'espace, en déduisant les opérateurs différentiels correspondants. Une réflexion poussée a été développée, portant sur la comparaison du schéma en DF adopté avec celui qui a été le plus répandu depuis les années 80. Les conditions aux limites associées à la surface libre et au développement d'une fracture sont également traitées en discutant des différentes approches existantes pour chaque cas. Enfin, la formulation des conditions d'absorption d'énergie « *Perfectly Matched Layer* » (PML) est présentée en signalant les attributs numériques de l'implémentation faite. Des tests d'absorption dans des milieux homogènes et hétérogènes sont réalisés en termes d'énergie mécanique de l'espace 3D et de sismogrammes résiduels.

1.2 Approximation en Différences Finies

1.2.1 Opérateurs Différentiels en Différences

Un passage clé dans la méthode des différences finies est la substitution des opérateurs différentiels continus des équations différentielles (*e.g.*, l'opérateur Nabla (∇) pour les dérivées spatiales) par des opérateurs discrets formulés en terme de variables évaluées sur les points d'une grille discrétisant le domaine d'intérêt. Les dérivées d'une fonction donnée faisant partie des opérateurs différentiels, peuvent être approximées à partir de la troncature et de la combinaison linéaire du développement de Taylor de la fonction en question.

Soit $u(x)$ une fonction scalaire. Si les dérivées de u par rapport à x sont continues jusqu'au $(m + 1)$ ème ordre, $u^{(m+1)}$, alors :

$$u(x) = u(a) + (x - a)u'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}u''(a) + \dots + \frac{(x - a)^m}{m!}u^{(m)}(a) + R_m \quad (1.1)$$

où R_m est le résidu, ou erreur de troncature, du développement de u autour du point a . La limite de R_m lorsque m tend vers l'infini est égale à zéro. Le développement en série de Taylor donnée par 1.1 peut donc être exprimé, autour d'un autre point quelconque x_i , comme :

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x - x_i)^m u^{(m)}(x_i)}{m!}. \quad (1.2)$$

Si l'on ne s'intéresse à la valeur de la fonction u qu'en des points régulièrement espacés de la variable indépendante x , par exemple aux points :

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= (i - 1)\Delta x \\ x_i &= i\Delta x \\ x_{i+1} &= (i + 1)\Delta x \end{aligned} \quad (1.3)$$

où Δx est un incrément constant de x , alors la représentation discrète de la variable dépendante $u(x)$ est la suivante :

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}) &\rightarrow u_{i-1} \\ u(x_i) &\rightarrow u_i \\ u(x_{i+1}) &\rightarrow u_{i+1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Les phénomènes physiques sont souvent modélisés par des équations différentielles partielles. Autrement dit, les fonctions solution du problème sont

fonction de plusieurs variables. Elles peuvent dépendre des variables spatiales ainsi que du temps. Alors l'approximation des dérivées est bien entendu une approximation des dérivées partielles.

Admettons que notre fonction u soit une fonction de la variable spatiale x mais aussi du temps t , c'est-à-dire $u = u(x, t)$. Par analogie avec la notation introduite dans les équations 1.3 et 1.4 par rapport à la variable spatiale x , la représentation discrète d'une telle fonction est la suivante :

$$u(x_i, t_n) \rightarrow u_i^n \quad \text{où} \quad x_i = i\Delta x \quad \text{et} \quad t_n = n\Delta t \quad (1.5)$$

Δt étant un incrément constant de la variable indépendante t .

Si l'on attribue une valeur fixe à une des deux variables indépendantes, la fonction $u(x, t)$ peut être approximée à travers le développement en série de Taylor (équation 1.2) en substituant les dérivées ordinaires par des dérivées partielles. Ainsi, pour un temps donnée t_n , on peut évaluer l'expression 1.2 dans les points x_{i+1} et x_{i-1} de l'espace et la développer jusqu'aux dérivées d'ordre m donnant, respectivement :

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x \frac{\partial u_i^n}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial x^3} + \dots + \frac{(\Delta x)^m}{m!} \frac{\partial^m u_i^n}{\partial x^m} \quad (1.6)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x \frac{\partial u_i^n}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial x^3} + \dots + \frac{(\Delta x)^m}{m!} \frac{\partial^m u_i^n}{\partial x^m} \quad (1.7)$$

1.2.1.1 Première Dérivée Partielle

Si l'on s'intéresse à la première dérivée de u par rapport à x , c'est-à-dire à l'opérateur $(\partial/\partial x)$, alors il y a trois principaux opérateurs discrets en différences qui l'approximent. En négligeant les terme d'ordre supérieur à deux dans l'expression 1.6 (*i.e.* $m = 2$) nous avons :

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x \frac{\partial u_i^n}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i+\xi_1}^n}{\partial x^2} \quad (1.8)$$

où le point $x_{i+\xi_1}$ se trouve quelque part dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) . En isolant la dérive première on retrouve l'opérateur discret dit en « **différences en avant** » :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1.9)$$

où

$$O(\Delta x) = \frac{-\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u_{i+\xi_1}^n}{\partial x^2}.$$

De façon similaire, en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux dans l'expression 1.7 (*i.e.* $m = 2$) et en isolant la dérivée première, on retrouve l'opérateur discret en « **différences en arrière** » :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1.10)$$

où

$$O(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u_{i+\xi_2}^n}{\partial x^2}$$

où le point $x_{i+\xi_2}$ se trouve quelque part dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i) .

Le terme $O(\Delta x)$ des expressions 1.9 et 1.10 représente l'erreur de troncature du développement de Taylor. Puisque cette erreur tend vers zéro lorsque Δx tend vers zéro, on dit qu'elle est de premier ordre. Donc, les opérateurs en *différences en avant* et en *différences en arrière* données par 1.9 et 1.10 respectivement ont une précision du premier ordre dans l'espace.

En négligeant les termes d'ordre supérieur à trois dans les expressions 1.6 et 1.7 et en faisant la soustraction des deux, on retrouve :

$$u_{i+1}^n - u_{i-1}^n = 2\Delta x \frac{\partial u_i^n}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{\partial^3 u_{i+\xi_3}^n}{\partial x^3}. \quad (1.11)$$

On peut montrer que, grâce au théorème de la valeur moyenne, le point $x_{i+\xi_3}$ se trouve quelque part dans l'intervalle (x_{i-1}, x_{i+1}) . En isolant une autre fois la dérivée première de u on retrouve ainsi l'opérateur discret en « **différences centrées** » :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (1.12)$$

où

$$O[(\Delta x)^2] = \frac{-(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i+\xi_3}^n}{\partial x^3}.$$

Afin de déduire l'opérateur discret pour la dérivée première de u par rapport à t , il faut d'abord évaluer la fonction $u(x, t)$ en un point fixe, x_i , de l'espace. Par analogie avec le procédé qui nous a amené jusqu'à l'équation 1.12, on retrouve l'opérateur en *différences centrées* par rapport au temps :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + O[(\Delta t)^2]. \quad (1.13)$$

Dans les expressions 1.12 et 1.13, l'erreur de troncature $O[(\Delta x^2)]$ tend vers zéro lorsque le carré de l'incrément de la variable indépendante, soit spatiale, soit temporelle, tend vers zéro. Par conséquent, ces deux opérateurs en *différences centrées* sont des approximations de la dérivée première de u avec une précision d'ordre deux respectivement dans l'espace et dans le temps. Un autre aspect intéressant qui distingue les opérateurs centrés est le fait de ne pas calculer les dérivées au même endroit que le champ sur lequel ils opèrent. Par exemple, la dérivée spatiale de u approximée par 1.12 se localise dans le point $i\Delta x$ alors que, pour obtenir une telle dérivée, l'opérateur a fait appel au champ u dans les points $(i-1)\Delta x$ et $(i+1)\Delta x$ de l'espace.

La comparaison de l'erreur de troncature des opérateurs en *différences décentrées* (1.9 et 1.10) et celle des opérateurs en *différences centrées* (1.12 et 1.13) montre que le taux de convergence vers la solution exacte de ces dernières est supérieur lorsque le pas de discrétisation de la variable indépendante tend vers zéro. Autrement dit, la précision atteinte pour les opérateurs centrés est supérieure pour le même pas de discrétisation.

Pourtant il est possible de construire des opérateurs en *différences en avant* et en *différences en arrière* avec une précision du deuxième ordre pour la dérivée première de u . En négligeant les termes d'ordre supérieur à quatre de la série de Taylor (équation 1.2) et en l'évaluant dans le point x_{i+2} de l'espace, on a :

$$u_{i+2}^n = u_i^n + 2\Delta x \frac{\partial u_i^n}{\partial x} + \frac{4(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} + \frac{8(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i+\xi_4}^n}{\partial x^3} \quad (1.14)$$

où le point $x_{i+\xi_4}$ se trouve quelque part dans l'intervalle (x_i, x_{i+2}) . Afin d'éliminer la dérivée seconde de u , on peut multiplier u_{i+1}^n (équation 1.6) par quatre et soustraire u_{i+2}^n (équation 1.14) pour obtenir :

$$u_{i+1}^n - u_{i+2}^n = 3u_i^n + 2\Delta x \frac{\partial u_i^n}{\partial x} - \frac{4(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i+\xi_5}^n}{\partial x^3} \quad (1.15)$$

où le point $x_{i+\xi_5}$ se trouve quelque part de l'intervalle (x_i, x_{i+2}) . En isolant la dérivée première on obtient l'opérateur en *différences en avant* suivant :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = \frac{-3u_i^n + 4u_{i+1}^n - u_{i+2}^n}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (1.16)$$

où

$$O[(\Delta x)^2] = \frac{(\Delta x)^2}{3} \frac{\partial^3 u_{i+\xi_5}^n}{\partial x^3}$$

qui représente une approximation de la dérivée de u avec une précision du deuxième ordre dans l'espace. Par analogie, l'opérateur en *différences en arrière* avec le même ordre de précision peut être obtenu en multipliant u_{i-1}^n (équation 1.7) par moins quatre et en additionnant les termes du développement de Taylor jusqu'à l'ordre trois évalué en x_{i-2} . Une fois isolée la dérivée première u par rapport à x on trouve :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = \frac{3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (1.17)$$

où

$$O[(\Delta x)^2] = \frac{-(\Delta x)^2}{3} \frac{\partial^3 u_{i+\xi_6}^n}{\partial x^3}$$

et $x_{i+\xi_6}$ étant un point de l'espace qui se localise quelque part dans l'intervalle (x_{i-2}, x_i) .

La comparaison des opérateurs de deuxième ordre en *différences décentrées* (1.16 et 1.17) avec les opérateurs du même ordre en *différences centrées* (1.12 et 1.13) met en évidence que, pour atteindre la même précision, le **stencil**¹ des opérateurs décentrés doit être plus étendu spatialement que le stencil associé aux opérateurs centrés. Cela signifie, en terme d'efficacité d'un éventuel algorithme, que les opérateurs en *différences décentrées* ont besoin d'effectuer plus d'opérations arithmétiques par dérivée mais aussi de stocker plus de données en mémoire vive dans le cas des dérivées temporelles.

1.2.1.2 Seconde Dérivée Partielle

On s'intéresse maintenant aux opérateurs différentiels du type $(\partial^2/\partial x^2)$. Les approximations de premier ou deuxième ordre d'un tel opérateur en *différences décentrées* ainsi que l'approximation du deuxième ordre en *différences centrées* peuvent être construites à partir des développements de Taylor introduits précédemment. Dans le cas de l'opérateur en *différences en avant* il suffit de multiplier u_{i+1}^n (équation 1.6) par moins deux et d'additionner u_{i+2}^n (équation 1.14) pour obtenir, une fois les termes rangés :

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} = \frac{u_i^n - 2u_{i+1}^n + u_{i+2}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (1.18)$$

où

$$O(\Delta x) = \Delta x \frac{\partial^3 u_{i+\xi_7}^n}{\partial x^3}$$

¹Le **stencil** d'un ou de plusieurs opérateurs discrets est défini par l'ensemble de points de la ou des variables indépendantes auxquels le ou les opérateurs font appel pour approximer une dérivée. Par exemple, les points x_i , x_{i-1} et x_{i-2} dans l'équation 1.17.

et $x_{i+\xi_7}$ étant un point de l'espace localisé quelque part dans l'intervalle (x_i, x_{i+2}) . Dans le cas de l'opérateur en *différences en arrière*, il suffit de multiplier u_{i-1}^n (équation 1.7) par moins deux et d'ajouter le développement de Taylor (1.2) jusqu'à la dérivée de troisième ordre et de l'évaluer en x_{i-2} . En isolant la dérivée seconde par rapport à x on a :

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} = \frac{u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (1.19)$$

où

$$O(\Delta x) = -\Delta x \frac{\partial^3 u_{i+\xi_8}^n}{\partial x^3}$$

et $x_{i+\xi_8}$ est un point dans l'intervalle (x_{i-2}, x_i) .

Pour obtenir l'opérateur en *différences centrées* il suffit tout simplement d'ajouter les développements en séries de Taylor pour u_{i+1}^n (équation 1.6) et pour u_{i-1}^n (équation 1.7) et d'isoler la dérivée seconde de u pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (1.20)$$

où

$$O[(\Delta x)^2] = \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u_{i+\xi_9}^n}{\partial x^4}$$

et $x_{i+\xi_9}$ étant un point de l'espace qui se localise quelque part à l'intérieur de l'intervalle (x_{i-1}, x_{i+1}) . Pour obtenir l'approximation de la dérivée seconde de u par rapport au temps, il faut évaluer notre fonction u en un point fixe de l'espace, par exemple, en x_i . Par analogie avec le procédé suivi pour déduire l'expression 1.20, nous avons l'opérateur en *différences centrées* :

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2]. \quad (1.21)$$

Finalement, les opérateurs en *différences décentrées* ayant une précision du deuxième ordre, similaire à celles des approximations centrées 1.20 et 1.21, peuvent être trouvés, comme dans tous les cas précédents, en faisant des combinaisons linéaires du développement de Taylor 1.2 évalué aux points régulièrement espacés d'un Δx dans l'intervalle (x_{i-3}, x_{i+3}) . Ainsi, l'approximation en *différences en avant* pour la dérivée seconde de u avec une précision du deuxième ordre dans l'espace est la suivante :

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} = \frac{2u_i^n - 5u_{i+1}^n + 4u_{i+2}^n - u_{i+3}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]. \quad (1.22)$$

De même, l'approximation en *différences en arrière* pour la dérivée seconde de u avec une précision du deuxième ordre dans l'espace est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} = \frac{2u_i^n - 5u_{i-1}^n + 4u_{i-2}^n - u_{i-3}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]. \quad (1.23)$$

De façon similaire aux approximations de la dérivée première de u , la comparaison des opérateurs en *différences décentrées* 1.22 et 1.23 avec l'opérateur en *différences centrées* 1.20 montre que, pour une même précision, le stencil du dernier reste plus compact. Cela veut dire que l'approximation en *différences centrées* nécessite moins d'opérations arithmétiques mais aussi, concernant les dérivées temporelles, celles-ci nécessitent moins de mémoire vive.

1.2.1.3 Opérateurs d'Ordre Supérieur

Si l'on s'intéresse à la performance des opérateurs discrets en différences finies, une simple comparaison en terme de nombre d'opérations de point flottant par unité arithmétique peut amener à tirer de fausses conclusions. Par exemple, une comparaison des opérateurs en *différences en avant* 1.18 et 1.22, respectivement de premier et deuxième ordre de précision dans l'espace, indiquerait que le premier est plus performant que le deuxième. Pourtant, l'évaluation de l'efficacité d'un opérateur doit se faire lors de son application pour résoudre des problèmes pratiques tels que la résolution des équations différentielles qui modélisent un phénomène physique. Dans ce cas, il y a deux facteurs qui doivent être pris en compte pour juger correctement la performance d'un algorithme : la sollicitation du CPU et la sollicitation de la mémoire vive.

Quand on modélise numériquement un phénomène comme celui de la propagation des ondes, certains problèmes liés à la discrétisation des équations apparaissent. Parmi eux se trouve la dispersion numérique (voir sections 1.2.4 et 1.4.4). Cet artefact dépend principalement des pas de discrétisation spatial et temporel, et rend la vitesse de propagation des ondes dépendante de leur fréquence (*i.e.* de leur longueur d'onde). L'efficacité d'une approche numérique se trouve dans sa capacité plus ou moins grande à minimiser cet effet. La question qui soulève ce point est celle du prix à payer pour le minimiser.

Pour mieux cerner la réponse à cette question, on peut la reformuler en terme d'échantillonnage du signal : combien faut-il de points de la grille par longueur d'onde minimale, pour minimiser la dispersion du signal dans le

domaine fréquentiel d'intérêt. De ce point de vue, l'application d'opérateurs d'ordre inférieur (*e.g.* premier ou deuxième ordre) implique un suréchantillonnage du modèle qui se traduit par de lourds stockage et transfert de données à chaque intégration en temps. Par exemple, pour obtenir une solution précise de l'équation d'onde acoustique en appliquant des opérateurs du deuxième ordre dans le temps et dans l'espace (équations 1.20 et 1.21), c'est-à-dire un schéma $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$, il faut un échantillonnage d'au moins dix points de grille par longueur d'onde minimal du signal (Alford et al., 1974). Alors que, comme on le verra dans la section 1.2.4, l'application d'un schéma d'ordre $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^4]$ dans le même cas, ou dans le cas élastique (P-SV), ne nécessite que cinq points par longueur d'onde minimale (Alford et al., 1974, Levander, 1988). Cela implique une réduction de mémoire d'un facteur de 0.25 et de 0.125 respectivement dans les cas bidimensionnel (2D) et tridimensionnel (3D) par rapport au schéma d'ordre inférieur. Par conséquent, plus l'algorithme est rapide, *i.e.* plus les opérateurs sont courts, plus le problème doit être suréchantillonné, et donc plus le transfert de données pour chaque itération en temps est important. Dans ce contexte, il est clair que considérer le nombre d'opérations par point flottant comme mesure d'efficacité, sans tenir compte du stockage en mémoire ou de la vitesse de transfert de données, peut amener à une mauvaise estimation de la performance d'un algorithme.

Pour illustrer quantitativement l'efficacité des divers opérateurs en différences, Dablain (1986) a résolu l'équation d'onde acoustique bidimensionnelle avec les schémas $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$, $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^4]$ et $O[(\Delta t)^4, (\Delta x)^{10}]$. Il a d'abord cherché à déterminer, pour chacun des schémas, le temps de calcul d'une cellule de la grille (unité arithmétique, UA) ainsi que le nombre total d'opérations nécessaires pour un même modèle et une même résolution. A partir de cette information, il a donc déterminé le temps total de calcul par schéma (tableau 1.1). Le modèle hétérogène 2D fait 10 km de longueur par 3 km de profondeur, avec un pulse de Ricker à 50 Hz comme fonction source. L'analyse de ces résultats montre que, même si le temps CPU-UA est trois fois plus court pour le schéma d'ordre inférieur par rapport à celui du schéma d'ordre supérieur (deuxième colonne), le temps CPU total est presque six fois plus grand (troisième colonne). De plus, il est clair que la plus grande différence en temps de calcul total se trouve dans le passage du schéma (2, 2) au schéma (2, 4) et non pas dans le passage du schéma (2, 4) au schéma (4, 10). Pourtant, le véritable avantage des opérateurs d'ordre supérieur à quatre n'est pas le gain en temps de calcul mais l'économie de mémoire. Une conséquence immédiate de cet avantage est, pour une mémoire de calcul finie, la possibilité de réaliser soit des modèles plus grands, soit d'obtenir des

Schéma	CPU-UA	CPU-Total
(2,2)	0.31	5.86
(2,4)	0.45	1.08
(4,10)	1.0	1.0

TAB. 1.1: Temps CPU par unité arithmétique (CPU-UA) et temps CPU total par simulation, normalisés par rapport au schéma d'ordre supérieur $O[(\Delta t)^4, (\Delta x)^{10}]$, troisième ligne (modifié de Dablain (1986)).

solutions précises à une plus haute fréquence.

Un opérateur de quatrième ordre très répandu pour la dérivée première de u est le suivant :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = \frac{c_1 \left(u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + c_2 \left(u_{i+\frac{3}{2}}^n - u_{i-\frac{3}{2}}^n \right)}{\Delta x} + O[(\Delta x)^4] \quad (1.24)$$

où $c_1 = 9/8$ et $c_2 = -1/24$. L'équation 1.24 représente un opérateur en *différences centrées* qui a la particularité de calculer la dérivée de u au point $i\Delta x$ qui se trouve décalé d'un demi Δx par rapport à la grille régulièrement espacée où se situent les points $(i \pm 1/2)\Delta x$ et $(i \pm 3/2)\Delta x$ du stencil. Cette astuce implique donc un décalage spatial (ou temporel) du champ u par rapport à sa propre dérivée. Ce concept représente la base de la construction des « grilles en quinconce » sur lesquelles s'appuient de nombreuses approches numériques pour la résolution d'équations différentielles (voir section 1.4.1). Un procédé généralisé pour construire des opérateurs d'ordre supérieur à quatre est décrite par Dablain (1986) (voir aussi Holberg, 1987).

1.2.2 Equation d'Onde

Considérons l'équation d'onde scalaire (*i.e.* acoustique) unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.25)$$

où c est la vitesse de propagation des ondes et $u = u(x, t)$, le champ de déplacement. Si l'on substitue les dérivées partielles par les opérateurs en *différences centrées* 1.20 et 1.21 obtenus dans la section précédente, on obtient :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} \approx c^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (1.26)$$

qui représente une approximation de l'équation d'onde avec une précision du deuxième ordre dans le temps et dans l'espace, $O[(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2]$, à laquelle on fait souvent référence comme solution de précision (2,2). En isolant la valeur plus tardive de u dans le point de l'espace $i\Delta x$, on retrouve :

$$u_i^{n+1} \approx (c\Delta t)^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + 2u_i^n - u_i^{n-1}. \quad (1.27)$$

Une fois résolue l'approximation 1.27 pour tous les points de l'espace à l'instant $(n+1)\Delta t$, le processus peut être réinitialisé pour progresser dans le temps et obtenir une nouvelle solution u_i^{n+2} . L'itération systématique de 1.27 sur tout le domaine spatiale du problème constitue la solution numérique en différences finies de l'équation d'onde scalaire unidimensionnelle.

Le cas où $c\Delta t = \Delta x$ dans la solution numérique de 1.25 est particulièrement intéressant. Dans ce cas, où le rapport entre les pas de discrétisation spatial et temporelle est égal à la vitesse de propagation des ondes, l'approximation 1.27 devient tout simplement l'égalité

$$u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_i^{n-1}. \quad (1.28)$$

Cette équation 1.28 donne une égalité stricte entre le terme de gauche et le terme de droite et pas une approximation. Ce n'est pas une erreur. Cela signifie que, pour une telle discrétisation, l'équation en différences 1.27 aboutit à une solution exacte, raison pour laquelle on parle du *pas magique* de discrétisation temporelle $\Delta t = \Delta x/c$. Dans les sections 1.2.5 et 1.4.4 on comprendra que ce *pas magique* de discrétisation n'est valable que pour l'équation d'onde scalaire unidimensionnelle. En général, le pas de discrétisation nécessaire pour assurer la stabilité et la précision des solutions numériques est dépendant des équations différentielles qu'on résolve et de leur discrétisation. On verra ainsi que le domaine de bon comportement de tout schéma numérique sera limité par des valeurs particulières du rapport des pas de discrétisation spatiale et temporelle.

1.2.3 Schémas Explicites vs Schémas Implicites

Dans la section précédente l'équation d'onde scalaire 1.25 a été discrétisée en appliquant des opérateurs en *différences centrées* dans l'espace et dans le temps. Si l'on dénote les valeurs approximées de la fonction solution dans les points de la grille numérique comme

$$U_i^n \approx u(x_i, t_n),$$

alors, l'approximation résultante 1.27, une fois factorisée, peut être écrite selon :

$$U_i^{n+1} = (1 - S^2)2U_i^n + S^2(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - U_i^{n-1} \quad (1.29)$$

où

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta x}.$$

Dans la littérature, S est appelé le numéro de Courant. Comme nous verrons dans les sections 1.2.4 et 1.2.5, S représente une quantité fondamentale dans l'analyse numérique puisqu'elle est fortement lié à la dispersion et à la stabilité des schémas en différences finies.

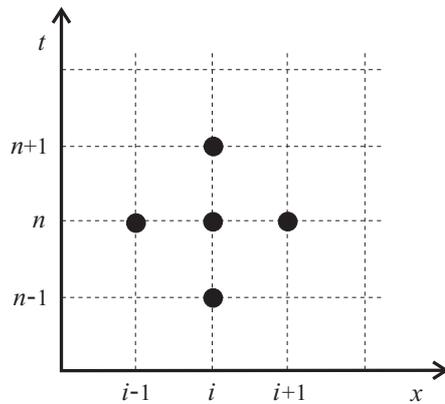


FIG. 1.1: Stencil (cercles noirs) associé au schéma explicite en différences finies de l'équation d'onde scalaire, donné par l'équation 1.29.

Une représentation graphique du stencil associé à l'équation 1.29 est illustrée sur la Figure 1.1. Il est clair que les valeurs de U , dans tout le domaine spatial à l'instant $(n + 1)\Delta t$, peuvent être calculées indépendamment les unes des autres à partir des valeurs de U calculées aux instants précédents $n\Delta t$ et $(n - 1)\Delta t$. C'est pour cette raison que les formulations en différences présentant cette caractéristique, propre à l'équation 1.29, sont nommées des *schémas explicites*. Dans la section 1.4 on présente la déduction d'une formulation explicite pour le cas élastique en 3D.

Contrairement aux *schémas explicites*, dans le cas des *schémas implicites*, les valeurs approximatives de la fonction solution à l'instant $(n + 1)\Delta t$ dépendent, entre autres, des valeurs contemporaines de celles-ci. Substituons cette fois-ci la dérivée temporelle de l'équation d'onde non pas par un opérateur en *différences centrées* comme dans le cas précédent, mais par un opérateur en *différences en arrière* similaire à 1.19. Substituons aussi l'opérateur en *différences centrées* 1.20 à la place de la dérivée spatiale. En évaluant les dérivées à l'instant $(n + 1)\Delta t$, on obtient l'équation en différences

$$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \left[\frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] \quad (1.30)$$

qui peut s'exprimer en fonction du numéro de Courant S , une fois factorisée et les termes rangés, suivant :

$$(1 + 2S^2)U_i^{n+1} - S^2(U_{i+1}^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) = 2U_i^n - U_i^{n-1}. \quad (1.31)$$

Le stencil respectif est illustré sur la Figure 1.2. On peut voir que l'expression 1.31 présente trois valeurs inconnues de U à l'instant $(n + 1)\Delta t$. En conséquence, on ne peut pas calculer directement la valeur U_i^{n+1} puisque 1.31 contient les deux valeurs voisines U_{i+1}^{n+1} et U_{i-1}^{n+1} qui sont aussi inconnues. Si $i = 1, 2, \dots, N - 1$, où N est le nombre de points discrétisant la grille spatiale, alors 1.31 représente un système de $N - 1$ équations linéaires pour les $N - 1$ inconnues U_i^{n+1} . Au lieu de calculer chacune des valeurs indépendamment à travers une formule similaire à 1.29, on doit alors résoudre ce système d'équations afin d'obtenir toutes les valeurs simultanément. Les formulations implicites en différences finies impliquent toujours la résolution de systèmes d'équations, c'est-à-dire, l'inversion d'une matrice. Il existe un nombre important de méthodes pour résoudre ce problème, comme la méthode de prédiction-correction ou les méthodes itératives (Emerman et al., 1982, Mufti, 1985).

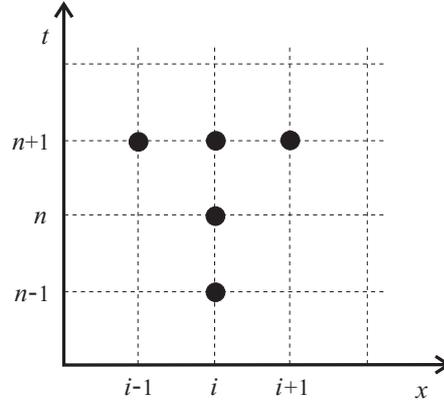


FIG. 1.2: Stencil (cercles noirs) associé au schéma implicite en différences finies de l'équation d'onde scalaire, donné par l'équation 1.31.

En général, les *méthodes explicites* sont plus simples à implémenter que les *schémas implicites*. Cependant, pour atteindre une précision acceptable, l'incrément spatial de la grille numérique doit être généralement plus petit que dans une *méthode implicite*. Or, pour assurer la stabilité du schéma, l'incrément temporel doit être lui aussi petit, ce qui rendant la méthode plus lourde. A l'opposé, les *schémas implicites* peuvent opérer avec des incréments temporels plus grands. Néanmoins, leur stabilité dépend du degré de non-linéarité des équations différentielles.

1.2.4 Dispersion Numérique

Lorsqu'on modélise un phénomène en différences finies comme celui de la propagation des ondes, certains problèmes inhérents à la discrétisation des opérateurs différentiels apparaissent. L'un des plus importants est la dispersion numérique. Cet artefact est fortement relié au pas de discrétisation spatiale, dx , et rend la vitesse de propagation des ondes dépendante de leur fréquence (*i.e.* de leur longueur d'onde). Ce problème provoque ainsi un étalement temporel (ou *dispersion*) des phases sismiques contenues dans un train d'ondes. Autrement dit, la vitesse des harmoniques du signal devient une fonction de plusieurs paramètres, dont, dx . Par conséquent, la précision des solutions est contrôlée par l'espacement de la grille. Le principe est simple : plus la grille est fine (*i.e.* plus dx est petit), moins il y aura de dispersion numérique dans les solutions (*i.e.* plus les solutions seront précises). Or, le taux de convergence des solutions vers des valeurs exactes à mesure que dx diminue dépendra aussi, par exemple, de Δt , de la direction de propagation des ondes à l'intérieur de la grille numérique, et de l'ordre des opérateurs en différences appliqués.

Formellement, la dispersion est la relation qui existe entre la longueur d'onde, λ , et la fréquence, f . Comme on le verra par la suite, cette relation est très simple lorsque le milieu de propagation n'est pas discrétisé, c'est-à-dire, lorsque l'équation d'onde reste continue. Par convenance, la dispersion est souvent définie comme la variation du nombre d'onde, $k = 2\pi/\lambda$, avec la fréquence angulaire, $\omega = 2\pi f$. Considérons une fonction sinusoïdale solution de l'équation d'onde unidimensionnelle 1.25 voyageant dans la direction x

$$u(x, t) = e^{j(\omega t - kx)} \quad (1.32)$$

où ω et k ont déjà été définis et $j = \sqrt{-1}$. Si l'on substitue 1.32 dans l'équation 1.25, une fois effectuées les dérivées correspondantes, on aboutit à :

$$(j\omega)^2 e^{j(\omega t - kx)} = c^2 (-jk)^2 e^{j(\omega t - kx)}$$

qui devient tout simplement, en réduisant les termes :

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad \longrightarrow \quad k = \pm \frac{\omega}{c}. \quad (1.33)$$

L'équation 1.33 représente la relation de dispersion de l'équation d'onde scalaire 1.25. Cette relation nous apprend simplement que le nombre d'onde est proportionnel à la fréquence angulaire. Les signes plus et moins indiquent qu'indépendamment du sens de propagation suivant l'axe x , les ondes sont présidées par la même relation de dispersion. A partir de l'équation 1.33, on peut facilement obtenir l'expression de la *vitesse de phase* dont la définition classique est

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \pm c. \quad (1.34)$$

Ainsi, la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, ω . Elle est constante est égale à c , vitesse de propagation des ondes. Des ondes se propageant avec une relation de dispersion similaire à 1.33, *i.e.* avec une vitesse de phase constante, sont dites *non dispersives*. Autrement dit, indépendamment du contenu fréquentiel, la forme du train d'ondes reste imperturbable malgré des distances arbitrairement grandes de propagation.

Si l'on considère la fréquence comme une fonction du nombre d'onde, $\omega = \omega(k)$, et l'on dérive 1.33 par rapport à k , on obtient la *vitesse de groupe* habituellement définie comme $v_g = d\omega/dk$:

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c^2 k$$

i.e.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{\omega} \cdot k = \frac{c^2}{\omega} \cdot \left(\pm \frac{\omega}{c} \right) = \pm c. \quad (1.35)$$

La vitesse de groupe est alors aussi indépendante de la fréquence et égale à la vitesse de propagation des ondes, donc égale à v_{ph} . Le raisonnement suivi pour établir la relation de dispersion de l'équation d'onde scalaire unidimensionnelle donnée par 1.25, peut être également employé pour obtenir l'approximation en différences finies de cette équation (expression 1.27). Dans ce cas, on obtiendrait alors la *relation de dispersion numérique* de l'équation d'onde *discrète*.

Considérons l'onde sinusoïdale 1.32 discrétisée dans les points de l'espace et du temps (x_i, t_n) d'une grille en différences finies. Soit \tilde{k} le nombre d'onde associé à cette « onde numérique ». On note alors la valeur approximative de la solution de l'équation d'onde 1.32 comme :

$$U_i^n = e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} \quad (1.36)$$

En général, \tilde{k} diffère de k , le nombre d'onde physique correspondant. Cette différence, connue comme *l'artefact de la dispersion numérique*, peut affecter l'amplitude et la vitesse des ondes en les écartant des valeurs exactes associées à l'équation d'onde continue. En substituant 1.36 dans l'approximation 1.27 on obtient :

$$e^{j[\omega(n+1)\Delta t - \tilde{k}i\Delta x]} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left\{ e^{j[\omega n\Delta t - \tilde{k}(i+1)\Delta x]} + \right. \\ \left. - 2e^{j[\omega n\Delta t - \tilde{k}i\Delta x]} + e^{j[\omega n\Delta t - \tilde{k}(i-1)\Delta x]} \right\} + \\ + 2e^{j[\omega n\Delta t - \tilde{k}i\Delta x]} - e^{j[\omega(n-1)\Delta t - \tilde{k}i\Delta x]}. \quad (1.37)$$

Si l'on factorise l'exponentielle $e^{j[\omega n\Delta t - \tilde{k}i\Delta x]}$ pour la simplifier des deux côtés, alors 1.37 devient :

$$e^{j\omega\Delta t} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(e^{-j\tilde{k}\Delta x} - 2 + e^{j\tilde{k}\Delta x} \right) + 2 - e^{j\omega\Delta t}$$

En divisant l'équation par deux et en séparant exponentielles temporelles et exponentielles spatiales, on retrouve :

$$\frac{e^{j\omega\Delta t} + e^{-j\omega\Delta t}}{2} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{e^{j\tilde{k}\Delta x} + e^{-j\tilde{k}\Delta x}}{2} - 1 \right) + 1.$$

En appliquant une des formules d'Euler, nous obtenons finalement la *relation de dispersion numérique* pour l'équation d'onde acoustique unidimensionnelle :

$$\cos(\omega\Delta t) = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[\cos(\tilde{k}\Delta x) - 1 \right] + 1 \quad (1.38a)$$

i. e.

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \arccos \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{c\Delta t}\right)^2 \left[\cos(\omega\Delta t) - 1 \right] \right\} \quad (1.38b)$$

L'équation 1.38 est une relation entre ω et \tilde{k} beaucoup plus compliquée que celle déduite pour l'équation d'onde scalaire continue (équation 1.33). Ici, \tilde{k} dépend aussi des pas de discrétisation spatial et temporel. L'équation 1.38 peut être donc utilisée pour extraire de l'information concernant la façon dont les ondes se propagent à travers la grille numérique en fonction de Δx et Δt . Il y a deux cas pour lesquels la propagation des ondes est non dispersive.

C'est-à-dire, pour lesquels $\tilde{k} = k$. Le premier est le cas où $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$. Le deuxième est le cas où $c\Delta t = \Delta x$, introduit comme le *pas magique* de discrétisation dans la section 1.2.2. Dans ce dernier, il faut tout simplement substituer le *pas magique* dans l'équation 1.38b pour constater que $\tilde{k} = k$. Pour arriver à la même conclusion dans le premier cas, il suffit d'approcher en série de Taylor à l'ordre deux les fonctions trigonométriques de 1.38b évaluées à l'origine (Tafløve & Hagness, 2000). Afin d'étudier le cas général pour des rapports quelconques entre Δt et Δx , il est pertinent d'exprimer l'équation 1.38b en terme du *nombre de Courant*,

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (1.39)$$

et du nombre de points de la grille numérique par longueur d'onde, λ , quantité connue comme le *paramètre de dispersion* :

$$N_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta x}. \quad (1.40)$$

En substituant 1.39 et 1.40 dans la relation de dispersion 1.38b, sachant que $\omega = ck$ (équation 1.33) et que $k = 2\pi/\lambda$, on obtient :

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \arccos \left\{ 1 + \frac{1}{S^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (1.41)$$

Dans cette équation, la limite inférieure de N_λ est donnée par le théorème de Nyquist. Elle est égale à deux nœuds par longueur d'onde. Par ailleurs, la limite supérieure de S est donnée par le seuil de stabilité du schéma numérique qui, comme on verra dans la section 1.2.5, dans ce cas est égale à un (*i.e.* valeur correspondante au *pas magique* de discrétisation : $\Delta x = c\Delta t$). Ainsi, le domaine d'intérêt des variables indépendantes N_λ et S de l'équation 1.41 est borné.

Pourtant, afin de visualiser l'effet de la grille numérique sur les ondes qui se propagent à travers elle, il est plus pertinent d'analyser cet effet sur la *vitesse de phase numérique*, \tilde{v}_{ph} . En substituant 1.41 dans 1.34, nous obtenons :

$$\tilde{v}_{ph} = \frac{2\pi c}{N_\lambda \arccos(\xi)} \quad (1.42a)$$

où

$$\xi = 1 + \frac{1}{S^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right]. \quad (1.42b)$$

La Figure 1.3 montre les courbes de dispersion correspondantes à la vitesse de phase, \tilde{v}_{ph} , en fonction du paramètre de dispersion N_λ , pour différentes valeurs du numéro de Courant S . Les courbes ont été obtenues à partir de l'équation 1.42 normalisée par rapport à c , la vitesse de propagation des ondes. Comme on l'avait indiqué précédemment, dans cette figure on peut apprécier que, pour le cas correspondant au *pas magique* de discrétisation, le schéma numérique est *non dispersif*. C'est-à-dire que, pour $S = 1$ et $N_\lambda \geq 2$, la vitesse de propagation d'une onde caractérisée par sa fréquence ω_0 (ou longueur d'onde λ_0) est égale à c , indépendamment de N_λ , le nombre de nœuds par longueur d'onde. Pourtant, si $S < 1$, la vitesse de cette onde tend à s'écarter de c au fur et à mesure que N_λ diminue. Autrement dit, pour un N_λ donné (*i.e.* pour un Δx fixe et le même λ_0), plus S est proche de 1, plus \tilde{v}_{ph} est proche de c (*i.e.* moins l'onde est dispersive).

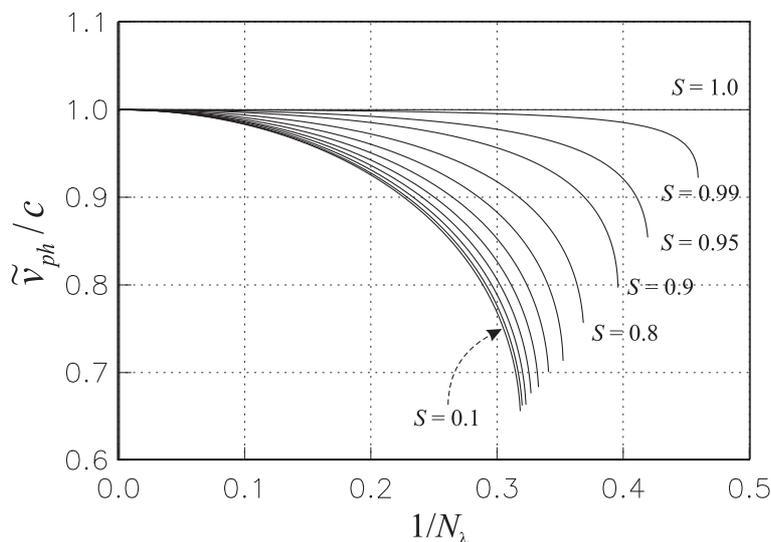


FIG. 1.3: Courbes de dispersion numérique pour la vitesse de phase de l'équation d'onde acoustique unidimensionnelle discrète 1.26. Courbes calculées pour des valeurs de $0.1 < S \leq 1$ tout les 0.1 sauf à partir de $S = 0.9$ où les valeurs choisies sont indiquées dans la figure.

Une autre façon d'interpréter la Figure 1.3 est la suivante. Si l'on imagine un signal complexe (*i.e.* d'un grand contenu fréquentiel) se propageant à travers une grille numérique où $S < 1$, alors les harmoniques de plus haute fréquence, c'est-à-dire de longueur d'onde plus petite, subiront une dispersion plus importante que les harmoniques de basse fréquence. Ainsi chaque harmonique se propagera à une vitesse différente et le train d'onde tendra à

s'étaler dans l'espace en modifiant sa forme.

Il faut être attentif lorsqu'on évalue la relation de dispersion d'un schéma numérique comme celle donnée par 1.41. Il est possible que \tilde{k} devienne complexe pour certaines valeurs de S et de N_λ . On peut montrer que, pour le cas spécifique de 1.41, la transition entre les valeurs réelles et complexes de \tilde{k} a lieu lorsque $\xi = -1$ (Schneider & Wagner, 1999). De 1.42b, la limite de transition peut être donc exprimée en terme du paramètre de dispersion $N_{\lambda,trans}$ comme :

$$N_{\lambda,trans} = \frac{2\pi S}{\arccos(1 - 2S^2)}. \quad (1.43)$$

Les courbes de la Figure 1.3 montrent uniquement la vitesse de phase associée au domaine réel de \tilde{k} . Les valeurs de $1/N_\lambda$ à l'extrémité des courbes correspondent aux valeurs de transition données par 1.43. De cette manière, lorsque la grille est suffisamment fine (*i.e.* lorsque $N_\lambda > N_{\lambda,trans}$), \tilde{k} est réel et la dispersion ne se traduit que par l'effet décrit précédemment. C'est-à-dire, par des valeurs de \tilde{v}_{ph} inférieurs à c . Pourtant, lorsque la grille est trop grossière (*i.e.* lorsque $N_\lambda < N_{\lambda,trans}$), \tilde{k} devient complexe et la dispersion est traduite par deux effets numériques distincts (Taflove & Hagness, 2000). Le premier concerne l'amplitude de l'onde. Elle décroît exponentiellement avec la distance. L'autre concerne la vitesse de phase. On peut montrer que $\tilde{v}_{ph} > c$ dans certains cas. Selon Schneider & Wagner (1999), si l'on prend la partie réelle de \tilde{k} , la vitesse de phase numérique devient :

$$\tilde{v}_{ph} = \frac{2c}{N_\lambda}. \quad (1.44)$$

La vitesse de phase maximale correspondra ainsi à la valeur minimale de N_λ . Le théorème de Nyquist nous dit que la longueur d'onde minimale que l'on peut résoudre numériquement est $\lambda_{min} = 2c\Delta t$. Pour un Δx donné, nous avons lors $N_{\lambda,min} = 2S$. En substituant ce paramètre de dispersion minimal en 1.44, nous obtenons la vitesse de phase maximale :

$$\tilde{v}_{ph,max} = \frac{c}{S} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.45)$$

Étant donné que $S \leq 1$ pour assurer la stabilité du schéma numérique (voir section 1.2.5), la vitesse de phase peut être égale ou supérieur à la vitesse de propagation des ondes.

1.2.4.1 Équation d'Onde Acoustique

Jusqu'à présent, nous avons analysé la relation de dispersion de l'équation d'onde acoustique unidimensionnelle 1.25. Dans ce cas nous avons généré les courbes de dispersion pour la vitesse de phase jusqu'à la limite supérieure $S = 1$, donnée par le seuil de stabilité. Pourtant, le cas non dispersif associé au *pas magique* de discrétisation $S = 1$ (Figure 1.3) n'existe que pour cette équation unidimensionnelle. En général, dans les cas 2D et 3D, acoustiques ou élastiques, la dispersion numérique est non nulle quel que soit S dans le domaine de stabilité. Donc, le problème de la dispersion numérique associé à une équation spécifique, discrétisée d'une façon spécifique, peut se poser de la manière suivante : combien de points de la grille faut-il, par longueur d'onde minimale, afin de minimiser la dispersion du signal dans le domaine fréquentiel d'intérêt.

Voici l'équation d'onde acoustique généralisée,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \quad (1.46)$$

où le champ scalaire u , dans le cas bidimensionnel, devient une fonction $u(x, z, t)$. Considérons la propagation d'une onde plane harmonique solution de cette équation exprimée par :

$$u(x, z, t) = e^{j(\omega t - kx \cos \theta - kz \sin \theta)}, \quad (1.47)$$

où θ est l'angle décrit par la direction de propagation de l'onde et l'axe x du repère cartésien, k est le module du vecteur nombre d'onde k_i , et $j = \sqrt{-1}$. De la même façon que l'équation unidimensionnelle a été discrétisée 1.25 pour aboutir à 1.27, 1.46 peut être discrétisée en appliquant les mêmes opérateurs en *différences centrées* : pour la dérivée seconde par rapport au temps, expression 1.21, et pour les dérivées secondes spatiales croisées associées au Laplacien (voir Alford et al. (1974), équation 7), expression 1.20. Une fois discrétisée 1.46, nous pouvons substituer la fonction u , donnée par 1.47, et poursuivre le même procédé décrit auparavant dans le cas unidimensionnel afin d'établir la relation de dispersion et l'expression de la vitesse de phase numérique.

On peut donc montrer que la vitesse de phase \tilde{v}_{ph} , associée à l'équation 1.46 discrétisée avec une précision d'ordre deux dans le temps et dans l'espace, est égale à (Alford et al., 1974) :

$$\tilde{v}_{ph} = \frac{cN_\lambda}{\pi S} \arcsin \left\{ S \left[\sin^2 \left(\frac{\pi \cos \theta}{N_\lambda} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi \sin \theta}{N_\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (1.48)$$

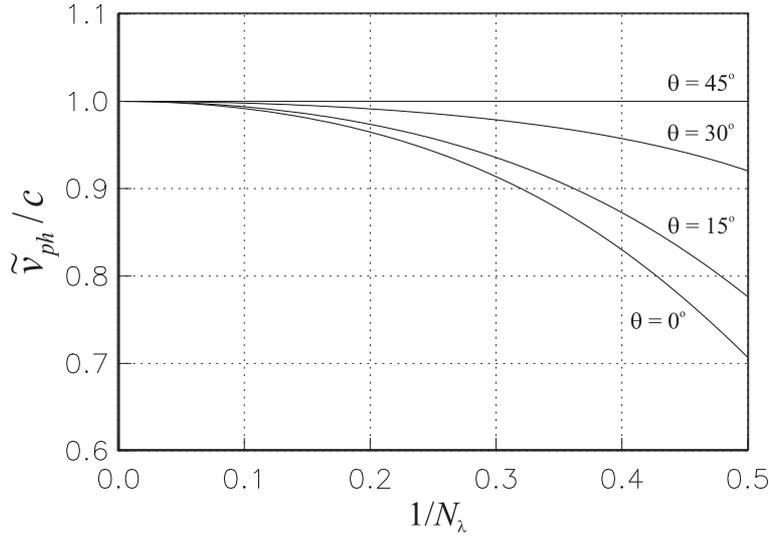


FIG. 1.4: Anisotropie de la grille numérique. Courbes de dispersion pour la vitesse de phase correspondante à l'équation d'onde acoustique bidimensionnelle 1.46. Schéma d'ordre (2, 2). Courbes calculées pour quatre directions de propagation par rapport à la grille numérique à partir de l'équation 1.48. $S = 1/\sqrt{2} = 0.7071$ (seuil de stabilité) dans tous les cas.

Dans ce cas, la condition de stabilité établit que $S \leq 1/\sqrt{2}$ (Mitchell, 1969). Si l'on compare l'expression de la vitesse de phase unidimensionnelle (1.42) avec 1.48, on remarque que dans le cas bidimensionnel \tilde{v}_{ph} dépend aussi de θ . Cela veut dire que la vitesse de propagation d'une onde harmonique donnée dépendra de sa direction de propagation par rapport au repère de la grille. Ce phénomène est connu comme *l'anisotropie de la grille*. Pour mieux illustrer cet effet, la Figure 1.4 montre les courbes de dispersion numérique pour la vitesse de phase correspondante à quatre directions de propagation différentes. Toutes les courbes ont été calculées pour $S = 1/\sqrt{2}$.

Comme le montre cette figure, la dispersion est plus accentuée dans la direction de propagation parallèle aux axes de références $\theta = 0^\circ$, ou $\theta = 90^\circ$ (non représentée) par symétrie du stencil (*i.e.* dans les directions où les opérateurs en différences sont appliqués). A l'opposé, la dispersion est minimale dans la direction de propagation la plus éloignée des axes du repère ($\theta = 45^\circ$). Comme on verra dans la section 1.4.4, ce comportement est présent aussi dans l'anisotropie d'autres schémas numériques 2D et 3D.

Il est intéressant de quantifier l'effet de l'ordre des opérateurs dans la dispersion numérique. Dans les derniers paragraphes de la section 1.2.1, consa-

crés aux opérateurs en différences d'ordre supérieur, il a été mis en évidence l'avantage de leur application en terme d'économie de mémoire et de temps de calcul. L'expression de la vitesse de phase pour l'équation d'onde acoustique (1.46) correspondant à un schéma d'ordre $O[(\Delta t)^2, h^4]$, où $h = \Delta x = \Delta z$, est donnée par (Alford et al., 1974) :

$$\tilde{v}_{ph} = \frac{cN_\lambda}{\pi S} \sin^{-1} \left\{ S \cdot \sin \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) \left[1 + \frac{1}{3} \sin^2 \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (1.49)$$

Cette équation est spécifique pour un angle de propagation $\theta = 0^\circ$. La condition de stabilité du schéma établi que $S \leq \sqrt{3/8}$ (Mitchell, 1969). Dans la Figure 1.5 on retrouve une comparaison des courbes de dispersion pour les schémas d'ordre (2, 2) et d'ordre (2, 4). Les courbes $\hat{S}_{2\text{ème}}$ et $\hat{S}_{4\text{ème}}$ correspondent respectivement aux seuils de stabilité des deux schémas. Les autres courbes, calculées pour des valeurs de S inférieures au seuil de stabilité pour le schéma d'ordre supérieur, mettent en évidence que le schéma (2, 4) reste plus précis dans un intervalle plus grand de N_λ . Définissons l'erreur dans la vitesse de phase comme $\epsilon = \|c - \tilde{v}_{ph}\| / c$. Alors, pour atteindre une précision d'approximativement $\epsilon < 0.01$ avec le schéma (2, 2), *i.e.* une erreur inférieur à 1% par rapport à c , il faut au moins dix nœuds par longueur d'onde ($N_\lambda \geq 10$). Tandis que, pour atteindre la même précision avec le schéma (2, 4) il suffit que la moitié de nœuds par longueur d'onde ($N_\lambda \geq 5$). Cela veut dire que, pour résoudre un problème en 1D, 2D ou 3D à une précision donnée il faudrait, respectivement, deux, quatre ou huit fois plus de mémoire vive et de transfert de données si l'on applique le schéma d'ordre inférieur. Dans le tableau 1.1, inclus à la fin de la section 1.2.1, ce fait est présenté en terme du temps CPU pour le problème bidimensionnel de l'équation acoustique. Dans cet exemple, l'application de l'opérateur d'ordre supérieur (2, 4) s'est traduit par une économie d'environ 80% dans le temps de calcul par rapport au schéma (2, 2).

L'évaluation de l'équation 1.48 en $\theta = 0^\circ$ nous ramène à l'expression de la vitesse de phase correspondante au cas spécifique de l'équation d'onde acoustique unidimensionnelle :

$$\tilde{v}_{ph} = \frac{cN_\lambda}{\pi S} \arcsin \left[S \cdot \sin \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) \right]. \quad (1.50)$$

Pourtant, cette équation est différente de 1.42, expression de la vitesse de phase déduite à partir de l'équation d'onde unidimensionnelle 1.25. Contrairement au comportement de la fonction 1.42 analysé précédemment, dans le cas de 1.50 il n'existe pas une limite de transition similaire à celle établie par

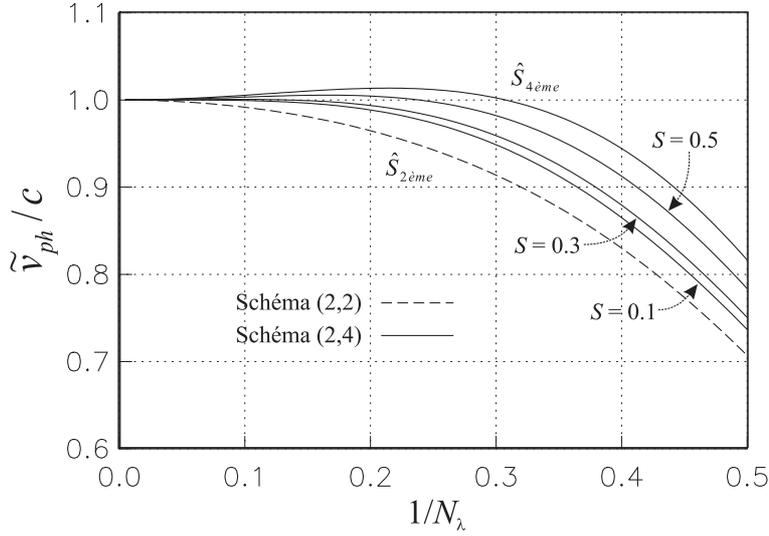


FIG. 1.5: Comparaison des courbes de dispersion pour la vitesse de phase de l'équation d'onde 1.46 associées aux schémas de précision $O[(\Delta t)^2, h^2]$ (courbe discontinue) et $O[(\Delta t)^2, h^4]$ (courbes continues). Les courbes $\hat{S}_{2\text{ème}} = 0.7071$ et $\hat{S}_{4\text{ème}} = 0.6124$ correspondent respectivement aux seuils de stabilité des schémas de précision d'ordre deux et d'ordre quatre dans l'espace. Toutes les courbes ont été calculées pour un angle de propagation $\theta = 0^\circ$.

1.43, à partir de laquelle \tilde{v}_{ph} devient complexe. La différence entre les équations 1.50 et 1.42 est aussi mise en évidence quand on compare, par exemple, la courbe pour $\theta = 0^\circ$ dans le seuil de stabilité $S = 0.7071$ de la Figure 1.4 (calculée à partir de 1.50) et celle pour $S = 0.7$ de la Figure 1.3 (calculée à partir de 1.42). La différence vient du fait que les relations de dispersion numérique associées à chacun des deux cas est étroitement liée à la façon de discrétiser l'équation originale. Pour une onde plane se propageant parallèlement à un des axes de référence, l'équation bidimensionnelle 1.46 est équivalente à l'équation unidimensionnelle 1.25. Cependant, les propriétés numériques des deux équations une fois discrétisées sont différentes, même si les opérateurs en différence utilisés sont du même ordre d'approximation dans les deux cas.

Les expressions de la vitesse de groupe numérique associées aux schémas d'ordre (2,2) et d'ordre (2,4) pour l'équation d'onde acoustique bidimensionnelle sont rapportées dans le travail d'Alford et al. (1974).

1.2.5 Condition de Stabilité

Dans la section précédente on a montré que le choix des pas de discrétisation spatial et temporel de la grille numérique a une influence forte sur la solution des schémas en différences finies (*e.g.* sur la vitesse de propagation des ondes) et donc sur l'erreur des approximations. Pour cette raison, une fois la structure de vitesses du milieu établie, on choisit la valeur de h (incrément spatial) et celle de Δt pour atteindre une bonne précision dans la bande fréquentielle d'intérêt. On a vu que plus le numéro de Courant S (équation 1.39) est grand, plus on minimise la dispersion numérique (Figures 1.3 et 1.5). Dans cette section je vais introduire des considérations supplémentaires qui doivent être prises en compte dans le choix des paramètres numériques afin d'assurer le bon comportement du schéma.

Les approximations numériques des solutions données par des formules en différences finies, similaires à celles introduites dans la section 1.2.4, peuvent devenir *instables*. Selon la valeur de Δt que l'on choisit pour un h et un modèle de vitesse donnés, l'évolution temporelle du schéma numérique peut déclencher une instabilité traduite par une croissance exponentielle du champ solution. On introduit ainsi la définition suivante : *Un schéma explicite en différences finies est stable si, pour une entrée bornée, il donne une solution bornée. Le schéma sera instable si, pour une entrée bornée, il donne une solution non-bornée.* Un schéma stable pour tout h et pour tout Δt est nommé *inconditionnellement stable*. Si la solution d'un schéma en différences finies n'est bornée que pour certaines valeurs du pas de discrétisation numérique, on dit alors que le schéma est *conditionnellement stable*. Inversement, on nomme schémas *inconditionnellement instables* les schémas qui sont instables indépendamment du choix des pas de discrétisation numérique. L'analyse de la stabilité numérique n'est possible que pour les *équations différentielles partielles* (EDP) linéaires. Les EDP non-linéaires doivent être linéarisées localement pour permettre la même analyse. Pour assurer la stabilité d'un schéma il est nécessaire de vérifier le bon comportement de chaque mode spectral du signal contenu dans la grille numérique. Autrement dit, il faut vérifier la stabilité de chaque mode à chaque pas en temps.

1.2.5.1 CFL

Une condition nécessaire mais pas suffisante pour assurer la stabilité d'un schéma est la *condition CFL*. Courant, Friedrichs et Lewy, dans leur travail fondamental publié en 1928², ont introduit la notion de convergence des

²Courant, R., Friedrichs, K.O. et Lewy, H. (1928). Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. *Math. Ann.*, 100, 32.

méthodes en différences finies en terme de domaines de dépendance des solutions. L'équation d'onde acoustique d'ordre deux

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.51)$$

(répétée, voir 1.25) peut être exprimée comme un système d'équations différentielles partielles de premier ordre. Si l'on définit les nouvelles variables :

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad w = -c \frac{\partial u}{\partial x},$$

alors, une fois le changement de variable effectuée, 1.51 devient le système suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.52a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (1.52b)$$

Le système 1.52 contient deux EDP hyperboliques de premier ordre toutes deux similaires à l'équation *unidimensionnelle d'advection*. Ainsi, prenons tout d'abord pour simplifier le cas de l'équation d'advection donnée par l'expression 1.52a. La solution exacte $v(x, t)$ peut être calculée à partir des *courbes caractéristiques* associées à l'équation différentielle (Morton & Mayers, 1994). Si c est constante, les *caractéristiques* de 1.52a sont des lignes droites parallèles de forme $x - ct = 0$. Le long de ces courbes la solution v est constante et égale à :

$$v(x, t) = v^0(x - ct) \quad (1.53)$$

où $v^0 = v(x, 0)$, *i.e.* la condition initiale pour v . Par ailleurs, si nous discrétisons l'équation 1.52a avec des opérateurs en *différences en arrière* (expression 1.10) et dénotons les valeurs approximées de la fonction solution dans les points de la grille numérique comme $V_i^n \approx v(x_i, t_n)$, nous obtenons l'approximation de premier ordre de l'équation d'advection suivante :

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} + c \left(\frac{V_i^n - V_{i-1}^n}{\Delta x} \right) = 0. \quad (1.54)$$

Une fois isolée, la valeur solution pour un nouveau pas en temps $n + 1$ est donnée par :

$$\begin{aligned} V_i^{n+1} &= V_i^n - S(V_i^n - V_{i-1}^n) \\ &= (1 - S)V_i^n + SV_{i-1}^n \end{aligned} \quad (1.55)$$

où $S = c\Delta t/\Delta x$ (Numéro de Courant). Comme on verra dans les paragraphes suivants, cette approche est pertinente si $c > 0$. Pour $c < 0$, une formule similaire peut être établie en appliquant un opérateur spatial en *différences en avant* (expression 1.9). Ces deux schémas numériques sont connus respectivement comme des schémas « *upwind* » et « *downwind* ». L'équation 1.55 montre que la valeur V_i^{n+1} dépend des valeurs de V en deux points de la grille appartenant au pas en temps précédent, t_n . Elle montre aussi que chacune de ces deux valeurs dépend à la fois des valeurs de V en deux points au pas précédent t_{n-1} et ainsi de suite (voir Figure 1.6). La solution numérique V_i^{n+1} dépend donc des valeurs des points de la grille numérique appartenant au triangle qui a comme sommet le point (x_i, t_{n+1}) et comme base les points correspondant à la condition initiale (cercles noirs, Figure 1.6) :

$$(x_{i-n-1}, 0), (x_{i-n}, 0), \dots, (x_{i-1}, 0), (x_i, 0).$$

Ce triangle représente le *domaine de dépendance* de V_i^{n+1} pour l'équation en différences 1.55. Or, le domaine de dépendance de $v(x_i, t_{n+1})$ associé à l'équation différentielle 1.52a est défini par le parcours des courbes caractéristiques qui relient le point $P = (x_i, t_{n+1})$ et la ligne des valeurs initiales $t = 0$ (voir équation 1.53). Par exemple, la Figure 1.6 montre trois caractéristiques (lignes discontinues) pour trois valeurs différentes de c : \overline{PQ} , \overline{PR} et \overline{PS} . Alors, la condition CFL énonce que pour qu'un schéma numérique soit potentiellement convergent, le domaine de dépendance de l'équation différentielle partielle doit être « à l'intérieur » du domaine de dépendance du schéma.

Dans le cas de l'exemple illustré sur la Figure 1.6, la condition CFL établit que le schéma ne peut pas converger si $c < 0$ puisque la caractéristique associée à $v(x_i, t_{n+1})$ serait dans ce cas une ligne similaire à \overline{PS} . Dans le cas où $c > 0$, elle établit aussi une restriction précise donnée par :

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \tag{1.56}$$

1.56 est l'expression mathématique de la condition CFL pour l'équation d'advection. Elle assure donc que les courbes caractéristiques associées à cette équation soient à l'intérieur du domaine de dépendance du schéma « *upwind* » (e.g., la ligne droite \overline{PR}). Un exemple dans lequel on viole la condition CFL 1.56 (i.e. pour lequel Δt est trop grand), c étant positif, est illustré par la ligne \overline{PQ} .

Prenons le cas de la courbe caractéristique \overline{PR} . Étant donné que la solution d'une EDP est constante le long des caractéristiques, alors la solution $v(x_i, t_{n+1})$ au point P est la même que celle correspondante au point T

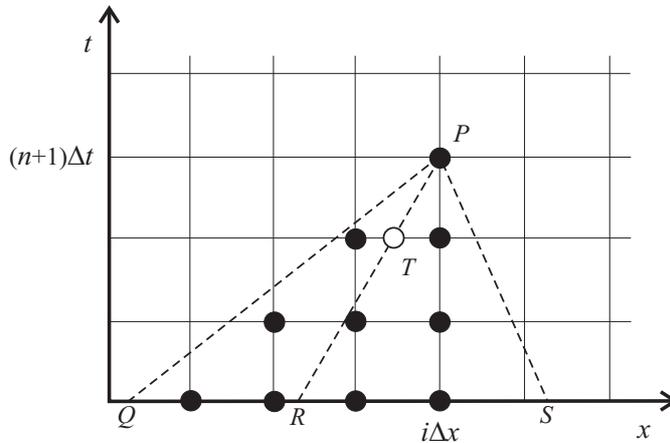


FIG. 1.6: Condition CFL. Domaines de dépendance de l'équation d'advection et du schéma numérique « *upwind* ».

(cercle blanc, voir équation 1.53). Alors, si l'on connaît les valeurs solution approximées dans les points de la grille à l'instant t_n , il est possible d'obtenir la valeur désirée $V(T)$ à partir d'une interpolation des valeurs approximées. L'équation en différences 1.55 représente précisément une *interpolation linéaire* entre les points V_{i-1}^n et V_i^n adjacents à T . La valeur $V_i^{n+1} = V(T)$ convergera vers $v(x_i, t_{n+1})$ si c est constante, ou bien si c varie peu entre les points x_{i-1} et x_i (*i.e.* dans la mesure où l'interpolation linéaire implicite dans l'équation en différences est une bonne approximation par rapport à la distribution spatiale de c dans le milieu).

Jusqu'ici, la condition CFL peut être interprétée uniquement comme une condition nécessaire pour assurer la stabilité d'un schéma. En général, cette condition n'est pas suffisante. Elle reste remarquable par sa simplicité. Elle permet de discriminer des schémas en différences inappropriés à partir d'une simple analyse. Par exemple, on peut montrer que si l'équation d'advection avait été discrétisée avec un opérateur en *différences centrées* similaire à 1.12 le schéma remplit la condition CFL et pourtant reste toujours instable (Morton & Mayers, 1994, page 90). Un tel schéma numérique est donc un schéma *inconditionnellement instable*. Contrairement, le schéma « *upwind* » exposé auparavant, est un schéma potentiellement stable. Il existe d'autres approximations plus précises comme le schéma « *Lax-Wendroff* » basé sur des interpolations quadratiques, ou bien des schémas à plusieurs étapes en temps comme le schéma « *leap-frog* », qui sont aussi potentiellement stables.

En revenant à l'équation d'onde unidimensionnelle 1.51, le domaine de dépendance d'un point quelconque $P = u(x_i, t_{n+1})$ est donné par le triangle

isocèle de sommet P ayant comme côtés les caractéristiques de pente $\pm c$ et comme base la condition initiale $u(x, 0)$ dans l'espace solution de la Figure 1.6. Si l'on approxime 1.51 en appliquant des opérateur en *différences centrées* dans l'espace et dans le temps, alors nous retrouvons l'approximation 1.27 qui devient, en terme du Numéro de Courant S :

$$U_i^{n+1} = (1 - S^2)2U_i^n + S^2(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - U_i^{n-1} \quad (1.57)$$

(répétée, voir 1.29). Le schéma numérique 1.57 décrit également un domaine de dépendance triangulaire. Dans ce cas, la condition CFL exige alors que $c\Delta t/\Delta x \leq 1$. Cette condition est exactement la même que dans le cas de l'équation d'advection approximée avec le schéma « *upwind* » (équation 1.56) sans la restriction de signe pour c . Intuitivement, la condition CFL peut donc être interprétée comme une restriction qui limite la distance $c\Delta t$, parcourue par une onde dans un temps Δt , à l'incrément spatial Δx de la grille. Autrement dit, cette condition limite la *vitesse d'onde numérique* $\Delta x/\Delta t$ à la vitesse d'onde physique c . On peut montrer dans le cas de l'équation d'onde unidimensionnelle que la condition CFL 1.56 et aussi suffisante pour assurer la stabilité du schéma en différences 1.57 (Taflove & Hagness, 2000, page 59).

1.2.5.2 Analyse de von Neumann

Afin d'établir une *condition de stabilité suffisante* pour un schéma en différences finies, on réalise généralement une analyse spectrale du schéma. Une des analyses de stabilité parmi les plus connues est celle de *von Neumann*. Considérons la forme la plus générale qu'un schéma en différences puisse adopter :

$$B_1 U^{n+1} = B_0 U^n + F^n, \quad (1.58)$$

où B_1 et B_0 sont des opérateurs en différences indépendants du temps t . Admettons qu'il existe une périodicité de la solution dans une région à m dimensions donnée, discrétisée par une grille Cartésienne régulière. La solution peut être développée en série de Fourier à l'intérieur de cette région de la grille suivant :

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \sum_{(\mathbf{k})} \hat{U}(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.59)$$

Le vecteur position \mathbf{x} représente les points de la grille, \mathbf{k} le vecteur nombre d'onde correspondant aux modes de Fourier et $j = \sqrt{-1}$. En appliquant la transformée de Fourier spatiale discrète à l'équation 1.58 sous sa forme homogène, et en décomposant le champ solution par 1.59, nous obtenons

l'approximation en différences dans le temps suivante :

$$\widehat{B}_1(\mathbf{k})\widehat{U}^{n+1}(\mathbf{k}) = \widehat{B}_0(\mathbf{k})\widehat{U}^n(\mathbf{k}) \quad (1.60)$$

où, si U est un vecteur de dimensions m , \widehat{B}_1 et \widehat{B}_0 sont des matrices de dimension $m \times m$. Puisque les opérateurs en différences sont indépendants de t , 1.60 peut être écrit suivant :

$$\widehat{U}^n = G(\mathbf{k})\widehat{U}^0 \quad (1.61)$$

où

$$G(\mathbf{k}) = \widehat{B}_1^{-1}(\mathbf{k})\widehat{B}_0(\mathbf{k}). \quad (1.62)$$

La matrice $G(\mathbf{k})$, connue comme *matrice* ou *facteur d'amplification*, détermine l'amplitude de chacun des modes de Fourier associés au schéma numérique. D'après la condition de *von Neumann*, le schéma est stable s'il existe une constante K telle que :

$$|\lambda(\mathbf{k})| \leq 1 + K\Delta t \quad \forall \quad \mathbf{k}, \quad (1.63)$$

pour tout vecteur propre $\lambda(\mathbf{k})$ de la matrice d'amplification $G(\mathbf{k})$ et pour toute étape en temps.

1.63 implique que chaque mode spectral du signal contenu dans la grille numérique reste borné le long de l'évolution temporelle du schéma, grâce à la condition imposée au facteur d'amplification. Bien que moins répandues, il existe d'autres conditions suffisantes de stabilité plus sophistiquées (*e.g.*, Richtmyer & Morton, 1967, chapitre quatre).

1.2.5.3 Stabilité Dans Différents Cas

Dans les paragraphes précédents on a mentionné que pour le schéma en différences 1.57 déduit de l'application d'opérateurs en *différences centrées* d'ordre deux dans le temps et dans l'espace (2, 2), la condition de stabilité est donnée par 1.56 (Taflove & Hagness, 2000, page 59). Cette condition correspond donc à l'*équation d'onde acoustique unidimensionnelle* 1.51. Le problème de la propagation des ondes SH (cas dit acoustique ou scalaire) a été aussi abordé en deux dimensions (*e.g.*, Alford et al., 1974, Kelly et al., 1976, Virieux, 1984, Operto et al., 2002). Considérons dorénavant un milieu homogène, isotrope et non borné. Les conditions de stabilité qui ont été établies pour l'*équation d'onde scalaire bidimensionnelle* (équation 1.46) sont (Mitchell, 1969) :

$$\frac{v_s\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.64)$$

pour un schéma en *différences centrées* d'ordre (2,2) (opérateurs 1.12 et 1.13), et :

$$\frac{v_s \Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{\frac{3}{8}} \quad (1.65)$$

pour un schéma également en *différences centrées* mais d'ordre (2,4) (Alford et al., 1974, équation 8). Dans les équations précédentes, v_s représente la vitesse de propagation des ondes S . Si l'on compare 1.64 avec 1.56, on s'aperçoit que la condition de stabilité pour le cas unidimensionnel est moins restrictive que celle associée à l'équation bidimensionnelle malgré l'application des mêmes opérateurs dans les deux cas. De plus on peut aussi constater que dans le cas bidimensionnel, l'application d'opérateurs d'ordre supérieur rend le schéma numérique plus restrictif (comparer 1.65 avec 1.64).

Le cas de la propagation des ondes P-SV (cas dit élastique ou vectoriel) a été probablement plus analysé que le précédent puisqu'il permet d'étudier la totalité des ondes pouvant être présentes dans un milieu élastique. Ce problème a été abordé en résolvant, entre autres, la formulation vitesse-contrainte donnée par le système d'équations 1.81 (*e.g.*, Virieux, 1986, Levander, 1988, Graves, 1996, Saenger et al., 2004). Ainsi, en appliquant les opérateurs en *différences centrées* d'ordre deux 1.12 et 1.13 sur une grille en quinconce (section 1.4.1), la condition de stabilité dans un repère Cartésien de m dimensions s'écrit (Virieux, 1986) :

$$\frac{v_p \Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (1.66)$$

où v_p est la vitesse de propagation des ondes P , et $h = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m$ représente l'incrément spatial de la grille. En 2D (*i.e.* $m = 2$), la condition de stabilité 1.66 est la même que celle correspondant au cas acoustique (condition 1.64). Si l'on applique des opérateurs spatiaux d'ordre quatre (Levander, 1988, Moczo et al., 2000, opérateur 1.24) ou supérieur, on retrouve la généralisation suivante pour la condition de stabilité (Saenger et al., 2000) :

$$\frac{v_p \Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \left(\sum_{k=1}^q |c_k| \right)^{-1} \quad (1.67)$$

où c_k représente les q coefficients des opérateurs en différences utilisés (*e.g.*, les coefficients de l'opérateur 1.24 ou les coefficients de Holberg (1987)). A nouveau, l'application d'opérateurs d'ordre supérieur rend plus restrictive la condition de stabilité indépendamment de la dimension du problème. Dans le cas bidimensionnel à l'ordre deux, nous avons grâce à 1.66 : $S \leq 0.707$ alors que, à l'ordre quatre, nous avons grâce à 1.67 : $S \leq 0.606$. Or, l'application

d'opérateurs dans les quatre directions bissectrices des trois axes Cartésiens de référence (Saenger et al., 2000, voir sections 1.4.2 et 1.4.4) permet de rendre la condition de stabilité moins restrictive mais aussi indépendante du nombre de dimension de l'espace solution. Cette condition est la suivante :

$$\frac{v_p \Delta t}{h} \leq \left(\sum_{k=1}^q |c_k| \right)^{-1} . \quad (1.68)$$

Ce schéma en différences finies a été adopté dans ce travail pour étudier la dynamique de la rupture de séismes, présenté dans la deuxième partie de ce document. Pour illustrer l'avantage de cette dernière approximation par rapport à l'approximation *standard*³ dont la condition de stabilité est donnée par 1.67, prenons l'opérateur d'ordre quatre 1.24 étudié par Levander (1988). Dans le cas tridimensionnel, la condition de stabilité 1.68 établit que $S \leq 0.86$ alors que celle du schéma standard (condition 1.67) établit que $S \leq 0.5$. Ceci signifie que pour assurer la stabilité pour un même modèle de vitesse et une même valeur de h , Δt peut être 1.7 fois plus grand dans le premier cas (donné par 1.68) que dans le cas standard (donné par 1.67).

Hormis les incréments de la grille numérique Δt et h , les conditions de stabilité pour le problème élastique ne dépendent que de v_p . Elles sont indépendantes de v_s et de la relation de Poisson (*i.e.* le rapport entre v_s et v_p).

³Dans la littérature, le stencil proposé par Madariaga (1976) est connu comme le *schéma en quinconce standard*. Voir section 1.4.1

1.2.6 Grilles Numériques Irrégulières

Une grande diversité de stratégies ont été mises en œuvre afin de mieux gérer l'énorme coût informatique inhérent à la simulation 3D de la propagation des ondes en différences finies. Par exemple, le développement de codes parallèles pour l'utilisation de super-calculateurs disposant d'un grand nombre de processeurs (Olsen et al., 1995, Minkoff, 2002) ou bien l'optimisation de l'emploi de la mémoire (Graves, 1996, Moczo et al., 1999) ont permis d'avancer dans cette direction (voir Moczo et al., 2001). Pourtant, l'un des points communs de ces approches est l'utilisation de grilles numériques régulières (*i.e.* des grilles avec des incréments spatiaux constants). Dans le cas d'un modèle de vitesse où les propriétés élastiques varient considérablement, les zones de grande vitesse sont généralement sur-échantillonnées.

Autrement dit, ce sont les zones de faible vitesse qui déterminent la discrétisation du modèle entier. En effet, celles-ci nécessitent un échantillonnage plus fin afin d'y vérifier la condition de stabilité et d'échapper à la dispersion numérique dans la bande fréquentielle d'intérêt. Cela se traduit par un gaspillage considérable de mémoire. La puissance du calcul informatique étant limitée, seules des simulations à basse fréquence peuvent être réalisées (souvent inférieures à $1Hz$). Ainsi, une économie supplémentaire de mémoire est indispensable pour permettre d'effectuer des simulations numériques dans des scénarios plus réalistes.

L'adaptabilité spatiale et temporelle du maillage est une bonne alternative. La stratégie la plus simple permettant une adaptabilité spatiale est l'utilisation de grilles irrégulières orthogonales. En d'autres termes, le modèle est discrétisé par une grille décrivant des parallélépipèdes réguliers (Figure 1.7). Ils existent d'autres stratégies en différences finies plus sophistiquées qui considèrent des grilles irrégulières non-orthogonales, soit structurées soit non-structurées (*e.g.*, Zhang, 1997, Zhang & Tielin, 1999), ou des grilles

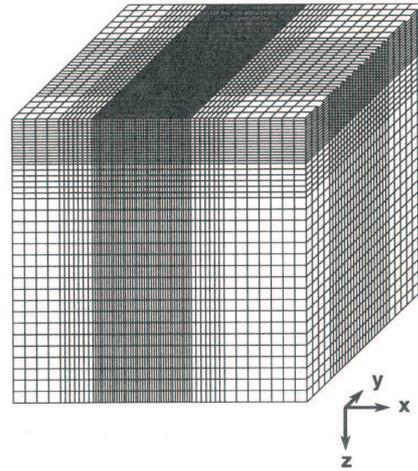


FIG. 1.7: Grille irrégulière orthogonal en différences finies utilisée pour résoudre le système hyperbolique 1.82 dans une grille en quinconce standard, voir section 1.4.1 (d'après Pitarka (1999)).

en coordonnées curvilignes. Elles permettent surtout d'améliorer l'application des conditions aux limites le long des frontières de formes complexes (*e.g.*, Zhang, 2005, Xie et al., 2002, Taflove & Hagness, 2000, chapitre 11). Malheureusement elles n'ont pas été très développées dans le domaine de la propagation des ondes élastiques.

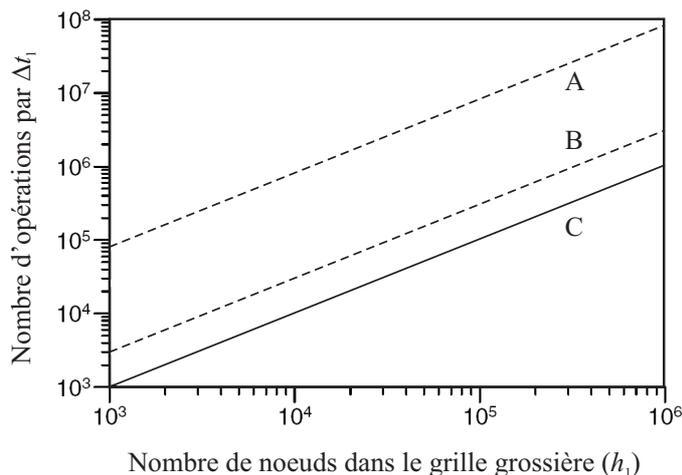


FIG. 1.8: Comparaison du nombre d'opération par Δt_1 pour trois schémas différents : A) dans une grille fine et uniforme avec $h = h_2$ et $\Delta t = \Delta t_2$, B) dans une grille irrégulière avec $h_1 = 3h_2$ et $\Delta t = \Delta t_2$ dans tout le modèle, et C) dans la même grille irrégulière mais avec $\Delta t_1 = 3\Delta t_2$ (modifié d'après Kang & Baag (2004, Figure 13), voir texte).

Une des méthodes les plus efficaces pour réduire le coût de mémoire nécessaire est d'assembler différentes grilles orthogonales ayant un pas de discrétisation spatial différent. Ainsi chaque grille couvre une région différente du modèle de vitesse. Généralement l'interaction entre différentes grilles a lieu à travers des interpolations des champs solution le long des zones dites de transition entre deux régions voisines. Un effort important a été consacré au développement de modèles en différences finies de ce type, en 2D (Moczo, 1989, Jastram & Tessmer, 1994, Hayashi et al., 2001) et en 3D (Pitarka, 1999, Aoi & Fujiwara, 1999, Wang et al., 2001, Kang & Baag, 2004). Un modèle parmi les plus intéressants en terme d'optimisation de calcul est celui proposé par Kang & Baag (2004). Ils combinent deux grilles en quinconce d'espacement différent en respectant indépendamment leur condition de stabilité. Ceci implique qu'ils considèrent également un ajustement du pas temporel Δt . Considérons par exemple deux grilles voisines avec des incrément

ments spatiaux h_1 et h_2 , où $h_1 = nh_2$ et $n = 3, 5, 7, \dots$. Puisque la trajectoire de raffinement du chemin numérique est linéaire (équation 1.67) nous avons que $\Delta t_1 = n\Delta t_2$. L'interaction entre les deux grilles a lieu en trois pas à l'intérieur d'une zone de transition (*i.e.* de chevauchement des deux grilles) : 1) échange des valeurs des champs dans les nœuds communs frontaliers, 2) interpolation spatiale des champs dans les nœuds frontaliers de la grille fine où l'échange n'a pas lieu et 3) interpolation temporel des champs dans les nœuds frontaliers de la grille fine à partir de valeurs connues des champs, passées et futures, appartenant à la grille grossière. Il existe des expressions générales pour des interpolations bilinéaires entre deux grilles voisines (Kang & Baag, 2004, équation 5).

L'avantage principal de cette approche est illustré sur la Figure 1.8 où l'on montre une comparaison du nombre d'opérations de virgule flottante en fonction du nombre de nœuds de la grille grossière (*i.e.* pour des tailles physiques grandissantes du modèle) avec trois approches numériques différentes. Ces approches considèrent : A) une seule grille, fine et uniforme, avec h_2 et Δt_2 ; B) deux grilles voisines avec $h_1 = 3h_2$ et Δt_2 dans tout le modèle ; et C) les mêmes deux grilles que dans le point précédent mais avec $\Delta t_1 = 3\Delta t_2$. On peut remarquer la différence de deux ordres de grandeur entre le nombre d'opérations effectuées dans la grille uniforme et celui dans la multi-grille spatio-temporelle (courbes A et C).

Comme on verra dans les sections 3.4 et 3.5 de la deuxième partie de ce travail, où j'introduis le modèle numérique pour la rupture des séismes, un maillage irrégulier permettrait d'échantillonner d'une manière plus fine la source sans pénaliser l'efficacité du modèle pour la propagation des ondes dans le milieu environnant. L'implémentation d'un maillage irrégulier dans notre modèle de rupture serait particulièrement intéressant, puisque la loi d'échelle donnée par l'équation 3.4 (voir Figures 3.3 et 3.8) exige une réduction du pas de discrétisation spatial h à mesure qu'on ajoute des nœuds dans la source. Pourtant, l'implémentation numérique de ce maillage va au-delà des objectifs principaux de ce travail, raison pour laquelle il n'a pas été mis en œuvre dans le cadre de mon projet doctoral.

1.3 Equations de l'Elastodynamique

1.3.1 Contraintes et Déformations

Soit V le volume d'un corps et n_i le vecteur unitaire normal à la surface extérieure S du corps. Le corps est soumis à l'action des forces de volume f_i , et des forces de surface T_i (*i.e.* des tractions) sur S . La *formule de Cauchy* permet d'exprimer le vecteur des tractions en fonction du tenseur des contraintes τ_{ij} , comme

$$T_i = n_j \tau_{ij}. \quad (1.69)$$

Considérons le champ de déplacement u_i . Si les déformations du corps causées par l'action des forces restent suffisamment petites, le tenseur Eulérien de déformation peut être approximé de la manière suivante :

$$e_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (1.70)$$

où les termes $u_{i,j}$ et $u_{j,i}$ doivent être lus respectivement, selon la notation indicelle introduite par Einstein, comme les dérivées spatiales $\partial u_i / \partial x_j$ et $\partial u_j / \partial x_i$. Si le milieu est *élastique*, il existe un état naturel, où les contraintes et les déformations sont nulles, vers lequel le milieu retournera dès la disparition des forces appliquées. La relation constitutive qui relie contraintes et déformations dans un milieu linéairement élastique est connue comme la *Loi de Hooke*. Elle établit que chaque composante du tenseur des contraintes est une combinaison linéaire des composantes du tenseur de déformation. C'est-à-dire, qu'il existe des constantes c_{ijkl} tel que

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}. \quad (1.71)$$

Si le milieu est isotrope on peut montrer que, grâce à la symétrie des tenseurs τ_{ij} et e_{ij} et puisque $c_{ijkl} = c_{klij}$ ⁴, le tenseur des constantes élastiques se réduit à

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.72)$$

où δ_{ij} est le delta de Kronecker⁵ et λ et μ sont les deux seules constantes élastiques indépendantes nécessaires pour caractériser le milieu, appelées *constantes de Lamé*. Le tenseur des contraintes d'un milieu linéairement élastique et isotrope peut donc être exprimé en fonction des déformations comme

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (1.73)$$

⁴Cette égalité provient d'une argumentation thermodynamique fondée sur le principe suivant : toute variation de l'énergie interne du milieu, associée à la déformation transitoire des ondes sismiques, se produit à entropie constante (Aki & Richards, 2002).

⁵ $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Dans cette équation, la convention de sommation d'Einstein est adoptée pour les indices répétés.

1.3.2 Equation du Mouvement

Dans un système de référence inertiel, les lois de Newton établissent que le taux de variation du *momentum* linéaire d'un corps est égal à la résultante F_i des forces qui agissent sur lui :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_i dV = F_i, \quad (1.74)$$

où V est le volume du corps, ρ est la masse volumique et v_i est le vecteur vitesse. Si le corps est soumis aux actions des tractions T_i sur sa surface extérieure S et des forces de volume f_i , alors la force résultante s'écrit :

$$F_i = \iint_S T_i dS + \iiint_V f_i dV. \quad (1.75)$$

Grâce à la formule de Cauchy (équation 1.69), le vecteur de traction peut s'exprimer en fonction du tenseur des contraintes, τ_{ij} , et du vecteur unitaire normal à S , n_i . Ainsi, nous pouvons réécrire l'intégrale des tractions de l'équation 1.75 en fonction du champ de contrainte et appliquer le théorème de la divergence pour exprimer l'intégrale double comme une intégrale triple :

$$\iint_S T_i dS = \iint_S n_j \tau_{ij} dS = \iiint_V \tau_{ij,j} dV. \quad (1.76)$$

Si l'on substitue l'intégrale de surface de 1.75 par son expression déduite en 1.76, la force résultante devient

$$F_i = \iiint_V (\tau_{ij,j} + f_i) dV \quad (1.77)$$

nous permettant d'aboutir, une fois substituée en 1.74, à *l'équation du mouvement* :

$$\rho \ddot{u}_i = \tau_{ij,j} + f_i \quad (1.78)$$

où \ddot{u}_i représente la dérivée seconde du champ de déplacement, u_i , par rapport au temps. Dans un milieu élastique et homogène, la solution de 1.78 montre que seules deux types d'ondes peuvent exister : les ondes primaires ou compressives (ondes P) et les ondes secondaires ou de cisaillement (ondes S). Leur nom fait référence à leur vitesse de propagation puisque v_p (vitesse

des ondes P) est toujours plus grand que v_s (vitesse des ondes S). Elles peuvent être exprimées en termes des propriétés du milieu selon :

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.79)$$

La déformation transitoire induite par chaque type d'onde est telle que $\nabla \times u_i^P = 0$ et $\nabla \cdot u_i^S = 0$, où u_i^P et u_i^S sont respectivement les champs de déplacement associés aux ondes P et aux ondes S .

1.3.3 Systèmes Hyperboliques d'EDP

L'équation d'onde scalaire 1.46 permet de résoudre le problème acoustique. En d'autres termes, elle permet de propager un champ scalaire comme celui d'une onde sonore ou celui des ondes de cisaillement SH dans un milieu élastique quelconque. Pourtant, si l'on veut étudier la propagation d'un champ tensoriel d'ordre supérieur à zéro, comme celui décrit par la propagation de l'ensemble des ondes élastiques (*e.g.*, les ondes P, SV, SH, Rayleigh et Love), alors l'équation du mouvement 1.78 semble mieux adaptée, puisqu'elle tient compte des six composantes indépendantes du tenseur de contrainte τ_{ij} . Dans cette section on établit deux systèmes d'équations différentielles partielles (EDP) permettant de résoudre, intégralement, le problème de la propagation des ondes dans un milieu linéairement élastique et isotrope. L'un des deux résout le problème en terme du vecteur de vitesse et du tenseur des contraintes. L'autre système le résout uniquement en terme du vecteur de déplacement.

1.3.3.1 Vitesse-Contrainte

Pour exprimer le tenseur des contraintes en fonction du champ de déplacement u_i , on substitue le tenseur de déformation e_{ij} de l'équation 1.73 par l'approximation donnée en 1.70 :

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.80)$$

Afin d'établir un système d'équations du premier ordre ayant comme variables le champ de vitesse v_i et le tenseur des contraintes τ_{ij} il suffit, premièrement, de substituer les dérivées temporelles du déplacement, $\partial u_i / \partial t$, implicites dans l'équation du mouvement 1.78, par le champ de vitesse v_i . Deuxièmement, de dériver par rapport au temps l'équation 1.80 et de reproduire la substitution précédente. Nous obtenons ainsi le *système d'équations*

hyperboliques d'ordre un suivant :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \tau_{ij,j} + f_i \quad (1.81a)$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (1.81b)$$

En trois dimensions (3D), ce système abrite neuf équations différentielles qui, en absence de forces de volume, devient explicitement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.82)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé introduites précédemment dans la section 1.3.1.

Comme on verra plus tard (section 1.4.1), ce système d'équations a été résolu par la première fois en différences finies par Madariaga (1976). Le stencil employé décrit une *grille en quinconce* dans le temps et dans l'espace. Cette approche présente de grands avantages pour la propagation des ondes élastiques dans des milieux complexes en terme de stabilité et de précision numérique (Virieux, 1986, Levander, 1988). Elle reste stable et précise en présence d'interfaces fluide-solide et de grandes valeurs du rapport de

Poisson. Dans la deuxième partie nous allons voir qu'elle a aussi ouvert des nombreuses voies pour la modélisation de la dynamique de la rupture des séismes (e.g., Virieux & Madariaga, 1982, Madariaga et al., 1998).

1.3.3.2 Déplacement-Contrainte

En absence de forces de volume f_i , l'équation du mouvement 1.78 peut être partiellement développée pour l'indice j :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{iz}}{\partial z}. \quad (1.83)$$

A partir de la loi de Hooke simplifiée 1.73 et de la définition du tenseur Eulérien de déformation 1.70 (*i.e.* à partir de l'expression 1.80), les composantes du tenseur des contraintes de cette équation peuvent s'exprimer en fonction du vecteur de déplacement u_i comme

$$\begin{aligned} \tau_{ix} &= \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ix} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x_i} \right) \\ \tau_{iy} &= \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{iy} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x_i} \right) \\ \tau_{iz} &= \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{iz} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Afin d'établir le système d'équations désiré, on substitue ces expressions des contraintes dans l'équation 1.83. En développant les trois composantes du vecteur de déplacement (*i.e.* pour $i = 1, 2, 3$), une fois les dérivées spatiales obtenues et les termes restants factorisés, nous obtenons un *système d'équations hyperboliques d'ordre deux* qui dépend uniquement du champs de déplacement u_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} \right) + \right. \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \Big].$$

On peut montrer par induction que ce système d'ordre deux est équivalent à celui d'ordre un correspondant à la formulation vitesse-contrainte (équations 1.82). La solution numérique de 1.85 en 2D a été proposée par Luo & Shuster (1990) avec un schéma en différences finies de précision (2, 2). Leur approche considère aussi une *grille en quinconce* du champ solution mais uniquement dans l'espace. Le nom de cette formulation, *parsimonious*, provient de la substitution des contraintes 1.85 dans l'équation du mouvement 1.83. L'extension à 3D de cette méthode a été faite par Ohminato & Chouet (1997). Le *parsimonious* n'est que le résultat d'une élimination de variables par substitution aboutissant à un système d'EDP d'ordre supérieur. La vertu principale de l'approximation numérique de ce type de système est l'utilisation de variables intermédiaires (*i.e.* les composantes du tenseur des contraintes) qui ne doivent pas être stockées en mémoire. Ainsi, la disposition spatiale des points où sont connues les trois composantes du déplacement reste la même que celle des vitesses dans la grille en quinconce proposée par Madariaga (1976) (voir section 1.4.1). La différence la plus notable entre les deux grilles numériques est la disparition des six composantes indépendantes du tenseur des contraintes. Cela rend l'approche numérique du système hyperbolique d'ordre deux considérablement plus performant en terme de stockage de données. Plus précisément, à l'ordre deux en temps, la formulation en vitesse-contrainte demande 1.5 fois plus de stockage que celle en déplacement (Luo & Shuster, 1990). L'implémentation des opérateurs en différences associés à la grille en quinconce subjacente dans le système 1.85 est plus compliquée. Pourtant, une fois réalisée au deuxième ordre de précision, l'extrapolation vers des opérateurs d'ordre supérieur est immédiate.

1.4 Discrétisation des Equations

Dans les annales de l'application des méthodes en différences finies pour la propagation des ondes élastiques, des formulations en déplacement de l'équation d'onde ont été généralement approximées en employant de grilles numériques conventionnelles⁶. Le choix d'une grille conventionnelle pour une formulation en déplacement, comme dans le cas de l'équation du mouvement 1.78 ou notamment l'équation d'ondes scalaire 1.51, a été un choix pertinent et assez naturel (Alterman & Karal, 1968, Boore, 1970, Alford

⁶Discrétisation régulière des champs solution et des propriétés du milieu aux mêmes points de l'espace.

et al., 1974, Kelly et al., 1976). Pourtant, ce type de grilles implique des problèmes d'imprécision (*i.e.* de dispersion numérique) quand le milieu présente des gradients de vitesse importants, ou bien d'instabilité dans des milieux avec des valeurs de coefficients de Poisson élevés (Stephen, 1983). Ce dernier problème pose de grandes difficultés à l'égard de la modélisation des ondes P-SV dans des milieux biphasés solide-liquide, où les équations à l'intérieur des fluides doivent être modifiées (*i.e.* équation d'onde acoustique) afin de gérer correctement l'intégration entre les deux milieux.

1.4.1 Grilles en Quinconce

1.4.1.1 Grille en Quinconce Standard

Inspiré probablement par la grande découverte de Kane Yee (1966) dix ans plutôt dans le domaine de l'électromagnétisme (voir Taflové & Hagness, 2000, page 75), Raúl Madariaga a introduit la *grille en quinconce*⁷ pour le système d'équations élastodynamiques 1.82 dans son travail, devenu un classique, consacré à l'étude de la radiation et propagation dynamique de la rupture des séismes (Madariaga, 1976). Basé sur un système d'opérateurs en *différences centrées* de type « *leap-frog* », le schéma numérique subjacent à la *grille en quinconce* est explicite et en accord avec les décalages spatial et temporel des composantes des champs solution fixés par la grille (Figure 1.9). L'idée centrale du schéma en quinconce est de calculer les dérivées des champs, quelle que soit la dérivée (spatiale ou temporelle), au centre de l'incrément de la grille qui sépare deux nœuds du champ dérivé (soit h soit Δt selon la dérivée effectuée). De cette manière, les valeurs de toutes les dérivées comprises dans chaque équation du système sont calculées, à chaque itération, dans le même point spatio-temporel.

Devenus également des classiques, les travaux pionniers de Jean Virieux dans les années 80 ont élargis remarquablement les horizons de la modélisation numérique en sismologie. Grâce à l'utilisation de la *grille en quinconce* pour l'étude de la propagation des ondes SH (Virieux, 1984) et P-SV (Virieux, 1986) en milieux complexes, ces travaux ont mis en évidence les grandes qualités de ce schéma en différence finies dès lors considéré comme la *méthode standard*. Parmi les qualités les plus remarquables, nous trouvons que : 1) le schéma reste stable et précis pour toutes les valeurs du coefficient de Poisson, ν , constituant ainsi un outil adapté à la exploration sismique en milieux marins ; 2) la stabilité et la dispersion numérique du schéma sont faibles et relativement insensibles à ν ; 3) l'implémentation de sources ponc-

⁷ En anglais dit « *staggered grid* ».

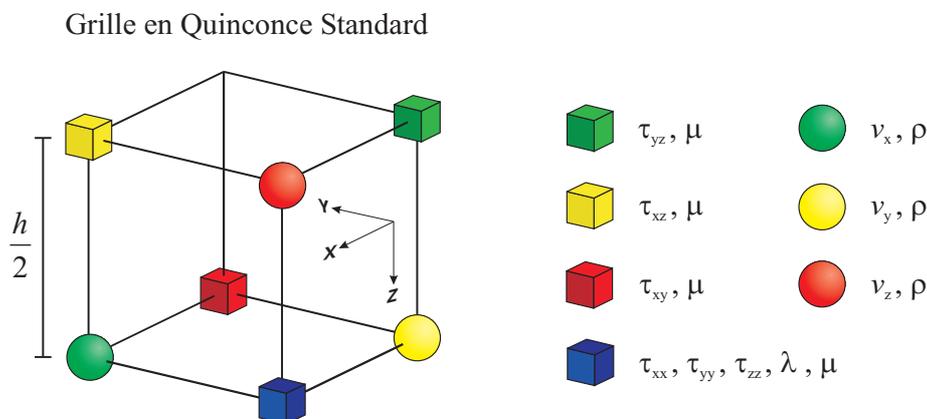


FIG. 1.9: Cellule élémentaire de la *grille en quinconce standard* proposée par Madariaga (1976). τ_{ij} représente le tenseur de contrainte, v_i le vecteur de vitesse, ρ la masse volumique, λ et μ les constantes de Lamé, et h le pas de discrétisation spatial de la grille.

tuelles est simple, soit explosives soit double-couple ; 4) la vérification des conditions limites le long de la surface libre n'est pas compliquée.

L'application d'opérateurs d'ordre supérieur (*i.e.* d'ordre quatre) dans la *grille en quinconce* a encore souligné les avantages de cette méthode (Levander, 1988). Tandis que le schéma à l'ordre deux a besoin de 10 points par longueur d'onde minimale pour minimiser la dispersion numérique, c'est-à-dire $N_\lambda \leq 10$ (voir équation 1.40), le schéma à l'ordre quatre n'a besoin que de cinq points ($N_\lambda \leq 5$, Levander, 1988, Moczo et al., 2000). Cela se traduit par une réduction de la mémoire vive d'un facteur 1/4 et 1/8 respectivement pour les cas 2D et 3D, par rapport à la formulation d'ordre deux pour une même précision. D'autres approches encore plus performantes basées sur la même *grille en quinconce* ont été proposées (voir section 1.2.6 et Moczo et al., 2001). Par exemple, celle formulée en déplacement-contraintes (*i.e.* le *parsimonious*, Luo & Shuster, 1990, Ohminato & Chouet, 1997) déjà discutée dans la section 1.3.3. Grâce aux atouts mentionnés, les méthodes basées sur la *grille en quinconce* standard demeurent les approches en différences finies les plus utilisées pour la modélisation numérique en sismologie (*e.g.*, Graves, 1996, Pitarka, 1999, Olsen, 2000, Minkoff, 2002, Kang & Baag, 2004).

1.4.1.2 Grille Partiellement en Quinconce

Tout en gardant les caractéristiques des principaux atouts mentionnés dans les paragraphes précédents (voir aussi section 1.4.4), une nouvelle mé-

thode en différences finies basée sur une grille en quinconce modifiée a été récemment proposée (Saenger et al., 2000). La nouvelle méthode en différences finies considère une *grille partiellement en quinconce*⁸, nommée aussi par les auteurs *grille en quinconce tournée*⁹. C'est-à-dire, une grille qui présente un décalage spatial par champ (Figure 1.10) et non pas par composante des champs comme dans le cas de la *grille en quinconce standard* (Figure 1.9). Dans la formulation vitesse-contrainte cela se traduit par une discrétisation des champs solution où le vecteur vitesse et le tenseur des contraintes, chacun rassemblé aux mêmes nœuds de la grille, sont décalés spatialement l'un par rapport à l'autre. L'originalité de cette méthode demeure fondamentalement dans la définition des opérateurs en différences. Comme on verra dans la section 1.4.2, ces opérateurs sont appliqués le long des bissectrices des axes de références cartésiens.

Grille Partiellement en Quinconce

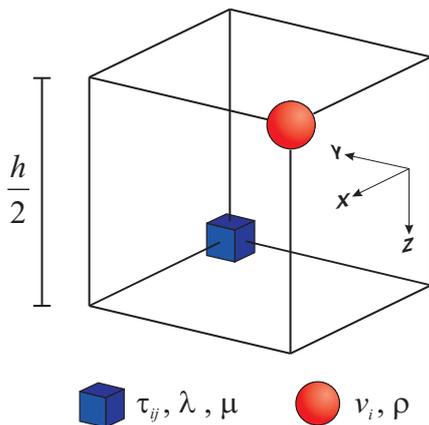


FIG. 1.10: Cellule élémentaire de la *grille partiellement en quinconce* proposée par Saenger et al. (2000). τ_{ij} représente le tenseur de contrainte, v_i le vecteur de vitesse, ρ la masse volumique, λ et μ les constantes de Lamé, et h le pas de discrétisation spatial de la grille.

Les propriétés et capacités de cette approche *partiellement en quinconce* ont été rapidement explorées en 2D et 3D. La méthode est précise et peu coûteuse pour simuler la propagation des ondes dans des milieux fracturés (Saenger et al., 2000, 2004) ou bien dans des milieux viscoélastiques anisotropes en présence d'une topographie de géométrie quelconque (Saenger & Bohlen, 2004, Bohlen & Saenger, 2006).

D'autres approches aussi basées sur des *grilles partiellement en quinconce* ont été proposées. Le premier travail en différences finies de ce genre a été probablement fait par Andrews (1973) pour l'étude de la source sismique. Dans son approche, formulée en vitesse-contrainte, la grille numérique est constituée par des cellules élémentaires triangulaires, similaire à la grille non-

structuré proposée par Zhang & Tielin (1999) et plus récemment, pour l'étude de la propagation des ondes dans des milieux fracturés, par Zhang

⁸En anglais dit « *partly-staggered grid* ».

⁹En anglais dit « *rotated staggered grid* ».

(2005). Magnier et al. (1994) a aussi proposé une discrétisation « minimale » faite à partir de simplex (*i.e.* de triangles dans le cas 2D) qui en 2D décrit la même *grille partiellement en quinconce* que dans l'approche précédente. La différence réside dans les opérateurs en différences puisqu'ils ne prennent que $N + 1$ points par dérivée, où N est le nombre de dimensions du problème (*i.e.* 3 points par dérivée en 2D). Dans ce travail on discute aussi une discrétisation cartésienne pour le cas anisotrope (voir Magnier et al., 1994, Figure 3) qui correspond exactement à la grille utilisée par Saenger et al. (2000) mais en déplacement-contraintes. D'autres méthodes en différences finies formulées en vitesse-contrainte pour des *grilles partiellement en quinconce* non-orthogonales ont été introduites par Zhang (1997) et par Zhang & Tielin (1999), ainsi qu'en déplacement-contrainte par Zhang (2005). Le stencil est donc représenté par un quadrangle irrégulier. Les opérateurs différentiels sont définis dans un système de coordonnées propre aux quadrangles à travers des fonctions de transformation de repère. Dans le cas particulier où l'on considère une grille orthogonale, la grille devient celle utilisée par Saenger et al. (2000)(voir Zhang, 1997, Figure 1).

L'analyse de la méthode partiellement en quinconce proposée par Saenger et al. (2000) sera plus détaillée au cours des sections suivantes de cette première partie, puisqu'il s'agit de la méthode adoptée pour étudier la dynamique de la rupture des séismes dans la deuxième partie de ce travail.

1.4.2 Opérateurs Différentiels Tournés

Dans cette section je vais établir les opérateurs en différences finies 3D proposés par Saenger et al. (2000) pour résoudre le système d'équations hyperboliques 1.82. C'est-à-dire, la formulation en vitesse-contrainte basée sur une discrétisation partiellement en quinconce.

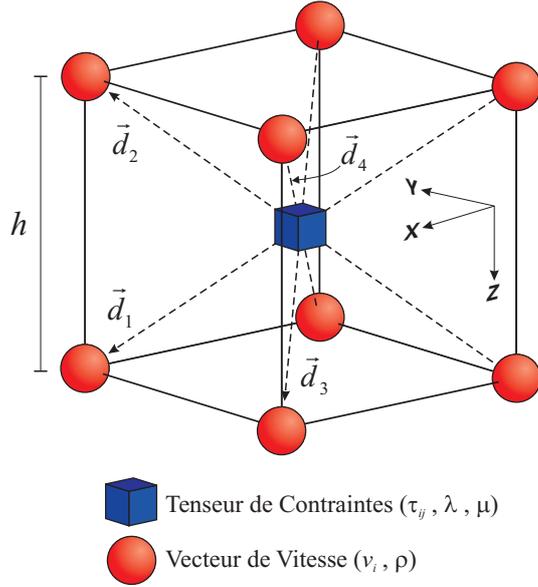


FIG. 1.11: Directions de dérivation \vec{d}_i des opérateurs différentiels 3D proposées par Saenger et al. (2000) pour la *grille partiellement en quinconce*. v_i et τ_{ij} sont, respectivement, le vecteur vitesse et le tenseur des contraintes; $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ est l'incrément spatial de la grille, ρ la masse volumique, λ et μ sont les constantes de Lamé.

Considérons l'ensemble suivant de vecteurs unitaires linéairement indépendants $A \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \\
 \hat{d}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \\
 \hat{d}_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \\
 \hat{d}_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})
 \end{aligned} \tag{1.86}$$

où \hat{i} , \hat{j} et \hat{k} sont, respectivement, des vecteurs unitaires dans les directions des axes cartésiens X , Y et Z (Figure 1.11). Soit $B_n = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m)$ un ensemble de n -bases génératrices de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 . Si l'on restreint le nombre de vecteurs \vec{e}_i de B_n à trois (*i.e.* $m = 3$), le nombre potentiel de bases non-orthogonales appartenant à l'ensemble A est égal à quatre (*i.e.* $n = 4$). Ces bases sont les suivantes :

$$\begin{aligned} B_1 &= (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3), & B_2 &= (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_4), \\ B_3 &= (\hat{d}_1, \hat{d}_3, \hat{d}_4), & B_4 &= (\hat{d}_2, \hat{d}_3, \hat{d}_4). \end{aligned} \quad (1.87)$$

La combinaison linéaire de B_1 permet de générer un vecteur quelconque $\vec{v}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{d}_1 + x_2\hat{d}_2 + x_3\hat{d}_3 \quad (1.88)$$

où $x_i \in \mathbb{R}$. En substituant les vecteurs de la base par 1.86 nous avons le système d'équations linéaires suivant :

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \longrightarrow \quad x_1 = x\sqrt{3} - x_2 - x_3 \quad (1.89a)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 - x_3) \quad \longrightarrow \quad x_2 = y\sqrt{3} - x_1 + x_3 \quad (1.89b)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2 + x_3) \quad \longrightarrow \quad x_3 = z\sqrt{3} - x_1 + x_2. \quad (1.89c)$$

En résolvant 1.89 pour les inconnues (x_1, x_2, x_3) on retrouve :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z) \\ x_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x - z) \\ x_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x - y). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Si l'on suit le même procédé à partir de la base génératrice B_2 , nous avons :

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{d}_1 + x_2\hat{d}_2 + x_4\hat{d}_4$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x + z) \\ x_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(y - z) \\ x_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x - y). \end{aligned} \quad (1.91)$$

De même, pour les bases restantes B_3 et B_4 nous avons, respectivement, les combinaisons linéaires

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{d}_1 + x_3\hat{d}_3 + x_4\hat{d}_4$$

et

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_2\hat{d}_2 + x_3\hat{d}_3 + x_4\hat{d}_4$$

à partir desquelles on déduit, respectivement,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y) \\ x_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(z - y) \\ x_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x - z) \end{aligned} \tag{1.92}$$

et

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y) \\ x_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x + z) \\ x_4 &= \frac{-\sqrt{3}}{2}(y + z). \end{aligned} \tag{1.93}$$

Soit $\Phi = \Phi[x_1(x, y, z), x_2(x, y, z), x_3(x, y, z), x_4(x, y, z)]$ une fonction scalaire composée quelconque. Les dérivées partielles de Φ par rapport aux trois coordonnées cartésiennes x , y et z sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.94}$$

Si l'on exprime les dérivées de Φ dans chacune des bases B_1 , B_2 , B_3 et B_4 en tenant compte respectivement des relations 1.90, 1.91, 1.92 et 1.93, on obtient quatre expressions équivalentes pour les trois dérivées cartésiennes du champ Φ :

Base B_1

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)$$

Base B_2

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)$$

Base B_3

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right)$$

Base B_4

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right).$$

En faisant la moyenne par dérivée cartésienne des expressions associées aux quatre bases (*i.e.* des dérivées dans les directions données par 1.87), nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{4} & \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{4} & \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{4} & \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) \right], \end{aligned}$$

en les simplifiant, elles deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_4} \right) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_4} \right) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_4} \right).\end{aligned}\tag{1.95}$$

Ces équations ont été obtenues en supposant la grille régulière avec $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$. Si $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ (module des vecteurs \vec{d}_i de la Figure 1.11), alors $\sqrt{3} = \Delta l/h$ dans 1.95. Dans un cas général, les dérivées du champ Φ données par 1.95 peuvent être réécrites comme :

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \Phi &= \left[\frac{\Delta l}{4\Delta x} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \right] \Phi \\ \left[\frac{\partial}{\partial y} \right] \Phi &= \left[\frac{\Delta l}{4\Delta y} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \right] \Phi \\ \left[\frac{\partial}{\partial z} \right] \Phi &= \left[\frac{\Delta l}{4\Delta z} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \right] \Phi.\end{aligned}\tag{1.96}$$

Les termes entre crochets représentent les opérateurs différentiels appliqués à Φ . Les opérateurs dans les trois directions cartésiennes à gauche sont une fonction de quatre opérateurs dans les directions diagonales décrites par les vecteurs \hat{d}_i définis dans 1.86 (voir Figure 1.11).

Les opérateurs différentiels cartésiens des équations 1.96 peuvent être approximés par des opérateurs discrets en différences finies. Étant donné que dans une grille régulière $\Delta l/h = \sqrt{3}$, et puisque l'incrément spatial dans les directions de dérivation \hat{d}_i est Δl , alors l'approximation de ces opérateurs prend la forme générale :

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{4h} \left(D_{\hat{d}_1} + D_{\hat{d}_2} + D_{\hat{d}_3} + D_{\hat{d}_4} \right)\tag{1.97a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{4h} \left(D_{\hat{d}_1} + D_{\hat{d}_2} - D_{\hat{d}_3} - D_{\hat{d}_4} \right)\tag{1.97b}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \approx \frac{1}{4h} \left(D_{\hat{d}_1} - D_{\hat{d}_2} + D_{\hat{d}_3} - D_{\hat{d}_4} \right)\tag{1.97c}$$

où les $D_{\hat{d}_i}$ représentent les différences finies associées à n'importe quel opérateur discret pour la première dérivée.

1.4.2.1 Opérateurs à l'Ordre Deux

Les approximations généralisées 1.97 peuvent s'exprimer à l'ordre deux en utilisant les opérateurs *en différences centrées* 1.12. Appliqués au champ discret $\Phi(x_i, y_j, z_k)$ ¹⁰, les $D_{\hat{d}_i}$ deviennent alors les différences finies suivantes :

$$D_{\hat{d}_1} \Phi_{i,j,k} = \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \quad (1.98a)$$

$$D_{\hat{d}_2} \Phi_{i,j,k} = \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (1.98b)$$

$$D_{\hat{d}_3} \Phi_{i,j,k} = \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \quad (1.98c)$$

$$D_{\hat{d}_4} \Phi_{i,j,k} = \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (1.98d)$$

De cette manière, l'application de 1.97 au champ Φ étant donné 1.98 aboutit aux *opérateurs en différences finies d'ordre deux pour la grille partiellement en quinconce* donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i,j,k}}{\partial x} \approx \frac{1}{4h} & \left(\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \right. \\ & \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \\ & \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \\ & \left. \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (1.99a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i,j,k}}{\partial y} \approx \frac{1}{4h} & \left(\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \right. \\ & \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \\ & \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \\ & \left. \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (1.99b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i,j,k}}{\partial z} \approx \frac{1}{4h} & \left(\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \right. \\ & \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \\ & \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \\ & \left. \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (1.99c)$$

¹⁰Selon la nomenclature introduite dans la section 1.2.1, $(x_i = i\Delta x)$, $(y_j = j\Delta y)$ et $(z_k = k\Delta z)$, pour $(i, j, k) \in \mathbb{N}$.

1.4.2.2 Opérateurs à l'Ordre Quatre

Les opérateurs généralisés 1.97 peuvent aussi être approximés à l'ordre quatre en utilisant l'expression 1.24. Dans ce cas, les différences finies $D_{\hat{d}_i}$ appliquées au champ discret $\Phi(x_i, y_j, z_k)$ deviennent :

$$D_{\hat{d}_1} \Phi_{i,j,k} = c_1 \left(\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) + \quad (1.100a)$$

$$c_2 \left(\Phi_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}} \right)$$

$$D_{\hat{d}_2} \Phi_{i,j,k} = c_1 \left(\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \right) + \quad (1.100b)$$

$$c_2 \left(\Phi_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}} \right)$$

$$D_{\hat{d}_3} \Phi_{i,j,k} = c_1 \left(\Phi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) + \quad (1.100c)$$

$$c_2 \left(\Phi_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}} \right)$$

$$D_{\hat{d}_4} \Phi_{i,j,k} = c_1 \left(\Phi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \right) + \quad (1.100d)$$

$$c_2 \left(\Phi_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}} \right)$$

où $c_1 = 9/8$ et $c_2 = -1/24$. L'application de 1.97 au champ Φ une fois $D_{\hat{d}_i}$ remplacés par les différences centrées 1.100, nous donne les *opérateurs en différences finies d'ordre quatre pour la grille partiellement en quinconce*. Après simplification, nous retrouvons :

$$\frac{\partial \Phi_{i,j,k}}{\partial x} \approx \frac{1}{4h} \left[c_1 \left(\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} + \right. \quad (1.101a)$$

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} +$$

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} +$$

$$\left. \Phi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \right) +$$

$$c_2 \left(\Phi_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}} +$$

$$\Phi_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}} +$$

$$\Phi_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}} +$$

$$\left. \Phi_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}} \right]$$

$$\frac{\partial \Phi_{i,j,k}}{\partial y} \approx \frac{1}{4h} \left[c_1 \left(\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} + \right. \quad (1.101b)$$

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} -$$

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \\
 & \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Big) + \\
 & c_2 \left(\Phi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}} + \right. \\
 & \Phi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}} - \\
 & \Phi_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}} + \Phi_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}} - \\
 & \left. \Phi_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}} + \Phi_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}} \right) \Big] \\
 \frac{\partial \Phi_{i,j,k}}{\partial z} \approx & \frac{1}{4h} \left[c_1 \left(\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \right. \right. \\
 & \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \\
 & \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \\
 & \left. \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) + \\
 & c_2 \left(\Phi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}} - \right. \\
 & \Phi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}} + \Phi_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}} + \\
 & \Phi_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}} - \Phi_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}} - \\
 & \left. \Phi_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}} + \Phi_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}} \right) \Big]. \tag{1.101c}
 \end{aligned}$$

1.4.3 Equations en Différences Tournées

Les premières dérivées spatiales du système d'équations hyperboliques 1.82 (formulation en vitesse-contrainte) peuvent être approximées en utilisant les opérateurs spatiaux à l'ordre deux (expressions 1.99) ou à l'ordre quatre (expressions 1.101). En ce qui concerne les premières dérivées temporelles (*i.e.* les membres de gauche du système), on peut les approcher en faisant appel à l'opérateur d'ordre deux 1.13. Si l'on calcule les dérivées temporelles tous les demi-pas en temps, alors le système en question peut être résolu selon un schéma « *leap-frog* » en quinconce avec un décalage d'un $\Delta t/2$ entre le vecteur de vitesse et le tenseur des contraintes. Ainsi, en prenant les approximations du vecteur de vitesse et du tenseur des contraintes, respectivement

$$\mathbf{V}_{i,j,k}^n \approx \mathbf{v}(x_i, y_j, z_k, t_n)$$

et

$$\Sigma_{i,j,k}^n \approx \boldsymbol{\tau}(x_i, y_j, z_k, t_n),$$

les équations du système 1.82 peuvent être approximées à l'ordre deux en temps, tout en restant généralisées par rapport aux opérateurs spatiaux, comme :

$$\begin{aligned}
 [V_x]^{n+\frac{1}{2}} &= [V_x]^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} [\Sigma_{xx}]^n + \frac{\partial}{\partial y} [\Sigma_{xy}]^n + \frac{\partial}{\partial z} [\Sigma_{xz}]^n \right) \\
 [V_y]^{n+\frac{1}{2}} &= [V_y]^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} [\Sigma_{xy}]^n + \frac{\partial}{\partial y} [\Sigma_{yy}]^n + \frac{\partial}{\partial z} [\Sigma_{yz}]^n \right) \\
 [V_z]^{n+\frac{1}{2}} &= [V_z]^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} [\Sigma_{xz}]^n + \frac{\partial}{\partial y} [\Sigma_{yz}]^n + \frac{\partial}{\partial z} [\Sigma_{zz}]^n \right)
 \end{aligned} \tag{1.102}$$

pour les trois composantes du vecteur de vitesse, et :

$$\begin{aligned}
 [\Sigma_{xx}]^{n+1} &= [\Sigma_{xx}]^n + [\lambda + 2\mu] \Delta t \frac{\partial}{\partial x} [V_x]^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \lambda \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial y} [V_y]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial z} [V_z]^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 [\Sigma_{yy}]^{n+1} &= [\Sigma_{yy}]^n + [\lambda + 2\mu] \Delta t \frac{\partial}{\partial y} [V_y]^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \lambda \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} [V_x]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial z} [V_z]^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 [\Sigma_{zz}]^{n+1} &= [\Sigma_{zz}]^n + [\lambda + 2\mu] \Delta t \frac{\partial}{\partial z} [V_z]^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \lambda \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} [V_x]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} [V_y]^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 [\Sigma_{xy}]^{n+1} &= [\Sigma_{xy}]^n + \mu \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial y} [V_x]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} [V_y]^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 [\Sigma_{xz}]^{n+1} &= [\Sigma_{xz}]^n + \mu \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial z} [V_x]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} [V_z]^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 [\Sigma_{yz}]^{n+1} &= [\Sigma_{yz}]^n + \mu \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial z} [V_y]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} [V_z]^{n+\frac{1}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{1.103}$$

pour les six composantes indépendantes du tenseur des contraintes. Dans ces équations, ρ est la masse volumique, et λ et μ les constantes de Lamé introduites dans la section 1.3.1.

1.4.3.1 Formulation à l'Ordre (2, 2)

Une fois les opérateurs spatiaux contenus en 1.102 et 1.103 substitués par les approximations à l'ordre deux données par 1.99, on obtient le *système*

d'équations en différences tournées à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$ formulé en vitesse-contrainte dans une grille partiellement en quinconce suivant :

Composante v_x du vecteur de vitesse :

$$\left[V_x \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{4h} \left[\frac{1}{\rho} \right]_{i,j,k} \quad (1.104a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \end{aligned} \right\}.$$

Composante v_y du vecteur de vitesse :

$$\left[V_y \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{4h} \left[\frac{1}{\rho} \right]_{i,j,k} \quad (1.104b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left. \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \right\}.
 \end{aligned}$$

Composante v_z du vecteur de vitesse :

$$\left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{4h} \left[\frac{1}{\rho} \right]_{i,j,k} \quad (1.104c)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \right. \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left. \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n \end{aligned} \right\}.$$

Composante τ_{xx} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned} \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda + 2\mu]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \quad (1.104d) \\ & \left\{ \left[V_x \right]_{i+1, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i, j, k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left[V_x \right]_{i+1, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \left[V_x \right]_{i+1, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \left. \left[V_x \right]_{i+1, j, k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \\ & \left\{ \left[V_y \right]_{i+1, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i, j, k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left[V_y \right]_{i+1, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \left[V_y \right]_{i+1, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \left[V_y \right]_{i+1, j, k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \left[V_z \right]_{i+1, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i, j, k}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \left[V_z \right]_{i+1, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \left[V_z \right]_{i+1, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \left. \left[V_z \right]_{i+1, j, k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Composante τ_{yy} du tenseur de contrainte :

$$\left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda + 2\mu]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \quad (1.104e)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \quad \left[V_y \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \quad \left. \left[V_y \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \\
 & \left\{ \left[V_x \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left[V_x \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \quad \left[V_x \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \quad \left[V_x \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \quad \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \quad \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Composante τ_{zz} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned}
 \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda + 2\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (1.104f) \\
 & \left\{ \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \\
 & \quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \quad \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \quad \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & [V_x]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - [V_x]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_x]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - [V_x]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_x]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - [V_x]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_x]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - [V_x]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_y]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - [V_y]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_y]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - [V_y]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & [V_y]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + [V_y]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & [V_y]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + [V_y]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}.$$

Composante τ_{xy} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned} [\Sigma_{xy}]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= [\Sigma_{xy}]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (1.104g) \\ & \left\{ \begin{aligned} & [V_x]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - [V_x]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_x]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - [V_x]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & [V_x]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + [V_x]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & [V_x]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + [V_x]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_y]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - [V_y]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_y]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - [V_y]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_y]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - [V_y]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & [V_y]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - [V_y]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Composante τ_{xz} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned}
 \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (1.104h) \\
 &\left\{ \left[V_x \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \\
 &\quad \left[V_x \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \left[V_x \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 &\quad \left[V_x \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Composante τ_{yz} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned}
 \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (1.104i) \\
 &\left\{ \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \\
 &\quad \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \left[V_y \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 &\quad \left[V_y \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 &\quad \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\}.$$

Dans ces équations, les termes entre crochets sont des fonctions discrètes aux points de la grille indiqués par l'indice supérieur (indice temporel) et les indices inférieurs (indices spatiaux) à droite des crochets. Le lecteur trouvera des formules similaires à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^4]$, c'est-à-dire en substituant les opérateurs spatiaux de 1.102 et de 1.103 par 1.101, dans l'annexe B.

Les opérateurs en 2D à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$ sont décrits dans le chapitre 3, équation 3.2. Les expressions en 2D des opérateurs à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^4]$ sont données dans l'annexe A.

1.4.4 Stabilité et Dispersion

Dans les sections 1.2.4 et 1.2.5, j'ai abordé de manière générale les principaux problèmes des schémas numériques associés à la discrétisation en différences finies des équations différentielles. On a obtenu et analysé les relations de dispersion associées à l'équation d'onde acoustique ainsi que les conditions de stabilité de différentes approches. Dans cette section, je mettrai en valeur les propriétés numériques du schéma en différences finies proposé par Saenger et al. (2000), basé sur une grille partiellement en quinconce, puisque c'est l'approche adoptée dans la deuxième partie de ce travail pour la modélisation de la rupture de séismes. Autrement dit, les résultats rapportés dans cette section ont été obtenus par Saenger (2000) et par Saenger et al. (2000). En suivant leur démarche, je ferai aussi, entre autres, une comparaison des propriétés de leur méthode avec celles de la méthode standard basé sur une grille en quinconce (Madariaga, 1976, Virieux, 1986).

1.4.4.1 Condition de Stabilité

L'analyse formelle de la stabilité des schémas numériques dans des milieux *fortement hétérogènes*¹¹ représente un problème difficile. Ces difficultés sont dues à la diversité des modes spectraux associés à la grande quantité d'ondes différentes qui peuvent exister, notamment les ondes dispersives comme celles de surface. Afin de réaliser une analyse de stabilité comme celle de *von Neumann* (section 1.2.4) il faut partir d'un espace homogène non-borné. Dans ces conditions et pour une onde plane harmonique, la condition de stabilité de *von Neumann* du schéma partiellement en quinconce de précision $O[(\Delta t)^2, h^2]$, dont les équations explicites se trouvent à la fin de la section précédente (système 1.104), est la suivante :

$$\frac{v_p \Delta t}{h} \leq 1. \quad (1.105)$$

Ce résultat est remarquable. Si l'on compare cette condition de stabilité avec celle pour l'équation d'onde acoustique unidimensionnelle 1.56 (ou celle de l'équation d'advection) discrétisée avec une précision d'ordre $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$ (équation 1.27), on trouve qu'elles sont très similaires. Cela veut dire que, dans le cas 3D élastique, le *pas magique de discrétisation* $\Delta t = h/v_p$, donné par 1.105, est suffisant pour assurer la stabilité du schéma. De plus on voit que, hormis v_p , la condition 1.105 ne dépend que de Δt et de h alors que, dans

¹¹ Des milieux où l'on trouve de grandes contrastes d'impédance (*i.e.* de propriétés élastiques), voir section 1.2.5.

le cas du schéma standard (équation 1.67), elle dépend aussi de la dimension m du problème.

La même analyse faite à partir d'opérateurs d'ordre supérieur aboutit à une généralisation de la condition de stabilité pour le schéma partiellement en quinconce donnée par :

$$\frac{v_p \Delta t}{h} \leq \left(\sum_{k=1}^q |c_k| \right)^{-1}, \quad (1.106)$$

rapportée précédemment (équation 1.68), où c_k représente les q coefficients différents des opérateurs en différences (*e.g.*, les coefficients de l'opérateur 1.24 ou les coefficients de Holberg (1987)). Tel qu'il a déjà été souligné dans la section 1.2.5, l'application d'opérateurs d'ordre supérieur rend en général plus restrictives les conditions de stabilité. A l'ordre deux, nous avons grâce à 1.105 : $S \leq 1$, alors que, à l'ordre quatre (opérateur 1.24), nous avons grâce à 1.106 : $S \leq 0.86$.

Cependant, pour mieux illustrer l'avantage de cette méthode, et notamment par rapport à la méthode standard dont la condition de stabilité est donnée par 1.67, prenons dans les deux cas l'opérateur d'ordre quatre 1.24 étudié par Levander (1988). Pour un espace tridimensionnel, la condition 1.106 établie que $S \leq 0.86$ alors que, celle du schéma standard établie que $S \leq 0.49$. Cela veut dire que pour assurer la stabilité dans un même modèle de vitesse et un même h , Δt peut être 1.7 fois plus grand dans le premier cas que dans le deuxième. Autrement dit, dans leur seuil de stabilité et pour une même précision, si I est le nombre d'itérations nécessaires pour accomplir une simulation d'une durée déterminée avec la méthode standard, alors le nombre d'itérations dont la méthode proposée par Saenger et al. (2000) nécessite n'est que de $0.6I$ (*i.e.* 60% des itérations). Cela ne peut pas être traduit directement en temps de calcul puisqu'il y a d'autres facteurs importants qui entrent en jeu, comme le nombre d'opérations liées aux opérateurs en différence des deux méthodes, par exemple.

Il est clair que les estimations de stabilité présentées sont théoriques et restreintes à des conditions très spécifiques. Par exemple, elles deviennent des approximations du moment où le milieu de propagation n'est plus homogène. On sait aussi clairement que ces conditions de stabilité ne sont pas valables dans des modèles où l'on impose des conditions de frontière comme celles de la surface libre, ou celles associées à la facturation du milieu (*e.g.*, des conditions en contraintes nulles). Pour l'analyse de la stabilité numérique en présence de ce genre de conditions aux limites le lecteur peut se tourner vers Coates & Schoenberg (1995) et Zhang & Tielin (1999).

1.4.4.2 Analyse de Dispersion

En suivant une démarche similaire à celle présentée dans la section 1.2.4 pour l'équation d'onde acoustique, Saenger et al. (2000) ont déterminé les relations de dispersion pour leur schéma dans les cas 2D et 3D. L'analyse faite à partir de ces relations a révélée des propriétés de l'approximation numérique tout à fait en accord avec ce que l'on peut attendre vis à vis des opérateurs en différences impliqués¹². Par rapport à la méthode en quinconce standard, on observe des similitudes et des différences intéressantes. Tout d'abord, *les relations de dispersion de la grille partiellement en quinconce ne dépendent pas du rapport v_p/v_s (i.e. du coefficient de Poisson ν)*, elles dépendent uniquement de la vitesse de phase en question, soit v_p soit v_s (Saenger et al., 2000, équations 36 ou 37). Or, dans le **cas 2D** et indépendamment de l'ordre d'approximation des opérateurs spatiaux on trouve que :

1. Tournés de 45° l'un par rapport à l'autre, les diagrammes d'anisotropie des deux grilles sont exactement les mêmes hormis un facteur d'échelle.
2. Si l'incrément spatial de la grille partiellement en quinconce h' est réduit d'un facteur égal à $\sqrt{2}$, c'est-à-dire si $h' = h/\sqrt{2}$, alors le facteur d'échelle entre les diagrammes d'anisotropie est égal à un.

Dans le **cas 3D**, pour des opérateurs à l'ordre deux dans le temps et dans l'espace, on observe que :

1. Les directions d'*erreur de vitesse de phase*¹³ maximale coïncident dans les deux cas avec les directions de dérivation des opérateurs spatiaux associés à chaque schéma.
2. Si l'incrément spatial de la grille partiellement en quinconce h' est réduit d'un facteur égal à $\sqrt{3}$, c'est-à-dire si $h' = h/\sqrt{3}$, alors l'*erreur de vitesse de phase* maximale dans la grille partiellement en quinconce ξ' est d'environ 30% inférieure à celle de la méthode standard (i.e., $\xi' \approx 0.7e$).
3. Les diagrammes d'anisotropie des deux grilles ont une topologie très différente étant plus lisse celui associé à la grille partiellement en quinconce.

Tel qu'il a été montré dans la section 1.2.4 (e.g., équations 1.42 et 1.48), l'expression mathématique pour la vitesse de phase d'un schéma numé-

¹²Dans une grille régulière, ce sont des opérateurs effectuant les dérivées dans les directions bissectrices des axes de références avec un incrément spatial égal à $(h\sqrt{2})$ et $(h\sqrt{3})$ respectivement pour les cas 2D et 3D (voir section 1.4.2).

¹³L'erreur sur la vitesse de phase, ξ , est définie par $|\gamma - 1|$, où γ est le rapport entre la vitesse de phase numérique, \tilde{v}_{ph} , et la vitesse de phase physique, v_{ph} (donnée par les propriétés élastiques du milieu 1.79).

rique \tilde{v}_{ph} ¹⁴ est une fonction de plusieurs variables. Dans les cas 2D et 3D ces variables sont : le *numéro de Courant* connu aussi comme *paramètre de stabilité* ($S = v_{ph}\Delta t/h$), le *paramètre de dispersion* ($N_\lambda = \lambda/h$ où $\lambda =$ longueur d'onde), la *direction de propagation* d'une onde plane dans la grille donnée par les angles θ et ϕ ($\phi = \pi/2$ dans le cas 2D), et la ou les *vitesse de phase du milieu* v_s et v_p données par les propriétés physiques ρ , λ et μ (voir 1.79). Les expressions de \tilde{v}_{ph} pour le schéma proposé par Saenger et al. (2000) ne figurent pas dans la littérature. Seules les relations de dispersion pour des approximations 2D et 3D à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$ (Saenger et al., 2000, équations 36 et 37) ainsi qu'à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^4]$ et $O[(\Delta t)^2, h^8]$ (Saenger, 2000, appendice A) sont rapportées. La Figure 1.12 présente une

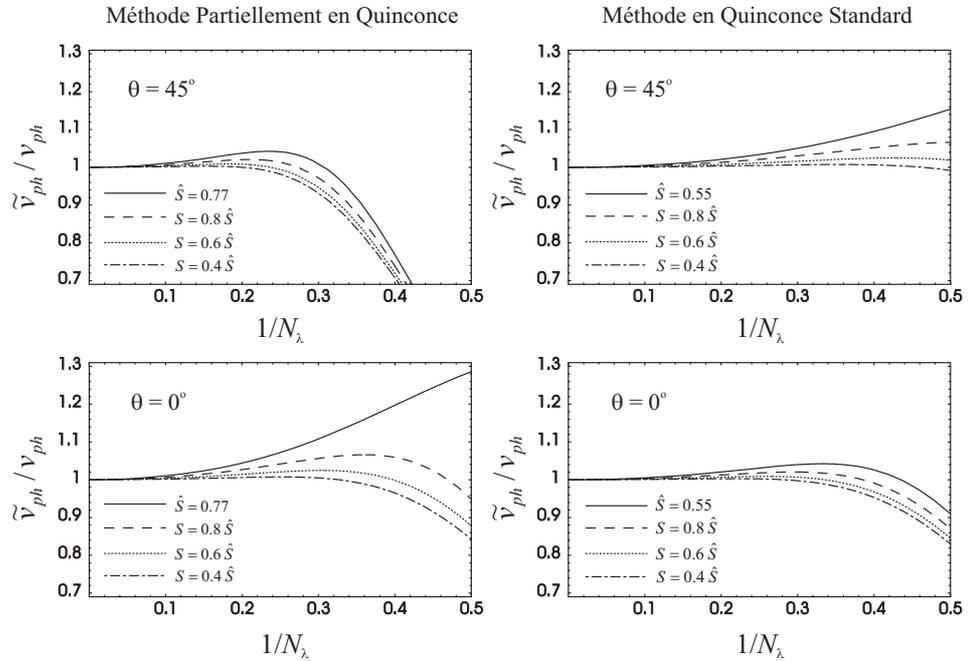


FIG. 1.12: Courbes de dispersion pour la vitesse de phase \tilde{v}_{ph} normalisée. La colonne à gauche correspond à la méthode partiellement en quinconce. Celle de la droite à la méthode en quinconce standard. Les opérateurs considérés dans les deux cas ont une précision $O[(\Delta t)^2, h^8]$. Les seuils de stabilité \hat{S} ainsi que les valeurs considérées pour le numéro de Courant sont rapportés à l'intérieur de la figure. Saenger et al. (2000).

¹⁴La vitesse de phase \tilde{v}_{ph} , dite « numérique », fait référence soit à \tilde{v}_p , vitesse dans la grille numérique des ondes P , soit à \tilde{v}_s , vitesse dans la grille numérique des ondes S .

comparaison des courbes de dispersion pour deux directions de propagation ($\theta = 0^\circ$ et $\theta = 45^\circ$), et pour différentes valeurs du numéro de Courant S . Cas 2D (*i.e.* $\phi = \pi/2$). Dans le cas de la méthode partiellement en quinconce, étant donné que les courbes sont normalisées par rapport à v_{ph} , elles restent identiques pour les ondes P et pour les ondes S . Pourtant, ce n'est pas le cas de la méthode en quinconce standard, voir par exemple (Virieux, 1986, équations 13 et 14). Étant donné qu'il n'est indiqué ni la valeur du coefficient de Poisson ni le type d'onde qui correspondent aux courbes présentées par

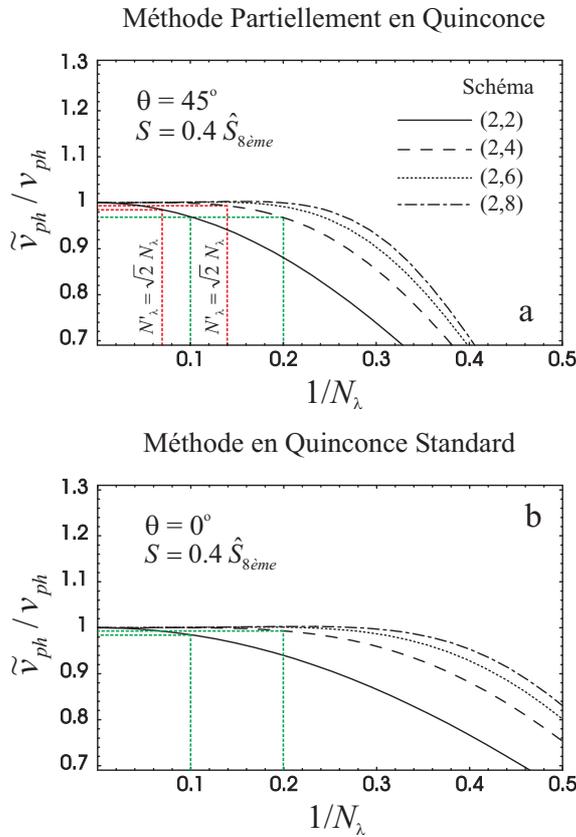


FIG. 1.13: Courbes de dispersion pour la vitesse de phase dans les directions de propagation les plus pénalisées dans la méthode partiellement en quinconce (a) et dans la méthode en quinconce standard (b). Toutes les courbes ont été calculées pour une valeur de S égale au seuil de stabilité de la méthode en question à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^8]$ (*i.e.* $S = \hat{S}_{8\text{ème}}$). Modifiée à partir de Saenger et al. (2000).

Saenger et al. (2000) pour la méthode standard j'en ai déduit, après comparaison avec les courbes rapportées par Virieux (1986) et Levander (1988), qu'il s'agit de courbes associées aux ondes S . Même si la valeur de ν ne joue pas un rôle prépondérant dans cette méthode (Virieux, 1986, Levander, 1988), elle reste indéterminée. Malgré ces imprécisions, la figure illustre principalement trois points : 1) Dans aucun cas la dispersion n'est minimale pour le seuil de stabilité \hat{S} (comparer avec la Figure 1.3). Bien au contraire, elle est minimale pour $S = 0.4\hat{S}$; 2) Dans les deux cas la dispersion est plus prononcée le long des directions où les opérateurs spatiaux sont appliqués (*i.e.* respectivement $\theta = 45^\circ$ et $\theta = 0^\circ$ pour la méthode partiellement en quinconce et la méthode standard); 3) Pour les valeurs considérées de S , la méthode standard est moins dispersive.

La Figure 1.13 montre l'influence des opérateurs spatiaux le long des directions de propagation les plus pénalisées. Toutes les courbes ont été calculées pour $S = 0.4\hat{S}_{8\text{ème}}$, où $\hat{S}_{8\text{ème}}$ représente le seuil de stabilité pour chacun des deux schémas à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^8]$ (voir Figure 1.12). En général, dans tous les cas l'erreur sur la vitesse de phase est moins importante dans la méthode standard. Si l'on regarde plus en détail les courbes correspondantes aux approximations à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^4]$ et à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$, on retrouve les résultats classiques concernant la précision de la méthode standard (Figure 1.13b, lignes pointillées vertes) : *5 et 10 points par longueur d'onde* suffisent, respectivement, pour rendre l'erreur ξ (voir note numéro 13) inférieure à 2%. L'erreur associée à la méthode partiellement en quinconce pour les mêmes N_λ (Figure 1.13a, lignes pointillées vertes) est d'environ 3.5%. Afin de résoudre les mêmes fréquences avec la même précision que la méthode standard ($\xi \leq 2\%$), il faut réduire h d'un facteur égal à $\sqrt{2}$ (*i.e.* $h' = \sqrt{2}h$). Autrement dit, augmenter le nombre de points par longueur d'onde d'un même facteur (*i.e.* $N'_\lambda = \sqrt{2}N_\lambda$), comme l'indiquent les courbes en pointillés rouges. Cela se traduit par un minimum de *7 et 14 points par longueur d'onde*, respectivement à l'ordre quatre et à l'ordre deux. Cette dégradation de la précision dans la grille partiellement en quinconce est tout simplement une conséquence du fait que, pour un maillage régulier, l'incrément spatial des opérateurs tournés est \sqrt{m} fois l'incrément de la grille en quinconce standard, où m est le nombre de dimension de l'espace.

Pour mieux comprendre le rapport qui existe entre les erreurs de vitesse de phase des deux méthodes, considérons une telle erreur pour les mêmes valeurs de N_λ et de S dans les deux grilles. Calculons ainsi l'erreur de vitesse de phase ξ (voir note numéro 13) pour toutes les directions de propagation θ dans le cas 2D ($\phi = \pi/2$). Le résultat est illustré sur la Figure 1.14a. Calculées pour des approximations à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$, la ligne continue correspond à la méthode partiellement en quinconce et la ligne discontinue à la méthode standard. La distance entre les deux courbes et l'origine est égal à ξ . Dans les deux cas, les calculs correspondent à un échantillonnage de 10 points par longueur d'onde (*i.e.* $1/N_\lambda = 0.1$) et un paramètre de stabilité $S = 0.8\hat{S}$ où $\hat{S} = 0.7$ (seuil de stabilité de la méthode standard, équation 1.66). Autrement dit, les calculs ont été fait pour exactement les mêmes Δt et h dans les deux schémas et un même « signal » de longueur d'onde λ échantillonné par 10 points dans les deux grilles. La figure nous montre deux choses. D'une part, l'erreur minimale dans la grille partiellement en quinconce est égale à l'erreur maximale dans la grille standard. D'autre part, les diagrammes d'anisotropie sont similaires mais tournés de 45° . Or, si l'on réduit l'incrément spatial h' de la grille partiellement en quinconce tel que $h' = h/\sqrt{2}$ (où h est l'incrément de

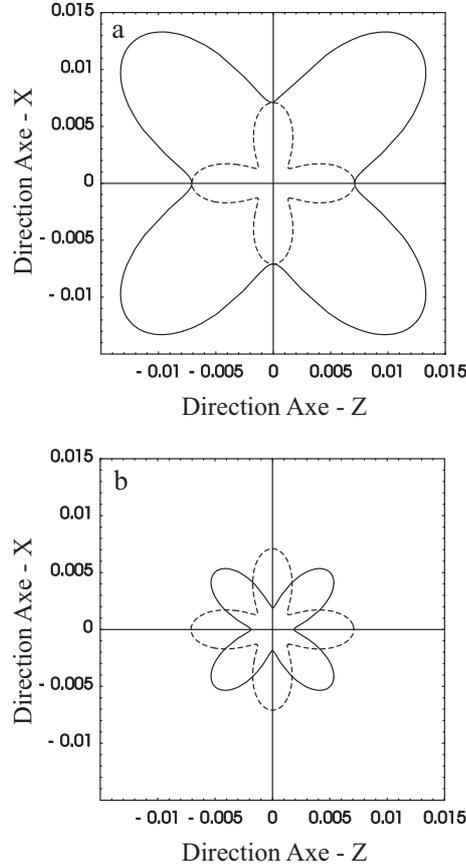


FIG. 1.14: Erreur ξ pour toutes les directions de propagation dans la méthode partiellement en quinconce (lignes continues) et dans la méthode en quinconce standard (lignes discontinues) à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$. a) Dans les deux cas, calculs effectués pour $N_\lambda = 10$ et $S = 0.8\hat{S}$ où $\hat{S} = 0.7$ (seuil de stabilité de la méthode standard). b) Calculs effectués pour $N'_\lambda = \sqrt{2}N_\lambda$ et $S' = \sqrt{2}S$ où l'apostrophe fait référence à la grille partiellement en quinconce. Voir texte. Modifiée à partir de Saenger et al. (2000).

la grille standard) en supposant Δt constant (ceci implique que $S' = \sqrt{2}S$), alors on retrouve la courbe continue de la Figure 1.14b. La comparaison faite dans cette figure met en évidence surtout un point important. Dans cette condition, les erreurs maximales et minimales dans les deux grilles sont exactement les mêmes (*i.e.* la précision des deux schémas devient la même). Ce résultat rejoint celui signalé précédemment par les lignes rouges de la Figure 1.13a.

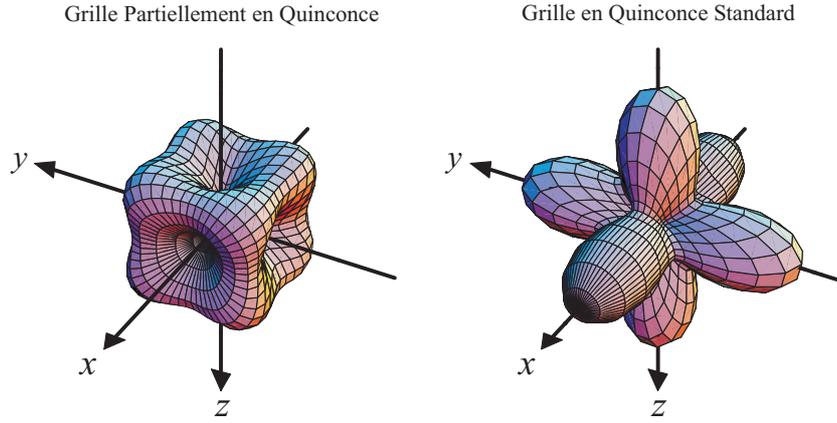


FIG. 1.15: Diagrammes d'anisotropie 3D donné par l'erreur ξ (voir note numéro 13) à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$ dans les deux grilles. Paramètres considérés dans la grille partiellement en quinconce : $N'_\lambda = 10$ et $S' = 0.8$. Paramètres considérés dans la grille en quinconce standard : $N_\lambda = N'_\lambda/\sqrt{3}$ et $S = S'/\sqrt{3}$. Cela implique un rapport entre les incréments spatiaux de $h' = h/\sqrt{3}$. Voir texte. Modifiée de (Saenger et al., 2000).

On pourrait penser par analogie qu'une telle situation devrait se produire aussi dans le cas 3D. Pourtant, si l'on fait les mêmes calculs d'erreur que sur la Figure 1.14b en tenant compte cette fois-ci de l'incrément spatial égal à $\sqrt{3}h$ des opérateurs tournés en 3D (Figure 1.11), on voit que ce n'est pas le cas. La Figure 1.15 montre les diagrammes d'anisotropie donnés pour l'erreur sur la vitesse de phase ξ dans les deux grilles. Désormais, les paramètres avec et sans l'apostrophe feront référence, respectivement, aux calculs effectués dans les grilles partiellement en quinconce et dans la grille en quinconce standard. La Figure 1.15 à gauche a été calculée avec un échantillonnage de 10 points par longueur d'onde (*i.e.* $N'_\lambda = 10$) et un $S' = 0.8\hat{S}'$ où $\hat{S}' = 1.0$, le seuil de stabilité (équation 1.105). La Figure 1.15 à droite a été calculée avec un échantillonnage $N_\lambda = N'_\lambda/\sqrt{3}$ (*i.e.* $N_\lambda = 5.77$) et un $S = S'/\sqrt{3}$ (*i.e.* $S = 0.46$). Pour un même « signal » de longueur d'onde λ cela donne un rap-

port entre les incréments spatiaux de $h' = h/\sqrt{3}$. Dans le cas des opérateurs tournés dans les directions bissectrices aux axes du repère, on trouve que l'erreur maximale est $\xi'_{max} = 2.82\%$, alors que dans le cas des opérateurs cartésiens standard, l'erreur maximale est $\xi_{max} = 3.93\%$. Cela représente une erreur d'environ 30% inférieure dans la grille partiellement en quinconce par rapport à la grille standard. Le fait que l'erreur ne soit pas la même dans cette situation, alors qu'elle l'est en 2D, est relié au nombre de directions de dérivation spatiale des deux grilles dans chaque dimension. Tandis qu'en 2D le nombre de directions de dérivation nécessaires pour obtenir les dérivées cartésiennes est le même dans les deux grilles (*i.e.* deux dérivées), en 3D, le nombre nécessaire de directions est de quatre dans la grille partiellement en quinconce et de trois dans la grille standard.

Nous pouvons donc conclure deux choses. D'une part, la méthode partiellement en quinconce en 3D est plus précise que celle en 2D par rapport à la méthode standard. D'autre part, le diagramme d'anisotropie 3D est plus homogène dans la grille partiellement en quinconce puisque qu'il possède huit lobes reliés aux quatre directions bissectrices de dérivation (Figure 1.15 à gauche), par rapport aux six lobes reliés aux trois directions cartésiennes de la grille standard (Figure 1.15 à droite). A partir des résultats présentés sur la Figure 1.15, on peut aussi dire qu'en 3D, pour un schéma partiellement en quinconce à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$, il faut certainement moins de *17 points par longueur d'onde* (*i.e.* $N'_\lambda < N_\lambda/\sqrt{3}$).

1.5 Conditions aux Limites et Conditions Initiales

La solution d'un problème posé par un système d'équations différentielles hyperboliques comme celui déduit dans la section 1.3.3, ou bien tout simplement par l'équation d'onde acoustique unidimensionnelle 1.25, dépend fortement de la condition initiale des champs solution. Si l'on considère par exemple le deuxième cas dont l'inconnue est le champ de déplacement $u(x, t)$, cette condition prend la forme $u(x, 0) = u^0(x)$, où $u^0(x)$ est une fonction donnée. La solution du problème doit satisfaire l'équation d'onde 1.25 pour $t > 0$ et pour x dans une région R , typiquement l'espace ouvert \mathbb{R} , le demi-espace $x > 0$, ou un intervalle donné $[0, a]$ où $a \in \mathbb{R}$. Dans les deux derniers cas, la solution doit être définie dans les limites de R et satisfaire les conditions imposées. Elle doit donc satisfaire des conditions imposées au champ solution dans certains endroits spécifiques de l'espace. Comme verrons ensuite, autant les conditions initiales que les conditions aux limites jouent un rôle fondamental dans l'évolution temporelle des solutions.

Dans le cadre général de la propagation des ondes, une condition à la limite peut être définie comme toute condition mathématique imposée aux champs solution dans un sous-ensemble (région) du domaine spatial. Généralement, ces sous-ensembles sont établis par des fonctions du type $f(x, y)$ décrivant des surfaces comme celle donnée par l'interface entre deux milieux de propriétés distinctes, la surface libre de la Terre, les bornes extérieures (hormis la surface libre) du domaine physique, ou bien une faille géologique. Ces sous-ensembles peuvent même voir leurs conditions évoluer dans le temps. Les conditions aux limites appliquées dans chaque cas peuvent être fondamentalement différentes. Pour cette raison on peut les séparer en deux groupes : les *conditions de frontière* et les *conditions de radiation*.

Dans les prochains paragraphes une présentation générale de certains concepts mentionnés précédemment sera menée, en soulignant ceux qui ont été plus abordés et développés numériquement dans mon travail doctoral, notamment, les conditions de frontière associées à la facturation dynamique, et les conditions de radiation pour l'absorption d'énergie « *Perfectly Matched Layer* » (PML). Des exemples numériques seront présentés afin d'illustrer l'implémentation 3D des systèmes d'équations en différences finies introduits dans la section 1.4.3 et dans l'annexe B en présence des conditions d'absorption PML.

1.5.1 Conditions de Frontière

Une frontière est définie par le sous-ensemble $f(x, y)$ du domaine physique décrivant soit une discontinuité des propriétés physiques du milieu (*i.e.*

une interface), soit une discontinuité structurale (*i.e.* dans le comportement mécanique) dans le milieu. A partir de cette définition, les frontières que l'on trouve dans un milieu géologique typique appartenant au premier groupe sont, par exemple, les interfaces comme la surface libre de la Terre ou le contact entre deux unités géologiques distinctes (*e.g.*, la stratification de bassins sédimentaires, le métamorphisme régional ou les intrusions plutoniques). Par ailleurs, parmi les frontières appartenant au deuxième groupe nous avons, par exemple, les fractures d'un réservoir rocheux d'hydrocarbures ou bien la rupture d'une faille géologique.

Les conditions appliquées au champs solution le long des frontières mentionnées ont, dans certains cas, des similitudes remarquables. Pourtant, ces similitudes sont souvent apparentes puisqu'elles ne révèlent pas forcément les difficultés intrinsèques à chaque cas. Reprenons le problème de la propagation unidimensionnelle d'une onde acoustique (équation 1.25) défini dans l'intervalle $[0, a]$ où $a \in \mathbb{R}$. La condition de frontière plus commune a lieu lorsque la valeur du champ solution $u(x, t)$ est spécifiée dans les frontières du domaine. Cette condition reçoit le nom de *condition de frontière de Dirichlet* ou bien *bord fixe*. Alors, pour une condition initiale $u^0(x)$ donnée, ce problème peut être posé de la manière suivante : trouver $u(x, t)$ définie pour $x \in [0, a]$ et $t \geq 0$ telle que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } 0 < x < a, \quad (1.107a)$$

$$u(0, t) = u(a, t) = b(t) \quad \text{pour } t > 0, \quad (1.107b)$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{pour } 0 < x < a, \quad (1.107c)$$

où $b(t)$ est une fonction donné. Si $b = 0$ pour tout t alors on retrouve les *conditions de Dirichlet homogènes*. Si par contre c'est la valeur de la dérivée spatiale de u (dans la direction normal à la frontière pour les cas 2D et 3D) qui est spécifiée dans les frontières, alors la condition reçoit le nom de *condition de frontière de Neumann* ou bien *bord libre*. Dans ce cas, le problème serait celui posé par 1.107 en substituant l'équation 1.107b par :

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = b(t) \quad \text{pour } t > 0. \quad (1.108)$$

Les *conditions de frontière mixtes*, comme celles de *Cauchy* qui considèrent autant les conditions de Dirichlet que celles de Neumann, appliquent différentes conditions dans différentes régions de la même frontière. Comme nous verrons ensuite, des conditions de frontière mixtes ont été utilisées pendant longtemps pour simuler la propagation dynamique d'une fracture en

différences finies. Dans ce problème comme dans beaucoup d'autres, la précision du schéma numérique dépend énormément de la vérification de ces conditions le long des frontières où elles s'appliquent.

Le mouvement dans un *continuum* faiblement hétérogène¹⁵ est gouverné par l'équation du mouvement 1.78. Comme on a vu dans la section 1.4, cette équation peut être approximée avec un schéma en différences finies. Si le *continuum* présente une discontinuité (ou frontière, dans le sens plus général défini dans le premier paragraphe de cette section), comme pourrait l'être l'interface donnée par le contact entre deux milieux distincts homogènes ou faiblement hétérogènes, l'équation 1.78 préside encore le mouvement en dehors d'une telle interface mais des conditions de frontière s'appliquent le long de la discontinuité¹⁶. Il y a deux grandes familles de formulations en différences finies pour aborder ce problème : les *formulations homogènes* et les *formulations hétérogènes*. Celles qui sembleraient les plus appropriées pour résoudre ce problème sont les *formulations homogènes*. Ces formulations considèrent d'une part deux schémas en DF indépendants discrétisant chacun des deux milieux¹⁷, et d'autre part un troisième schéma faisant l'assemblage des deux milieux autour de l'interface, conçu pour vérifier *explicitement* les conditions de frontières associées à la discontinuité¹⁸. Par conséquent, les formulations homogènes en DF sont des formulations spécifiques pour des problèmes spécifiques (Alterman & Karal, 1968, Kelly et al., 1976). Leur application dans le cas des milieux géologiques complexes contenant des interfaces courbes devient un problème difficile et peu pratique (Slawinski & Krebes, 2002).

Dans le cas alternatif, les *formulations hétérogènes* résolvent le problème avec le même schéma en DF dans tout le domaine spatial y compris les discontinuités. La présence des interfaces est prise en compte en assignant uniquement des valeurs appropriées des modules élastiques et de la masse volumique dans les voisinages des discontinuités. Par conséquent, les conditions de frontière appliquées aux champs élastiques sont vérifiées *implicitement*. Hormis le cas de la surface libre et de la propagation dynamique des fractures, l'appli-

¹⁵Milieu où la variation spatiale des modules élastiques et de la masse volumique n'est pas abrupte, *i.e.* avec une dérivée première continue et faible.

¹⁶Par exemple, les conditions de frontière ayant lieu dans l'interface entre deux milieux solides élastiques non rigides sont, la continuité des tractions et des déplacements sur l'interface.

¹⁷Dans le cas d'une interface fluide-solide, un des schémas pourrait par exemple discrétiser l'équation d'onde acoustique 1.46 tandis que l'autre schéma les équations élastodynamiques 1.81 (respectivement pour les milieux fluide et solide).

¹⁸En reprenant l'exemple de la note au pied de page 17, les conditions de frontière appliquées dans l'interface fluide-solide seraient, premièrement, la continuité des tractions normales et des déplacements normales à l'interface et deuxièmement, l'annulation des tractions parallèles à l'interface.

cation des *formulations hétérogènes* a été la stratégie la plus populaire dans les trente dernières années (*e.g.* Boore, 1972, Kelly et al., 1976, Virieux, 1986, Zahradnik & Priolo, 1995, Graves, 1996, Olsen, 2000). Pourtant, la vérification implicite des conditions de frontière n'est pas un problème simple. Pour atteindre une précision optimale, une formulation hétérogène des équations élastodynamiques doit être réalisée menant à des moyennes pondérées spécifiques des coefficients élastiques autour des discontinuités (Graves, 1996, Moczo et al., 2002, 2006).

En ce qui concerne les discontinuités des propriétés physiques du milieu de propagation y compris la surface libre, mon implémentation 3D en différences finies est une formulation hétérogène (Cruz-Atienza & Virieux, 2004, Cruz-Atienza et al., 2004b,a). Les discontinuités mécaniques, comme une fracture dans le milieu, sont modélisées explicitement dans le sens où l'on impose les valeurs des champs correspondant aux conditions de frontière sur certains nœuds du maillage. Pourtant l'intégration dans le temps se fait d'une manière identique en tout point du domaine. Une explication plus détaillée sur l'application des conditions de frontière mixtes évolutives, associées à la propagation dynamique d'une fracture, sera présentée par la suite et dans les chapitres 3 et 4.

1.5.1.1 Surface Libre

La surface de la Terre, comme n'importe quelle autre interface élastique où les propriétés du milieu change brutalement, demande la vérification des conditions de frontière. La précision des champs solution dans cette frontière est d'une importance majeure puisque c'est souvent là que l'on mesure les ondes sismique se propageant à l'intérieur de la planète. Soit Σ ¹⁹ la surface de la Terre et n_i le vecteur unitaire normal à Σ . Une bonne approximation des conditions de frontière dans Σ est la condition des tractions nulles, d'où la dénomination de « surface libre » pour cette frontière. Ces conditions sont des *conditions de frontière de Dirichlet* qui, en terme du vecteur de traction T_i et du tenseur des contraintes τ_{ij} , s'expriment comme :

$$T_i = n_j \tau_{ij} = 0. \quad (1.109)$$

Si Σ est le plan $z = 0$ (*i.e.* $n_i = \hat{k}$), alors 1.109 devient tout simplement :

$$\tau_{iz} = 0 \quad \text{pour } i = x, y, z. \quad (1.110)$$

Comme il a été dit précédemment, il y a deux grandes familles de méthodes en différences finies permettant de traiter le problème posé par les conditions de

¹⁹Interface entre un solide (ou un fluide) et un gaz, l'atmosphère.

frontière appliquées dans une interface. Ainsi, les conditions de frontière à la surface libre 1.109 sont abordées en DF soit par des *formulations homogènes* soit par de *formulations hétérogènes*.

Parmi les *formulations homogènes*, où l'équation du mouvement est résolue en appliquant explicitement les conditions associées aux frontières du modèle, la méthode probablement la plus simple et la plus stable est la *méthode des images* suggérée par Levander (1988). Prenons l'exemple de la surface libre plane en $z = 0$ avec les conditions de frontière 1.110. L'idée centrale de cette méthode repose sur un principe physique simple : le mouvement d'une particule sur Σ , n'est que la conséquence des contraintes non nulles agissant sur la particule (*i.e.* τ_{xx} , τ_{yy} et τ_{xy} dans notre exemple). Or, si l'on considère la formulation donnée par le système d'équations élastodynamiques 1.81, alors, afin d'annuler la contribution des tractions dans le mouvement des particules (*i.e.* dans sa vitesse v_i), la méthode des images applique directement la condition 1.110 sur les composantes des tractions qui coïncident avec Σ , d'une part, et d'autre part elle impose des valeurs antisymétriques (par rapport au plan $z = 0$) dans les nœuds de tractions qui se trouvent au dessus de Σ . Une révision de cette méthode ainsi qu'une adaptation pour le cas général d'une topographie (surface libre non-planaire) est effectuée par Robertsson (1996). Depuis, de nombreux auteurs ont étudié et utilisé la technique des images (*e.g.*, Graves, 1996, Gottschamer & Olsen, 2001, Vossen et al., 2002, Hestholm, 2003). La méthode des images en présence de topographie demande entre 15 et 20 points par longueur d'onde minimale dans le voisinage de la surface libre pour atteindre une précision satisfaisante (voir par exemple Moczo et al., 2006).

Dans les *formulations en DF hétérogènes*, les conditions de frontière sont vérifiées implicitement grâce à l'attribution pertinente des paramètres élastiques dans les alentours des interfaces. Dans le cas de la surface libre, les conditions de traction nulle 1.109 peuvent être approximées avec la technique hétérogène du « *vacuum* »²⁰ suggérée par Boore (1972) et formellement justifiée (et baptisée) par Zahradník et al. (1993). L'idée de cette approximation est de simuler le vide au dessus de la surface libre par l'assignation de valeurs très faibles de masse volumique²¹ et de valeurs nulles pour les modules élastiques λ et μ . Plusieurs variations de cette méthode ont été proposées dans la littérature (*e.g.*, Zahradník et al., 1993, Graves, 1996, Pitarka & Irikura, 1996, Ohminato & Chouet, 1997). Dans le cadre des formulations en DF hétérogènes, l'intérêt de l'approche se trouve dans le fait que le traitement

²⁰En anglais dit « *vacuum formalism* ».

²¹La masse volumique n'est pas nulle pour éviter des division par zéro (voir équations 1.82).

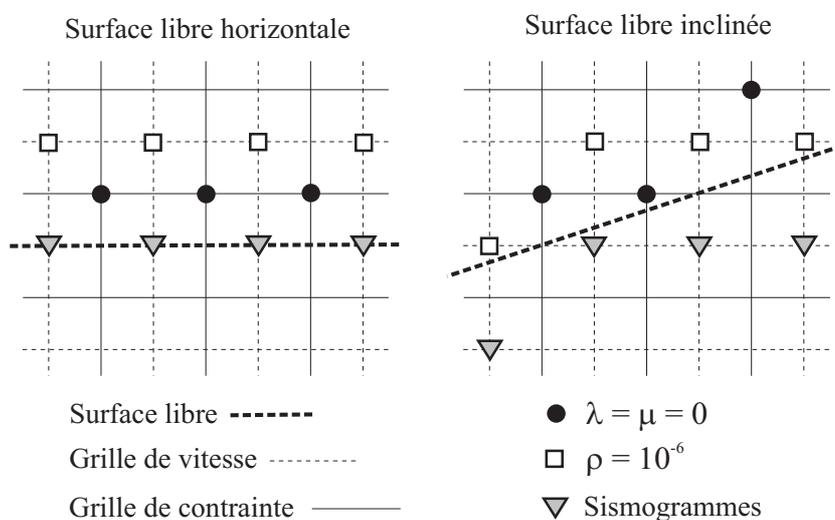


FIG. 1.16: « *Vacuum formalism* » pour la surface libre en 2D dans la grille partiellement en quinconce. Le passage au 3D est trivial à partir de cette illustration. Dans chaque rangée verticale de nœuds, la valeur soit de la masse volumique (ρ) soit des paramètres de Lamé (λ et μ) (respectivement pour les nœuds de vitesse et les nœuds de contraintes) du premier nœud se trouvant immédiatement au dessus de la surface libre est modifiée afin de simuler le vide. L'implémentation montrée n'est valable que pour un stencil de deuxième ordre dans l'espace (Saenger, 2000).

des conditions de frontière associées à la surface libre est le même que pour n'importe quelle autre interface interne du modèle. En général, la vérification implicite de conditions à la surface libre demande un échantillonnage du champ d'onde plus important que dans le cas des approches explicites (*e.g.* méthode des images), raison pour laquelle son implémentation numérique est plus coûteuse.

Dans la littérature, la technique du *vacuum* a été très souvent utilisée dans des grilles en quinconce standard (section 1.4.1) formulée soit en vitesse-contrainte, soit en vitesse seulement (section 1.3.3). Pourtant, l'exploration efficace des propriétés de la grille partiellement en quinconce (section 1.4.1) a montré que la formulation hétérogène du *vacuum* est possible et stable pour une précision du deuxième ordre dans l'espace (Saenger, 2000, Cruz-Atienza et al., 2004b, Saenger & Bohlen, 2004, Gelis et al., 2005, Bohlen & Saenger, 2006). La Figure 1.16 montre l'implémentation d'une telle approche pour une surface libre plane parallèle aux axes de référence ainsi qu'inclinée (approche valable pour des topographies quelconques approximées par des

marches d'escalier).

Saenger et al. (2004) ont testé cette approximation avec leur code 3D (grille partiellement en quinconce) dans le cas proposé par Ohminato & Chouet (1997) d'une topographie décrite par une colline de forme gaussienne avec une source isotrope. Leur comparaison a montré qu'un échantillonnage de *25 points par longueur d'onde minimale* suffit pour reproduire correctement les sismogrammes publiés par Ohminato & Chouet (1997). Pourtant, le point d'observation plus lointain se trouve à environ 5 km. Ils ont donc déduit que, pour modéliser correctement les ondes de Rayleigh à plus grandes distances en minimisant la dispersion numérique, un raffinement de la grille est nécessaire.

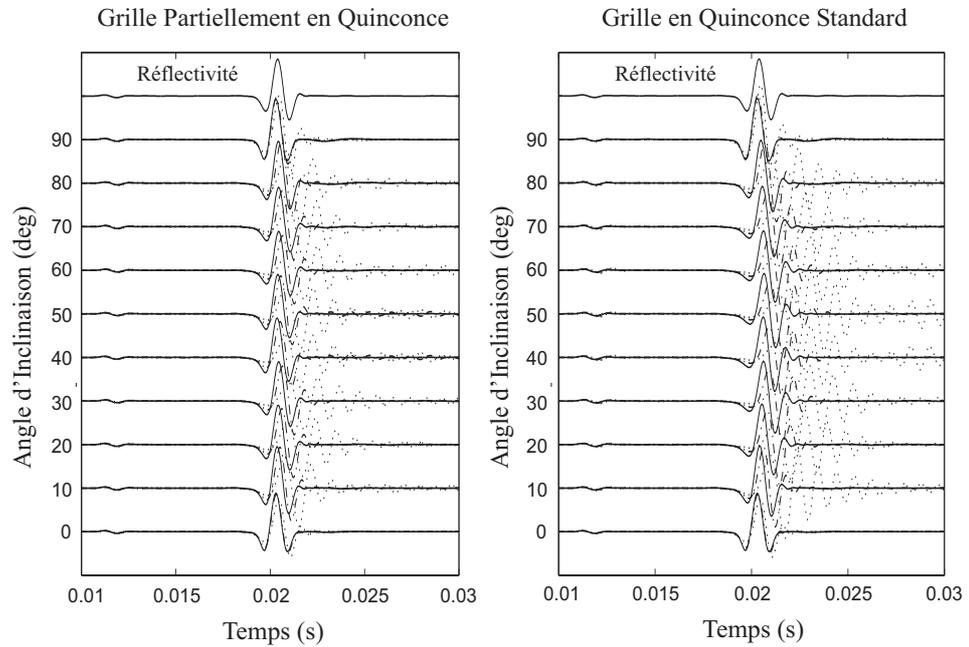


FIG. 1.17: Sismogrammes obtenus sur la surface libre via l'approche hétérogène du *vacuum* avec la méthode partiellement en quinconce (à gauche) et avec la méthode en quinconce standard (à droite). Les courbes correspondent à un échantillonnage de $N_\lambda = 68$ (lignes continues), $N_\lambda = 34$ (lignes discontinues) et $N_\lambda = 17$ (lignes pointillées). La solution de référence (ligne continue en haut) a été calculée avec la méthode de réflectivité. Modifiée à partir de Bohlen & Saenger (2006).

Très récemment, Bohlen & Saenger (2006) ont fait une étude plus rigoureuse de l'approximation du *vacuum* dans la grille 3D partiellement en

quinconce. Pour cela ils ont comparé les implémentations du vacuum dans la grille partiellement en quinconce (GPQ, *i.e.* schéma de la Figure 1.16 avec moyenne arithmétique de la masse volumique) et dans la grille en quinconce standard (GQS, avec la moyenne arithmétique de la masse volumique et la moyenne harmonique du module de rigidité μ) avec une méthode 3D de réflectivité (Wang, 1999). La moyenne des propriétés du milieu est une condition nécessaire pour satisfaire strictement les conditions de frontière sur les tractions dans des interfaces dans des schéma hétérogènes en différences finies (Moczo et al., 2002). Pourtant, des nombreux tests effectués dans notre laboratoire Géosciences Azur ont révélé que l'amélioration associée à la moyenne arithmétique des masses volumiques dans la GPQ pour la surface libre est négligeable en 2D et 3D (Gelis, 2003, Peyrat, 2003). La Figure 1.17 montre des sismogrammes excités par une force ponctuelle verticale et calculés sur une surface libre plane avec différents angles d'inclinaison par rapport à la grille numérique. Les trois courbes superposées correspondent à différents nombres de points par longueur d'onde minimale (N_λ). Les courbes continues correspondent au maillage plus fin ($N_\lambda = 68$). Les sismogrammes présentés ont été tournés dans les directions parallèles (radiales) à la surface libre.

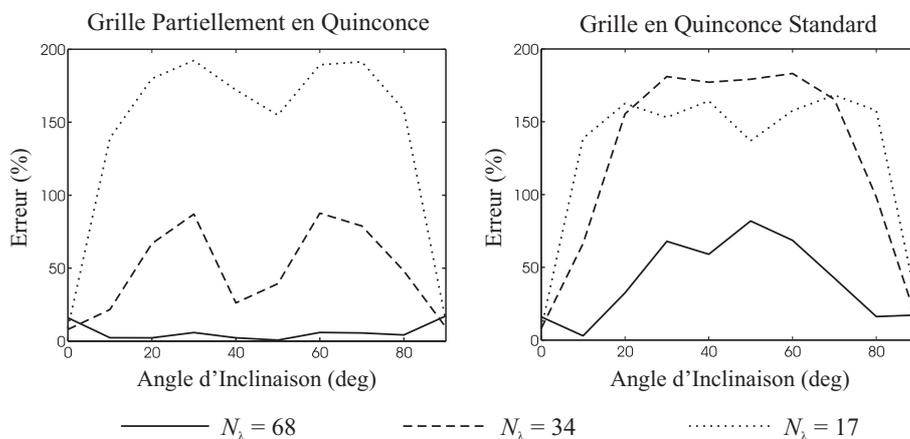


FIG. 1.18: Erreur calculée à partir de chaque sismogramme de la Figure 1.17 (norme L2 en pourcentage) par rapport à la solution de référence (méthode de réflectivité), en fonction de l'angle d'inclinaison de la surface libre par rapport aux axes de référence. Modifiée de (Bohlen & Saenger, 2006).

En général, les sismogrammes montrent une bonne précision pour l'onde P (premiers arrivées de faibles amplitudes) dans tous les cas testés quelle que soit l'inclinaison de l'interface. Pourtant, dans le cas de l'onde de Rayleigh

(deuxième arrivée de grande amplitude), des grandes différences apparaissent. L'effet de la dispersion numérique est très visible, surtout dans la GQS (à droite) pour $N_\lambda = 17$, avec des oscillations tardives. La Figure 1.18 montre l'erreur en pourcentage pour la norme L2 entre chaque sismogramme DF de la Figure 1.17 et le sismogramme calculé avec la méthode de réflectivité en fonction de l'inclinaison. On s'aperçoit que l'approche du vacuum dans la grille partiellement en quinconce est plus précise que dans la grille en quinconce standard. Pour un échantillonnage de 68 points par longueur d'onde minimale, l'erreur dans la GPQ est très faible alors que dans la GQS elle atteint 70% pour une inclinaison de 50° . On voit une dépendance par rapport à l'inclinaison avec des maxima dans les directions bissectrices des secteurs $0^\circ - 45^\circ$ et $45^\circ - 90^\circ$, principalement dans le cas de la GPQ. La norme d'erreur L2 est plus sensible aux temps d'arrivées qu'à l'amplitude des ondes (*i.e.* forme d'onde). Pour cela, il faut remarquer que, malgré les erreurs rapportées, la similitude des sismogrammes issus des DF avec celui de référence est remarquable au moins pour $N_\lambda \geq 68$ dans le cas de la grille partiellement en quinconce (voir Figure 1.17).

Bohlen & Saenger (2006) ont conclu que, dans une surface libre plane alignée avec les axes de référence, les méthodes en DF partiellement en quinconce et en quinconce standard sont virtuellement équivalentes. Un échantillonnage de $N_\lambda \geq 30$ suffit dans les deux cas pour atteindre une bonne précision. Ils ont aussi montré qu'il est donc plus pertinent d'aborder ce problème avec la GQS en appliquant la méthode des images proposée par Robertsson (1996) (avec les vitesses nulles au dessus de l'interface) où un échantillonnage beaucoup plus grossier est suffisant ($N_\lambda \geq 9$) au quatrième ordre dans l'espace. Dans le cas de l'interface plane inclinée par rapport aux axes de référence, l'approche hétérogène du vacuum dans la méthode partiellement en quinconce est considérablement plus précise que dans la méthode standard. Des bons résultats sont atteints avec la GPQ dans toutes les inclinaisons si $N_\lambda \geq 60$. Ces résultats suggèrent la nécessité d'implémenter des grilles irrégulières (voir section 1.2.6) afin de discrétiser le modèle plus finement près de la surface libre et pouvoir effectuer des simulations précises en 3D à une plus grande échelle. Les résultats obtenus par Robertsson (1996) en appliquant sa troisième formulation pour les conditions explicites dans des surfaces libres inclinées montrent qu'un échantillonnage d'environ $N_\lambda \geq 15$ suffit, dans la GQS, pour obtenir des bons résultats. Par conséquent, afin d'augmenter la fréquence maximale des simulations 3D jusqu'à 10 ou 15 Hz, une voie qui me semble prioritaire et qui à ma connaissance, n'a pas été encore explorée (au moins dans la littérature), est l'implémentation des conditions explicites dans la grille partiellement en quinconce en présence de topographie. Une

deuxième voie à explorer pour l'interface libre, peut être plus prometteuse, est celle récemment proposée par Piraux & Lombard (2001), conçue pour introduire explicitement²² des interfaces dans un schéma en DF. Des résultats remarquables ont déjà été obtenus en 2D pour des interface solide-solide ayant une géométrie arbitraire (Lombard & Piraux, 2004).

²²Un débat pourrait avoir lieu autour de la question : explicitement ou implicitement ? De mon point de vue, il s'agit d'une méthode mixte qui tient compte autant des sauts des propriétés physiques du milieu, que des valeurs numériques des champs solution sans modifier l'ordre du schéma pour imposer les conditions de frontière dans l'interface. Pourtant, les auteurs ont donné le nom en anglais « *explicit simplified interface method* » (ESIM) qui fait référence au mot « explicite ».

1.5.1.2 Fracture Dynamique Plane

Considérons un espace infini, homogène, élastique et isotrope dans le référentiel cartésien montré sur la Figure 1.19. Le milieu est sous la charge d'un champ de contraintes cisailantes homogène, τ_0 , dont la seule composante non-nulle agit sur le plan $z = 0$. A l'instant $t = 0$, l'état de contrainte dépasse la résistance du matériel, τ_u , et une fracture se produit dans ce plan à l'intérieur d'une zone définie par $-\infty < y < \infty$ et $x_1 < x < x_2$ (voir Figure 1.19). Ainsi, le plan $z = 0$ est divisé en deux régions, celle à l'intérieur de la fracture Σ_1 et celle à l'extérieur Σ_2 . La géométrie d'une telle fracture, infinie dans l'axe y , rend le problème bidimensionnel et donc plus simple à analyser.

Les deux extrémités de la fracture (lignes discontinues) commencent à se propager dans les directions $-x$ et $+x$ respectivement à partir de leurs points de départ x_1 et x_2 . Si la composante non-nulle du champ de contraintes est τ_{xz} , la fracture est du mode II (déformation « *in-plane* ») alors que, si τ_{yz} est la composante non-nulle, la fracture est du mode III (déformation « *anti-plane* ») (voir section 2.3). La position du front de rupture (*i.e.* des extrémités de la fracture) est une fonction du temps et peut être connue à travers l'état de contrainte dans les alentours du front de rupture et d'un critère de

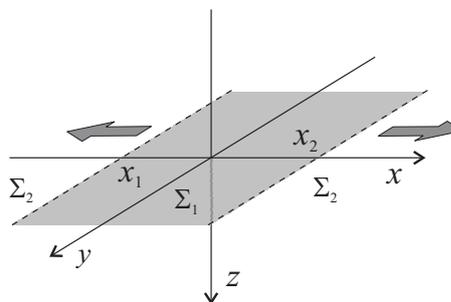


FIG. 1.19: Fracture située dans le plan $z = 0$ (zone grise) se propageant bilatéralement dans les directions $-x$ et $+x$ (grandes flèches) à partir des points de départ x_1 et x_2 . Le plan $z = 0$ est ainsi séparé en deux régions, celle à l'intérieur de la fracture Σ_1 et celle à l'extérieur Σ_2 .

rupture approprié. Pendant la propagation de la fracture, la contrainte cisailante en Σ_1 chute depuis la valeur seuil τ_u vers un niveau dynamique inférieur τ_s . Les points fracturés subissent donc une relaxation égale à la chute dynamique de contraintes $\Delta\tau = \tau_u - \tau_s$. Une telle chute provoque un déplacement relatif entre les parties positive ($z > 0$) et négative ($z < 0$) du milieu donnant lieu à une discontinuité du champ de déplacement en Σ_1 . Cette discontinuité est uniquement une fonction de x et du temps t . Dans le cas d'une *fracture de mode II*, la discontinuité des déplacements est la différence entre les composantes u_x^+ et u_x^- du vecteur déplacement. Par ailleurs, la composante du déplacement u_z , ainsi que les tractions τ_{xz} et τ_{zz} , est continue le long du plan $z = 0$. La continuité de u_z et de τ_{xz} en $z = 0$ fait que ces

deux fonctions sont paires par rapport à ce plan. D'autre part, elle implique aussi que u_x et τ_{zz} sont des fonctions impaires par rapport au même plan (Das, 1976). Du fait de leur continuité, alors $\tau_{zz} = 0$ dans le plan $z = 0$ et $u_x = 0$ dans Σ_2 .

En outre, dans le cas d'une *fracture de mode III* ayant la géométrie de la Figure 1.19, la discontinuité des déplacements associée à la chute de la contrainte cisailante en Σ_1 est la différence entre les composantes u_y^+ et u_y^- du vecteur déplacement. Ainsi, u_y est discontinue à l'intérieur de la zone fracturée Σ_1 mais continue en dehors (*i.e.* dans Σ_2). Par ailleurs, la traction τ_{yz} est continue dans le plan $z = 0$. De ce fait on peut montrer que τ_{yz} est paire et que u_y est impaire par rapport au plan $z = 0$ (Das, 1976). Finalement, puisque u_y est continu en Σ_2 , on déduit que $u_y = 0$ en dehors de la fracture sur le plan $z = 0$.

L'analyse bidimensionnelle présentée dans les paragraphes précédents des champs élastiques associés aux fractures des modes cisailants II et III, révèle des conditions mixtes appliquées aux champs dans le plan $z = 0$. Cette analyse nous permet donc d'établir les *conditions de frontières mixtes* appliquées dans le plan $z = 0$ pendant l'évolution temporelle du problème qui, pour le mode II (*in-plane*), deviennent :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \Delta\tau \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ u_x &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_2 \\ \tau_{zz} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2 \end{aligned} \tag{1.111a}$$

et pour le mode III (*anti-plane*) :

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \Delta\tau \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ u_y &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_2. \end{aligned} \tag{1.111b}$$

Les conditions de frontières 1.111 impliquent une symétrie de la solution par rapport au plan $z = 0$. Par conséquent, le problème peut être résolu dans le demi-espace infini $z \leq 0$ en appliquant les conditions de frontière mixtes du tableau 1.111 dans le plan $z = 0$. Un des premiers travaux publiés où l'étude de la propagation d'une fracture est abordée numériquement en tenant compte d'une telle simplification issue de la symétrie du problème, est celui de Kostrov (1966). Depuis, l'analyse numérique de la fracturation a été faite de la même façon par d'autres auteurs en utilisant différentes approches, comme les méthodes intégrales, les éléments finis ou les différences finies (*e.g.*, Madariaga, 1976, Das & Aki, 1977b, Day, 1977, Archuleta & Frazier, 1978, Virieux & Madariaga, 1982, Trifu & Radulian, 1985, Chouet, 1986, Madariaga et al., 1998).

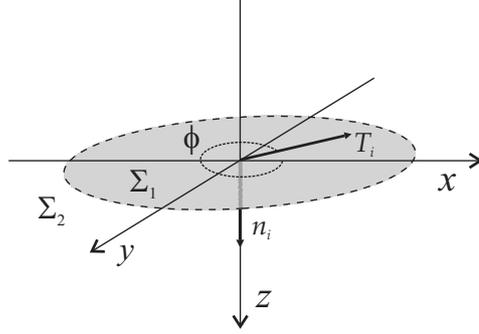


FIG. 1.20: Fracture circulaire située dans le plan $z = 0$ (zone grise) se propageant radialement. Le plan $z = 0$ est séparé en deux régions, celle à l'intérieur de la fracture Σ_1 et celle à l'extérieur Σ_2 . La rupture est due à la chute des tractions T_i associées au vecteur normal unitaire n_i à l'intérieur de Σ_1 .

Dans le cas particulier où le vecteur des tractions cisillantes est parallèle à l'axe x (*i.e.* lorsque c'est la composante τ_{xz} qui chute) la fracture est du mode II (*in-plane*) dans la direction de l'axe x , est du mode III (*anti-plane*) dans la direction de l'axe y . Par conséquent, les conditions de frontière 1.111 appliquées dans le plan $z = 0$ doivent être généralisées pour une orientation quelconque de la charge de contrainte cisillante initiale et de la forme du front de rupture. Ainsi, les conditions de frontière pour une fracture de géométrie quelconque localisée dans le plan $z = 0$ peuvent être exprimée comme

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \Delta\tau \cdot \cos(\phi) \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ \tau_{yz} &= \Delta\tau \cdot \sin(\phi) \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ u_x &= u_y = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2 \\ \tau_{zz} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2, \end{aligned} \tag{1.112}$$

où ϕ est bien l'angle décrit par la projection du vecteur de traction T_i sur la surface de rupture, et l'axe cartésien x (Figure 1.20). Dans ce cas général, la dislocation du milieu associée à la fracture implique la discontinuité des deux composantes horizontales du déplacement u_x et u_y en Σ_1 . Le *glissement* des parois internes de la fracture, S_i , est donc défini comme le déplacement relatif entre elles qui, grâce à la symétrie de la solution en $z = 0$ due au système 1.112, est donné par

En réalité, la propagation d'une fracture est un phénomène tridimensionnel. Considérons donc le cas général d'une fracture circulaire (*i.e.* avec un front de rupture se propageant radialement, Figure 1.20). Soit $T_i = n_j \tau_{ij}$ le vecteur de traction dans la fracture (supposé parallèle au plan $z = 0$) et ϕ l'angle entre lui et l'axe x pendant sa chute vers la valeur dynamique τ_s à l'intérieur de Σ_1 (Figure 1.20). Alors, la fracture passe graduellement du mode II (*in-plane* dans la direction du vecteur des tractions) au mode III (*anti-plane* dans la direction normal à ce vecteur sur le plan $z = 0$) le long du front de rupture (ligne discontinue).

$$S_i(x, y, t) = \sqrt{(u_x^+)^2 + (u_y^+)^2} \cdot \frac{2v_i}{|v_i|} \quad (1.113)$$

où v_i est le vecteur vitesse horizontal du milieu dans Σ_1^+ . Le problème posé par les conditions 1.112 peut être vu comme un problème de Cauchy dans la frontière $z = 0$, tel qu'il a été défini dans les premiers paragraphes de la section 1.5.1. C'est-à-dire, comme une combinaison des conditions de frontière de Dirichlet (équations 1.107) et de Neumann (équations 1.108). Il suffit de prendre la traction T_i dans Σ_1 comme le champ u dans l'équation 1.107b, et le vecteur du glissement S_i dans Σ_2 comme le champ u de l'équation 1.108 (qui est équivalent à $\partial u_x / \partial t = 0$ et $\partial u_y / \partial t = 0$ en Σ_2).

Dans la littérature consacrée à la méthode en différences finies, plusieurs manières d'implémenter numériquement les conditions de frontière associées à la propagation dynamique d'une fracture ont été proposées. A ma connaissance, dans aucun cas, ces conditions sont appliquées implicitement (pour le cas statique voir par exemple les travaux de Coates & Schoenberg (1995) ou de Saenger & Shapiro (2002)). Il s'agit d'un problème difficile puisque la géométrie de la limite entre les régions Σ_1 et Σ_2 (*i.e.* le front de rupture) est une fonction de plusieurs variables physiques qui dépendent du temps. Autrement dit, l'application correcte des conditions de frontière 1.112 dépend d'une manière critique de la précision locale des champs solution dans les alentours de la fracture (*e.g.*, le champ de contrainte et les champs de déplacement ou des vitesses selon la formulation du problème). Comme on verra dans la deuxième partie de ce travail, la plus grande hypothèse utilisée pour la modélisation dynamique d'une fracture (ou d'un séisme) est que la traction et le glissement dans chaque point à l'intérieur de Σ_1 sont reliés à travers une loi constitutive autre que l'équation du mouvement (*i.e.* un loi de frottement). En général, cette loi est au moins une fonction de S_i , raison pour laquelle l'évolution des tractions à l'intérieur de la fracture dépendra, par exemple, de la précision dans l'évaluation du glissement. Ainsi, la relation entre les paramètres physiques qui entrent en jeu et la propagation de la rupture est fortement non-linéaire (voir Madariaga & Olsen, 2000), faisant de la modélisation de ce phénomène un challenge encore plus difficile, puisque des imprécisions numériques relativement faibles peuvent éventuellement aboutir à des résultats très différents.

Tel qu'il a été déjà signalé dans le paragraphe antérieur, un point commun des stratégies en différences finies pour résoudre ce problème est que les conditions de frontière 1.112 sont appliquées explicitement. Les conditions sont explicites dans le sens où l'on impose d'une façon ou d'une autre des

valeurs aux champs solution sur la surface de rupture. En d'autres termes, les méthodes proposées sont des approximations homogènes où les schémas d'intégration sont souvent modifiés localement au voisinage des frontières (*i.e.* des fractures). On peut pourtant classer les modèles en DF pour la fracturation dynamique en deux groupes : les *approches par segment* et les *approches par élément*. L'exercice de comparaison récemment proposé par Harris & Archuleta (2004), dans lequel les résultats issus de différentes méthodes numériques sont en cours de comparaison a révélé que, à précision égale, les *approches en DF par segment* sont plus efficaces que les *approches en DF par élément* (Dalguer & Day, 2004, 2006).

Ce qui caractérise et distingue ces deux familles de méthodes est la façon d'incorporer la discontinuité des déplacements à l'intérieur de la fracture. Prenons l'exemple de la Figure 1.20. Dans le cas des *approches par segment*, comme dans celle nommée « *traction-at-split-node* » par Andrews (1999), le traitement des conditions aux limites en $z = 0$ sépare le milieu en deux régions (région H^+ pour $z \geq 0^+$ et région H^- pour $z \leq 0^-$) avec des nœuds disjoints²³ sur Σ_1 . Chaque moitié de ces nœuds (demi-nœuds) appartient donc à chacune des régions H^+ et H^- . Ainsi, le vecteur de déplacements u_i^\pm (ou de vitesses v_i^\pm) dans la surface Σ_1 , étant traité séparément dans chaque demi-nœud, peut être discontinu à travers la fracture²⁴. Le mouvement de chaque demi-nœud est donné par le bilan de forces provenant uniquement de la région H à laquelle il appartient (y compris la force d'inertie associée à sa masse). Le couplage entre les régions H^+ et H^- le long de Σ_1 est fait à travers les tractions déterminées par une loi constitutive de frottement. Le premier travail publié appliquant cette approche pour simuler la rupture dynamique a été effectué par Andrews (1976a). Parallèlement, la même méthode fut aussi développée et appliquée par Day (1982a,b) suite à son travail consacré à la propagation des ondes par éléments finis (Day, 1977). En 1999, la méthode en différences finies par segments *traction-at-split-node* est formellement introduite par Andrews (1999) et utilisée en suite par plusieurs auteurs (*e.g.*, Andrews, 2005, Day et al., 2005, Bizzarri & Cocco, 2005, Dalguer & Day, 2006). Une autre approche par segment basée sur la méthode des *volumes-finis/différences-finies* en maillage non-structuré a été récemment proposée pour simuler la rupture de failles non-planaires (Ben-Jemaa et al., 2006). Dans ce cas, les équations élastodynamiques sont aussi traités indépendamment de part et d'autre de la faille. L'interaction entre les

²³Des nœuds de la grille en différences finies où l'on trouve les trois composantes du vecteur de déplacement u_i .

²⁴Les exposants \pm des vecteurs font référence au demi-nœud en question appartenant soit à la région H^+ soit à la région H^- .

champs élastiques des deux cotés a lieu le long de la surface de rupture (*i.e.* des segment de frontière), où les conditions aux limites sur les tractions sont formulées et vérifiées en fonction du flux d'énergie (*i.e.* le taux d'énergie) mécanique totale à travers la faille.

Dans le cas des *approches par élément*, la discontinuité du champs de déplacement à travers Σ_1 est une conséquence de l'évolution des tractions donnée par la loi constitutive de frottement. Le saut du déplacement a lieu donc entre les parties externes des éléments et non pas sur des nœuds disjoints spécifiques, comme dans le cas des approches par segment. Autrement dis, la dislocation sur la surface de rupture (*i.e.* le glissement S_i ou sa dérivée) n'est jamais évaluée à l'endroit même où la rupture se produit. Ceci signifie que, si la chute des tractions $\Delta\tau$ a lieu dans le plan $z = 0$, alors les déplacements cisailants $u_i^{+\Delta}$ et $u_i^{-\Delta}$ sont quantifiés respectivement dans les plan $z = +\Delta$ et $z = -\Delta$, où Δ représente la moitié de l'épaisseur discrète de la fracture dans la grille DF. D'ailleurs, c'est pour cette raison que les modèles en DF par élément sont connus comme « *modèles de zone de faille* » (Madariaga et al., 1998, Dalguer & Day, 2006). A ma connaissance, le premier modèle de ce genre est celui introduit par Madariaga (1976). Ensuite, des améliorations de ce modèle ainsi que des formulations alternatives ont été proposées au cour des années (*e.g.*, Virieux & Madariaga, 1982, Chouet, 1986, Madariaga et al., 1998, Andrews, 1999, Cruz-Atienza & Virieux, 2004, Dalguer & Day, 2006). Un facteur commun des modèles de zone de faille est que les conditions aux limite associées à la fracturation sont vérifiées explicitement puisque la valeur des champs élastiques est directement imposée à l'intérieur de la source. Pourtant, ces conditions sont aussi vérifiées implicitement dans le sens où le schéma d'intégration le long de la frontière (*i.e.* de la faille) reste le même qu'à l'intérieur du milieu de propagation, loin de la source. C'est-à-dire, les conditions aux limites appliquées dans les modèles de zone de faille n'ont pas besoin d'un traitement complexe qui pourrait rendre ces méthodes lourdes dans le cas de failles de géométrie compliquées ou bien des milieux multifracturés. Au contraire, elles restent aussi efficaces même dans ces conditions.

Les modèles de zone de faille peuvent être également classés en deux groupes : ceux dont la discontinuité des déplacements à travers Σ_1 est quantifiée à partir des points de l'espace où le vecteur u_i est défini, et ceux dont la même discontinuité est quantifiée à partir de la densité de moment sismique (*i.e.* le « *stress glut* », Backus & Mulcahy, 1976) dans la zone de faille. Le modèle de rupture introduit et discuté dans le chapitre 3 appartient au premier groupe. En revanche, dans le chapitre 4, je discute différentes formulations des modèles appartenant aux deux groupes. Le travail de cette thèse concerne directement les *modèles de zone de faille*. Pour cette raison, une

analyse détaillée est consacrée à ce sujet dans la deuxième partie du travail. Premièrement, pour une géométrie bidimensionnelle, l'analyse est réalisée en tenant compte uniquement des éléments de frontière (cellules numériques) discrétisant la source (chapitre 3). Ensuite, pour la géométrie tridimensionnelle, l'analyse est réalisée en considérant autant la densité de moment sismique associé à la source (*i.e.* le *stress-glut*) que différents types d'éléments de frontière (chapitre 4).

1.5.2 Conditions de Radiation PML

Les conditions aux limites dites de radiation sont celles qui permettent d'absorber ou d'atténuer l'énergie qui, sous la forme des ondes, se propage dans le domaine numérique. Souvent, ces conditions sont appliquées dans les limites extérieures du milieu physique afin d'éviter la réflexion des ondes vers l'intérieur et pouvoir ainsi simuler un espace infini. La bonne performance de ces conditions est d'une importance majeure puisque c'est grâce à elles que l'on peut adapter la taille de notre domaine numérique à la taille du domaine physique du problème, permettant donc le raffinement de la discrétisation du modèle. Une famille assez populaire des méthodes d'absorption a été décrite par Cerjan et al. (1985), ou bien celle introduite par Clayton & Engquist (1977) et améliorée par Higdon (1991) (voir aussi Peng & Toksöz, 1995), dans laquelle des extrapolations des champs solution au-delà du domaine numérique sont utilisées pour atténuer les ondes sortantes. Pourtant, ces méthodes sont peu performantes pour les incidences rasantes.

Une autre méthode d'absorption d'énergie très performante a été développée pour les équations de Maxwell (*i.e.*, ondes électromagnétiques). Berenger (1994) a proposée la méthode PML « *Perfectly Matched Layer* » qui considère une couche extérieure adjacente au modèle où l'énergie, sous la forme d'ondes incidentes, est dissipée. La principale qualité de cette technique est que l'absorption est quasiment indépendante de la fréquence des ondes incidentes et de leur angle d'incidence. Le nom de la méthode vient du fait qu'il existe un couplage parfait entre les ondes incidentes et celles transmises à l'intérieur de la couche absorbante en terme de vitesse de phase et de direction de propagation. Comme on verra dans la prochaine section, la méthode d'absorption PML est basée sur une décomposition du système d'équations différentielle à résoudre en fonction des directions de dérivation spatiale. Cette décomposition mène à un nouveau système d'équations dans lequel les termes associés aux dérivées perpendiculaires aux faces externes de la couche absorbante sont amortis par une fonction « éponge ».

Deux ans plus tard, la technique PML a été adaptée par la première fois aux équations élastodynamiques de façon indépendante par Hastings et al. (1996) en 2D, et par Chew & Liu (1996) en 3D, montrant une très bonne performance dans des milieux hétérogènes. L'incorporation de cette technique dans la formulation vitesse-contrainte dans la grille en quinconce standard (section 1.4.1) a été effectuée en 2D par Collino & Tsogka (2001). Ils ont montré que, même dans des milieux hétérogènes anisotropes, une épaisseur de 5 nœuds pour la couche PML suffit pour obtenir des coefficients de réflexion d'environ 1%. Des implémentations 3D dans la grille en quinconce standard ont été testées dans des conditions réalistes (Marcinkovich & Ol-

sen, 2003, Festa & Nielsen, 2003), tenant compte de la surface libre (*i.e.*, des ondes inhomogènes comme les ondes de Rayleigh ou de Love), de contrastes d'impédance importants, et des source sismique étendues. En général, ces travaux ont conclu que la technique d'absorption PML donne des résultats très satisfaisants. Pourtant, du fait de la décomposition des équations faite par cette technique, une mémoire supplémentaire est toujours nécessaire. Une formulation sans découplage (Wang & Tang, 2003) est donc attractive surtout pour des simulations 3D de grande dimension. Toutefois une exploration dans ce sens pour les systèmes d'équations hyperboliques présentés dans la section 1.3.3 dans la grille en quinconce standard et dans la grille partiellement en quinconce reste à faire.

A ma connaissance, les premières implémentations des conditions d'absorption PML dans la grille partiellement en quinconce proposée par Saenger et al. (2000) ont été fait, dans le cadre de l'étude de la rupture dynamique de failles, par Cruz-Atienza et al. (2002) en 2D et puis par Cruz-Atienza et al. (2004b) en 3D. Comme on verra par la suite, la performance d'une telle technique est aussi bonne que dans le cas de la grille en quinconce standard. Puisque l'implémentation des conditions d'absorption PML dans mes codes en différences finies 2D et 3D constitue une partie non négligeable de mon travail doctoral, je présente premièrement les concepts théoriques généraux associés à cette technique, ensuite une description de l'implémentation informatique ainsi que des simulations 3D montrant la performance de l'absorption avec une étude paramétrique afin d'obtenir un bon compromis entre l'efficacité de l'absorption et la mémoire nécessitée.

1.5.2.1 Formulation et Implémentation 3D

Désignons par Γ la frontière entre le domaine physique du problème, V , et la couche d'absorption enveloppante, M . L'idée fondamentale de la technique d'absorption PML est de coupler, à travers Γ , l'équation du mouvement gouvernant la propagation des ondes dans V avec celles gouvernant les ondes dans M , de telle sorte qu'il n'y aient pas de réflexions vers V et que les ondes décroissent exponentiellement à l'intérieur de M . Prenons comme exemple pour illustrer la théorie du modèle d'absorption PML, le système d'équations hyperboliques de premier ordre suivant :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = A \phi_{i,j} \tag{1.114}$$

où $\phi_i(x, y, z, t)$ est un champ vectoriel dans l'espace \mathbb{R}^3 et A est une matrice de 3×3 éléments constants. Le système 1.114 peut être décomposé en tenant

compte des sous-composantes ϕ_i^x , ϕ_i^y et ϕ_i^z , reliées aux trois directions de dérivation spatiale de la manière suivante :

$$\frac{\partial \phi_i^x}{\partial t} = A \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \quad (1.115a)$$

$$\frac{\partial \phi_i^y}{\partial t} = A \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \quad (1.115b)$$

$$\frac{\partial \phi_i^z}{\partial t} = A \frac{\partial \phi_i}{\partial z}, \quad (1.115c)$$

où les exposants x , y et z font référence à ces directions, de façon que

$$\phi_i = \phi_i^x + \phi_i^y + \phi_i^z. \quad (1.116)$$

Par ailleurs, on introduit la fonction scalaire $\alpha(x, y, z)$ qui vaut zéro à l'intérieur de V et qui est positive à l'intérieur de M . Le rôle de cette fonction est d'amortir la ou les sous-composantes du champ ϕ_i perpendiculaires aux faces extérieurs de la couche PML. Ainsi, la fonction α doit être astucieusement introduite dans le système 1.115 selon la région du domaine numérique où l'on se place. La Figure 1.21 montre, pour un espace cubique, la couche PML séparée en trois familles de volumes. Ce qui distingue les trois familles est le nombre de faces extérieurs des volumes : les cotés du cube (volumes jaunes) ont une face, les arêtes du cube (volumes bleus) ont deux faces et les coins du cube (volumes oranges) ont trois faces. Par conséquent, selon le volume de M dans lequel on se place, le nombre de sous-composantes amorties sera, respectivement, un, deux ou trois (voir Figure 1.21). Trois nouveaux systèmes d'équations découplées doivent être donc formulés en tenant compte de la fonction éponge α , un pour chacune des trois directions d'absorption (*i.e.* de dérivation). Soit le champ vectoriel θ_i la solution de ces systèmes découplés dans l'espace \mathbb{R}^3 . Le modèle d'absorption PML établit que le système d'équations pour l'absorption dans la direction x est donné par :

$$\frac{\partial \theta_i^{\perp x}}{\partial t} + \alpha(x) \theta_i^{\perp x} - A \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = 0 \quad (1.117a)$$

$$\frac{\partial \theta_i^{\parallel x}}{\partial t} - A \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial y} + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.117b)$$

où α ne dépend que de la direction d'amortissement, et les exposants \perp^x et \parallel^x indiquent les sous-composantes du champ θ_i dont la ou les dérivées spatiales sont, respectivement, perpendiculaires et parallèles au plan cartésien $y - z$, toujours avec la condition

$$\theta_i = \theta_i^{\perp x} + \theta_i^{\parallel x}. \quad (1.118)$$

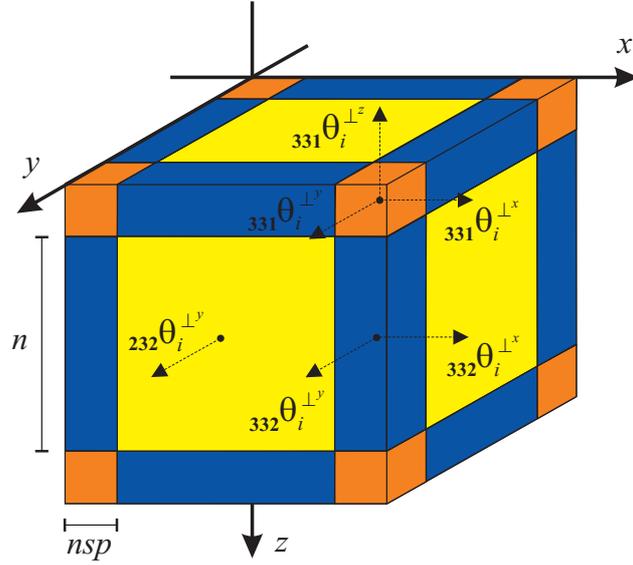


FIG. 1.21: Couche d'absorption PML classée selon le nombre de sous-composantes du champ θ_i qui sont amorties dans les différentes régions volumiques la constituant. Les indices à gauche montrent la nomenclature cristallographique pour l'allocation des tableaux dans l'implémentation informatique 3D. Le paramètre « n » est le nombre de points de la grille numérique le long des cotés du milieu physique (cubique), et le paramètre « nsp » est le nombre de points de la grille numérique qui détermine l'épaisseur de la couche PML.

De même, les systèmes d'équations pour les absorptions dans les deux autre directions sont donnés par :

$$\frac{\partial \theta_i^{\perp y}}{\partial t} + \alpha(y) \theta_i^{\perp y} - A \frac{\partial \theta_i}{\partial y} = 0 \quad (1.119a)$$

$$\frac{\partial \theta_i^{\parallel y}}{\partial t} - A \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x} + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.119b)$$

dans la direction y , où \perp^y et \parallel^y font référence aux sous-composantes dont les dérivées sont perpendiculaire et parallèles au plan cartésien $x - z$, et par :

$$\frac{\partial \theta_i^{\perp z}}{\partial t} + \alpha(z) \theta_i^{\perp z} - A \frac{\partial \theta_i}{\partial z} = 0 \quad (1.120a)$$

$$\frac{\partial \theta_i^{\parallel z}}{\partial t} - A \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x} + \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.120b)$$

dans la direction z , où \perp^z et \parallel^z font référence aux sous-composantes dont les dérivées sont perpendiculaires et parallèles au plan cartésien $x - y$. Ces deux derniers systèmes (1.119 et 1.120) remplissent respectivement les conditions :

$$\theta_i = \theta_i^{\perp y} + \theta_i^{\parallel y} \quad \text{et} \quad \theta_i = \theta_i^{\perp z} + \theta_i^{\parallel z}. \quad (1.121)$$

En suivant cette logique, si l'on se place par exemple à l'intérieur d'un coin du cube (volumes oranges, Figure 1.21), le système d'équations devra tenir compte d'une absorption dans les trois directions de dérivation (*i.e.* des trois sous-composantes du champ θ_i). Ainsi, nous avons le système découpé associé à cette famille de volumes :

$$\frac{\partial \theta_i^{\perp x}}{\partial t} + \alpha(x, y, z) \theta_i^{\perp x} - A \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = 0 \quad (1.122a)$$

$$\frac{\partial \theta_i^{\perp y}}{\partial t} + \alpha(x, y, z) \theta_i^{\perp y} - A \frac{\partial \theta_i}{\partial y} = 0 \quad (1.122b)$$

$$\frac{\partial \theta_i^{\perp z}}{\partial t} + \alpha(x, y, z) \theta_i^{\perp z} - A \frac{\partial \theta_i}{\partial z} = 0 \quad (1.122c)$$

avec

$$\theta_i = \theta_i^{\perp x} + \theta_i^{\perp y} + \theta_i^{\perp z}. \quad (1.123)$$

Puisque $\alpha = 0$ dans V , le champ θ_i satisfait le même système d'équation 1.114 que ϕ_i à l'intérieur du modèle physique. Par ailleurs, Collino & Tsogka (2001) ont montré, pour des solutions harmoniques dans le temps, que le découplage du système d'équations associé à la technique PML (*e.g.*, les systèmes 1.117, 1.119 et 1.120) est équivalent à une simple substitution des opérateurs spatiaux dans les directions amorties, issus d'un changement de variable. Par exemple, dans la direction x , la dérivée partielle devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \frac{j\omega}{j\omega + \alpha(x)} \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.124)$$

où $j = \sqrt{-1}$ et ω est la fréquence angulaire de la solution harmonique. Donc, si l'on cherche une solution au système original 1.114 pour une onde plane en terme du vecteur nombre d'onde k_i de la forme :

$$\phi_i = \phi_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}, \quad (1.125)$$

ainsi qu'une solution au système découpé 1.117 pour l'absorption dans la direction x , de la forme :

$$\theta_i^{\perp} = a^{\perp} e^{-j(k_x \tilde{x} + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (1.126)$$

$$\theta_i^{\parallel} = a^{\parallel} e^{-j(k_x \tilde{x} + k_y y + k_z z - \omega t)}, \quad (1.127)$$

où le champ total $\theta_i = \theta_i^{\perp x} + \theta_i^{\parallel x}$ et $\tilde{x}(x)$ est un complexe du au changement de variable mentionné auparavant alors, en prenant a^{\perp} et a^{\parallel} tels que $a^{\perp} + a^{\parallel} = \phi_0$, nous retrouvons que :

$$\theta_i = \phi_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \exp \left[-\frac{k_x}{\omega} \int_0^x \alpha(s) ds \right], \quad (1.128)$$

où s est la variable complexe. L'équation 1.128 montre que : **1)** $\theta_i = \phi_i$ dans V (*i.e.* pour $x \leq 0$), et **2)** que le champ θ_i est amorti exponentiellement à l'intérieur de la couche PML (*i.e.* dans M , pour $x > 0$) (voir Collino & Tsogka, 2001). Ce qui est aussi remarquable dans cette équation est que, plus l'onde est perpendiculaire à Γ , c'est-à-dire, plus k_x est faible, plus le facteur d'amortissement (exponentielle de la droite) décroît rapidement (*i.e.* plus l'onde est atténué). Bref, la formulation mathématique de la méthode PML montre, d'une part, que les ondes se propageant dans l'espace physique V sont solution des équations élastodynamiques et d'autre part, que les ondes se propageant dans la couche d'absorption M sont exponentiellement atténuées. L'analyse des coefficients de réflexion des ondes planes dans l'interface Γ montre qu'aucune réflexion ne s'y produit. Malgré tout, les coefficients de réflexion des ondes se propageant dans le milieu absorbant lors de leur incidence dans la limite extérieure de M sont totalement contrôlés par la fonction α . Cette fonction va donc jouer un rôle fondamental dans l'amortissement à l'intérieur de M . Pourtant, les relations de dispersion numérique révèlent que cela n'est pas vrai lorsqu'on discrétise le modèle PML. Malgré la dimension de M ou le choix de α , des réflexions parasites reviendront dans le modèle physique V en raison de la dispersion des ondes. Autrement dit, la dispersion numérique entraîne le fait que le milieu absorbant M n'est plus parfaitement couplé avec le milieu physique V , comme le prédit la théorie dans un *continuum*. Les systèmes d'équations découplés pour l'absorption dans les directions cartésiennes pour la formulation vitesse-contrainte (équations 3.1 en 2D, et équations 1.82 en 3D) sont présentés par Collino & Tsogka (2001, équation 12) et par Marcinkovich & Olsen (2003, annexe A2) respectivement en 2D et 3D. Les équations en différences finies correspondantes, discrétisées dans la grille en quinconce standard, se trouvent dans ces mêmes travaux.

Un atout de mon implémentation des conditions de radiation PML réside dans l'économie de mémoire. La façon la plus directe d'implémenter ces conditions dans un code DF consiste à réaliser le découplage du système d'équations (voir système 1.115) dans tout le domaine numérique, y compris l'espace physique du problème. Autrement dit, déclarer un tableau de la taille de tout le domaine numérique par sous-composante des champs

solution, puis amortir les sous-composantes qui doivent être amorties à l'intérieur de la couche PML. Ce procédé implique un gaspillage de mémoire très important. En effet, je ne découple alors le système d'équations qu'à l'intérieur de la couche PML. C'est-à-dire, à l'intérieur du milieu physique, le système d'équations reste celui d'origine (équations 1.82) sans avoir besoin d'un stockage supplémentaire de données associé au découplage. Pour mieux comprendre le bénéfice de cette astuce informatique, j'ai fait des estimations théoriques de mémoire réclamée par l'implémentation PML directe (où les champs solution sont décomposés dans tout le domaine numérique) et par l'implémentation optimisée que j'ai nommée « cristallographique », grâce au repérage indiciel des composantes à l'intérieur de la couche absorbante (Figure 1.21).

Les équations permettant d'estimer la mémoire de calcul réclamée pour chacune des deux implémentations ont été établies pour le cas spécifique d'un espace cubique. C'est-à-dire que les deux seuls paramètres indépendants pour une telle estimation sont « nsp », le nombre de points de la grille numérique qui détermine l'épaisseur de la couche PML et « n », le nombre de points qui détermine la longueur de chaque côté du milieu physique (voir Figure 1.21). Voici les équations tenant compte de l'allocation de mémoire des principaux tableaux utilisés pour résoudre le système d'équation 1.82 :

$$Mem = 124[n + 2(nsp)]^3 \quad (1.129a)$$

$$Mem' = 124[n + 2(nsp)]^3 - 60n^3 \quad (1.129b)$$

où Mem et Mem' représentent, respectivement, la mémoire vive en octets réclamée par le code PML direct et par le code PML cristallographique.

La Figure 1.22 (gauche) montre, pour une épaisseur donnée de la couche PML (*i.e.*, nsp égal à 10 points), la croissance de mémoire vive (Gigaoctets) en fonction de n pour les deux codes. A droite, la Figure 1.22 montre le pourcentage de mémoire sollicitée par le code PML cristallographique par rapport à celle du code PML direct. Pour n plus grand que 300, l'économie de mémoire est de plus de 40%. L'économie de mémoire est de plus en plus importante au fur et à mesure que n est plus grand, mais aussi dans la mesure que la couche d'absorption s'amincit (*i.e.* quand nsp tend vers zéro). A la limite, lorsque la couche PML disparaît (nsp égal à zéro, pas d'absorption) l'économie de mémoire est maximale et égale à 49.4% pour tout n .

1.5.2.2 Source Isotrope

Pour étudier l'efficacité de l'implémentation 3D des conditions d'absorption PML, j'ai considéré des ondes excitées par une source isotrope se propageant

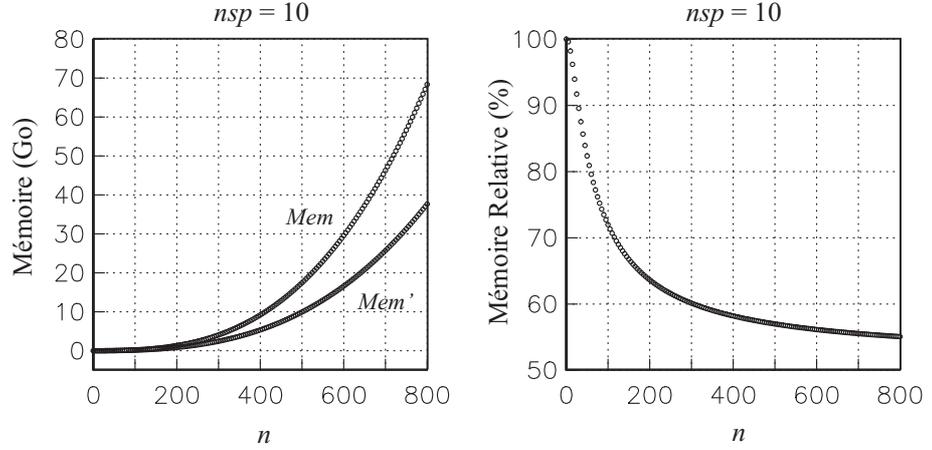


FIG. 1.22: A gauche : estimation de la mémoire vive réclamée (Gigaoctets) par le code PML direct (équation 1.129a) et par le code PML cristallographique (équation 1.129b). A droite : pourcentage de mémoire vive relative du code PML optimisé (cristallographique) par rapport au code PML direct. Voir Figure 1.21 pour les paramètres n et nsp .

à l'intérieur des milieux infinis homogènes et hétérogènes. Dans tous les cas, les six faces extérieures du milieu physique sont en contact avec une couche d'absorption PML. Afin d'imposer une *excitation isotrope* (*i.e.* explosive), la fonction source $s(x, y, z, t)$ a été additionnée au cours du temps aux composantes normales du tenseur des contraintes τ_{xx} , τ_{yy} et τ_{zz} . Le support spatial de la source tridimensionnelle est donné par la fonction gaussienne

$$s(x, y, z) = e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]/\sigma_s^2} \quad (1.130)$$

où x_0 , y_0 et z_0 sont les coordonnées du centre de la source et σ_s est le paramètre d'échelle spatiale qui détermine la dimension de la source. σ_s a été choisi égale à $333m$ dans tous les cas, valeur qui se traduit par un support sphérique d'environ $2km$ de diamètre (voir Figure 1.29 dans le cas d'un milieu hétérogène à trois couches). Le support de la source 1.130 est normalisé par rapport à sa valeur maximale (*i.e.* pour $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$, le centre de la source) de telle sorte qu'il y soit égale à un. Concernant le volet temporel de l'excitation, la fonction source est une ondelette donnée par la dérivée première d'une fonction gaussienne (Figure 1.23), c'est-à-dire :

$$s(t) = - [2(t - t_0)/\sigma_t^2] e^{-[(t-t_0)^2]/\sigma_t^2} \quad (1.131)$$

où σ_t représente le paramètre d'échelle temporel qui détermine la durée de l'excitation. Dans toutes les simulations réalisées dans cette section, σ_t a été

pris égale à 0.17 donnant lieu à une excitation d'environ 1s (Figure 1.23). Comme le montre la Figure 1.23, la valeur absolue maximale de l'ondelette a été fixée à $1Pa$.

1.5.2.3 Test d'Absorption : Énergie Mécanique

Afin de comprendre le rôle que joue l'épaisseur de la couche PML ainsi que celui de la fonction d'amortissement $\alpha(x, y, z)$ (équation 1.128) et de trouver les paramètres d'absorption optimale, j'ai quantifié, pour différents cas, l'énergie mécanique résiduelle non absorbée par les conditions de radiation PML. Pour cela, j'ai d'abord considéré un espace homogène, dans lequel une onde P sphérique se propage depuis la source jusqu'à la couche d'absorption et puis un modèle hétérogène, constitué de deux demi-espaces, donnant lieu à des ondes P et S ainsi que des *ondes coniques* également amorties dans la couche PML. Il a fallu premièrement quantifier, dans les deux cas, l'énergie totale fournie par la source et deuxièmement quantifier, à partir de cette valeur, le pourcentage d'énergie non absorbée par la couche PML, $E_m^{(\%)}$, à un temps donné t_e . J'ai défini l'instant t_e comme l'instant où la dernière onde S atteint le point de la couche d'absorption le plus éloigné de la source.

Or, si le milieu est élastique et V est le volume de l'espace physique, alors l'énergie mécanique du milieu, E_m , est définie comme l'intégrale dans V de la somme de l'énergie cinétique, E_k , plus l'énergie élastique (ou potentielle), E_u , c'est-à-dire

$$E_m|_V = \iiint_V (E_k + E_u) dV. \quad (1.132)$$

L'énergie cinétique d'un volume différentiel de masse est donnée par :

$$E_k|_{dV} = \frac{1}{2} \rho \|v_i\|^2 dV \quad (1.133)$$

où ρ est la masse volumique du milieu et v_i est le vecteur vitesse de la masse. Par ailleurs, l'énergie élastique d'un volume différentiel de masse est donnée

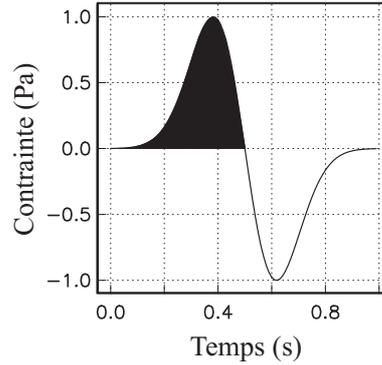


FIG. 1.23: Ondelette utilisée pour l'excitation des sources isotropes, donnée par la dérivée première d'une fonction gaussienne (équation 1.131).

par :

$$E_u \Big|_{dV} = \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} dV \quad (1.134)$$

où τ_{ij} est le tenseur de contrainte et e_{ij} est le tenseur de déformation défini par 1.70. Puisque le schéma numérique résout la formulation en vitesse-contrainte dans la grille partiellement en quinconce (voir Figure 1.10 et section 1.4.3), le calcul de l'énergie cinétique est immédiat via les nœuds de vitesse où l'on connaît aussi la masse volumique ρ . En revanche, le calcul de l'énergie élastique n'est pas aussi simple. Pour la calculer, il est possible d'exprimer les deux tenseurs de l'équation 1.134 uniquement en terme du vecteur de déplacement, u_i , en utilisant les expressions 1.73 et 1.70. Ainsi, pour connaître E_u dans les noeuds de vitesse il faut interpoler les valeurs de λ et μ et intégrer le vecteur v_i dans le temps. Cependant, il paraît plus sensé de tout exprimer en terme des contraintes et de calculer l'énergie élastique dans la grille où se trouvent à la fois les constantes de Lamé et le tenseur τ_{ij} . De cette manière on évite des interpolations et des intégrations temporelles.

La loi de Hooke d'un *continuum* élastique et isotrope, donnée par l'expression 1.73, peut être reformulée en isolant le tenseur de déformation e_{ij} . Dans ce cas, e_{ij} peut être exprimé en fonction de τ_{ij} , de la relation de Poisson, ν , et du module de Joung, E , comme :

$$e_{xx} = A\tau_{xx} - B(\tau_{yy} + \tau_{zz}) \quad (1.135a)$$

$$e_{yy} = A\tau_{yy} - B(\tau_{xx} + \tau_{zz}) \quad (1.135b)$$

$$e_{zz} = A\tau_{zz} - B(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \quad (1.135c)$$

pour les composantes normales de la déformation, où $A = 1/E$ et $B = \nu/E$, et comme :

$$e_{ij} = C\tau_{ij}(1 - \delta_{ij}) \quad (1.135d)$$

pour les composantes cisailantes, où $C = (1 - \nu)/E$ et δ_{ij} est la delta de Kronecker²⁵. Si l'on développe les indices de l'expression 1.134 et substitue les composantes du tenseur de déformation par les équations 1.135, après avoir simplifié les termes, on obtient l'expression pour l'énergie élastique d'un point quelconque de l'espace, uniquement en terme de contraintes :

$$E_u = 0.5A(\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + \tau_{zz}^2) - \quad (1.136)$$

$$B(\tau_{xx}\tau_{yy} + \tau_{xx}\tau_{zz} + \tau_{yy}\tau_{zz}) +$$

$$C(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2).$$

²⁵ $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Les relations entre ν et E et les constantes de Lamé sont données par (Fung, 1977, page 217)

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{et} \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Les constantes A , B et C peuvent donc être exprimées en fonction des paramètres λ et μ comme :

$$A = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (1.137a)$$

$$B = \frac{\lambda}{\mu(6\lambda + 4\mu)} \quad (1.137b)$$

$$C = \frac{1}{2\mu}. \quad (1.137c)$$

En substituant ces trois constantes dans l'expression 1.136, on peut finalement calculer E_u à partir des quantités connues dans les nœuds de contraintes de notre grille partiellement en quinconce.

Comme l'équation 1.132 le signale, l'intégrale volumique de la somme de E_k et E_u , respectivement déterminées dans les grilles de vitesse et de contrainte, permet donc d'estimer l'énergie totale mécanique du système. Prenons comme premier cas d'analyse la propagation d'une onde excitée au centre d'un milieu cubique de $16km$ de coté, enveloppé par une couche d'absorption ayant une épaisseur H égal à $1km$. Les propriétés élastiques du modèle sont données dans le tableau 1.2 en termes de vitesse de propagation des ondes et de masse volumique. Les constantes de Lamé, λ et μ , sont déterminées à partir de v_p , v_s et ρ à travers les relations 1.79. Les paramètres numériques pour la discrétisation spatiale et temporelle du problème sont $h = 100m$ et $\Delta t = 0.01s$. Dorénavant, ces deux paramètres ne seront plus mentionnés dans cette section puisque la même discrétisation a été considérée dans toutes les simulations présentées ultérieurement. Étant donné les dimensions du modèle établies précédemment, une telle discrétisation implique que $n = 161$ et $n_{sp} = 10$ (voir Figure 1.21).

$v_s(m/s)$	$v_p(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$
2300	4000	2500

TAB. 1.2: Structure de vitesses d'un milieu homogène infini. v_p et v_s sont, respectivement, la vitesse de propagation des ondes P et des ondes S , et ρ est la masse volumique.

Si le milieu physique V est borné dans la direction x par les plans $\Gamma = \pm x_\Gamma$, alors la fonction d'amortissement $\alpha(x, y, z)$ utilisée le long de tout ce travail est définie, pour une absorption dans la direction x (équation 1.117), comme (Operto et al., 2002)

$$\alpha(x) = 1 - \cos \left[\frac{\arccos(\kappa) \cdot x'}{H} \right] \quad (1.138)$$

où $x' = |x - x_\Gamma|$ pour $|x| \geq |x_\Gamma|$, H est l'épaisseur de la couche PML, et $0 \leq \kappa \leq 1$. Le paramètre κ va donc contrôler la contraction du cosinus à l'intérieur de la couche d'absorption. Si $\kappa = 1$ alors $\alpha = 0$ pour tout $|x| \geq |x_\Gamma|$, c'est-à-dire, qu'il n'y a pas d'amortissement. Si $\kappa < 1$, alors il y a une croissance de la fonction α depuis la valeur $\alpha = 0$ dans $x = \pm x_\Gamma$, jusqu'à la valeur $\alpha = \kappa$ dans les limites extérieures de la couche PML (*i.e.* dans $x = \pm[x_\Gamma + H]$). Les fonctions d'amortissement dans les direction y et z , respectivement $\alpha(y)$ (équation 1.119) et $\alpha(z)$ (équation 1.120), sont construites de la même façon que celle pour la direction x .

La Figure 1.24 montre une succession d'instantanés de la composante verticale du champ de vitesses. Les images correspondent au mouvement dans le plan $y = y_0$ qui passe à travers le centre de la source (voir équation 1.130). Le schéma numérique utilisé est d'ordre $O[(\Delta t)^2, h^2]$ (*i.e.* équations en différences 1.104), et la valeur du paramètre d'amortissement κ est égale à 0.5. Puisqu'il s'agit d'une source isotrope à l'intérieur d'un espace homogène, l'excitation donne uniquement lieu à une onde P sphérique qui se propage radialement avec une atténuation géométrique proportionnelle à $1/r$, où r est la distance entre le front d'onde et la source (comparer l'instantané au moment $t = 1.4s$ avec celle à l'instant $t = 2.8s$). A l'instant $t = 2.8s$ l'onde commence à entrer dans la couche PML au milieu des parois du modèle. L'effacement successif et définitif de l'onde à la fin est visible dans les trois derniers instantanés à l'échelle utilisée.

L'absorption d'énergie sismique, manifeste sur la Figure 1.24, peut être regardée de plus près en quantifiant l'évolution temporelle de l'*énergie mécanique du système* (*i.e.*, de l'espace physique V ayant dans ce cas un volume égale à $16^3 km^3$). La Figure 1.25 montre, au cours du temps, l'évolution de l'énergie mécanique E_m ainsi que des énergies cinétique et élastique (voir équations 1.132, 1.133 et 1.134). A la fin de l'excitation, environ à l'instant $t = 1s$, l'énergie mécanique totale fournie au système peut être quantifiée. Comme l'indique la flèche horizontale, cette valeur est égale à $E_m^{tot} = 4.62J$. L'énergie mécanique ainsi que sa partition en E_k et E_u restent constantes jusqu'au moment où le front d'onde atteint la frontière Γ , environ 2s après l'initiation de la source.

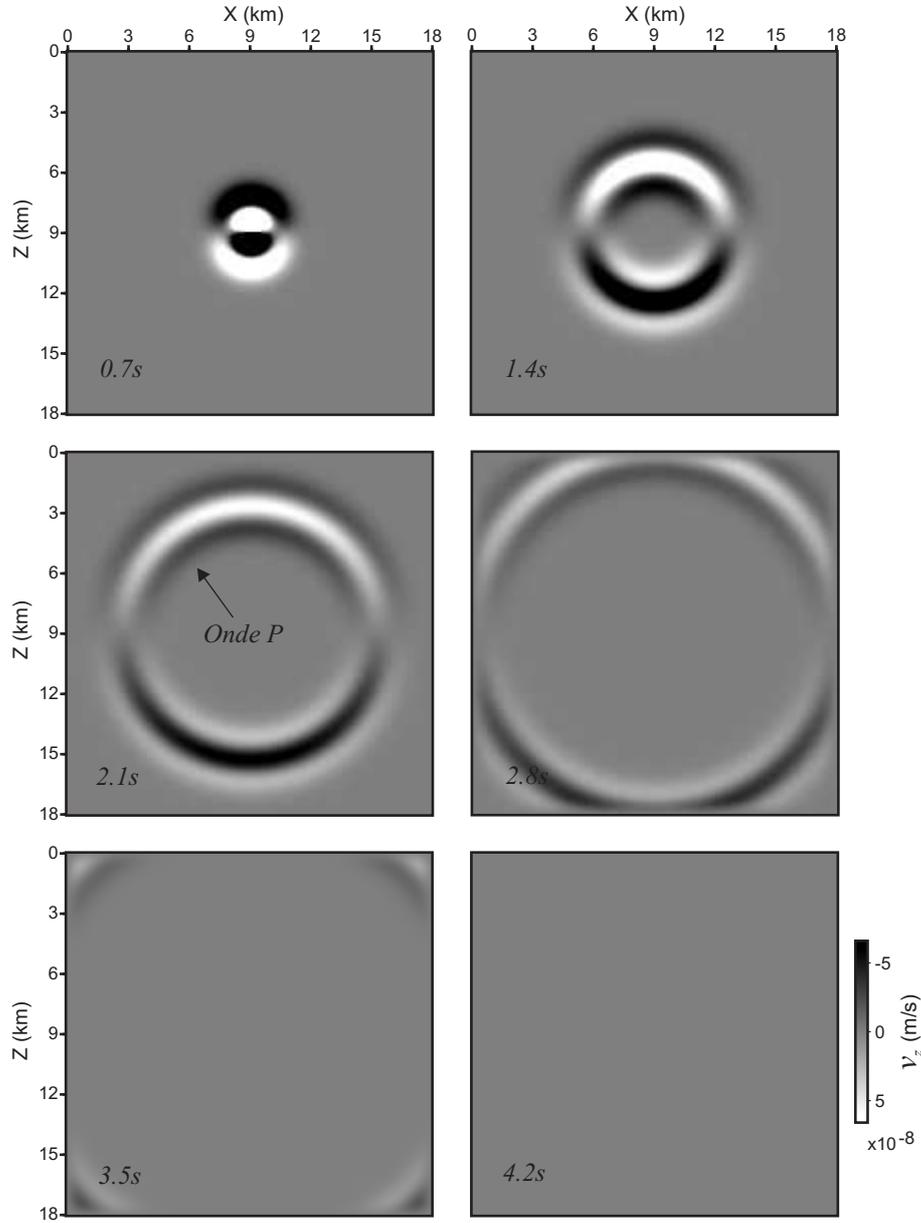


FIG. 1.24: Instantanés dans le plan $y = y_0$ de la composante verticale du champ de vitesse (v_z) excité par une source isotrope (voir équation 1.130 et Figure 1.23) dans un milieu homogène dont les propriétés élastiques sont celles spécifiées dans le tableau 1.2. Schéma numérique d'ordre (2,2) avec $nsp = 10$ (voir Figure 1.21) et $\kappa = 0.5$ (voir équation 1.138).

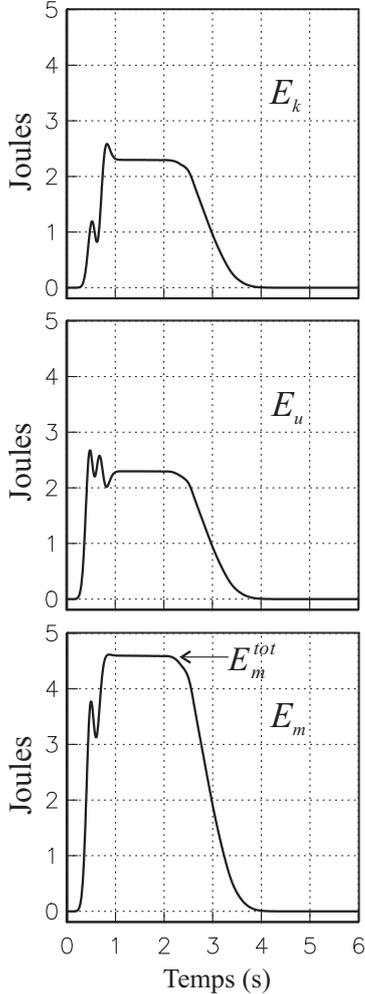


FIG. 1.25: Évolution temporelle des énergies cinétique (E_k), élastique (E_u) et mécanique ($E_m = E_k + E_u$) à l'intérieur de l'espace physique de la simulation montrée dans la figure précédente 1.24 (voir équation 1.132).

valeurs de nsp) afin d'évaluer l'incidence de ce paramètre dans l'absorption des ondes. La Figure 1.26 montre, pour une valeur de κ égale à 0.5, le pourcentage d'énergie résiduelle à l'instant $t = 4.6s$ qui, comme il a été déjà men-

Notons la partition énergétique équitable dans ce milieu. Puis, l'énergie du système diminue jusqu'à un niveau très bas ($E_m < 6 \times 10^{-6} J$) à l'instant $t = 4.6s$, moment autour duquel la traînée de l'onde P atteint le point plus éloigné de Γ .

Les oscillations que l'on trouve dans les fonctions énergétiques entre 0s et 1s sont clairement reliées à la fonction source imposée au milieu via les contraintes normales. L'ondulette utilisée (Figure 1.23) implique une expansion du milieu suivie d'une contraction. C'est-à-dire, une accélération positive et puis négative des particules à l'intérieur du support sphérique de la source. Cet effet est visible dans la fonction E_k où le taux d'énergie cinétique devient négatif autour des instants $t = 0.6s$ et $t = 0.9s$. Par ailleurs, puisque l'énergie élastique du système, définie par 1.134, peut être interprétée comme un travail effectué sur les particules du milieu, lorsque la force appliquée change de signe 0.5s après l'initiation (voir Figure 1.23), la source « aspire » de l'énergie à l'intérieur de son support spatial. Cet effet, avec les rebonds élastiques associés, sont visibles dans l'évolution de l'énergie élastique E_u . Le bilan énergétique du système est donc perturbé pendant l'excitation, comme le montre la courbe de l'énergie mécanique E_m .

Pour quantifier l'efficacité de l'absorption des conditions de radiation PML on peut calculer, à un instant donné suffisamment tardif, le pourcentage d'énergie mécanique résiduelle, $E_m^{(\%)}$, par rapport à E_m^{tot} . Ce calcul peut être effectué pour différentes épaisseurs de la couche PML (*i.e.* différentes

tionné, correspond approximativement au moment où la traînée de l'onde P atteint le point le plus éloigné de Γ . Cet instant a lieu bien avant que les principales ondes réfléchies dans la couche PML atteignent une deuxième fois la frontière Γ .

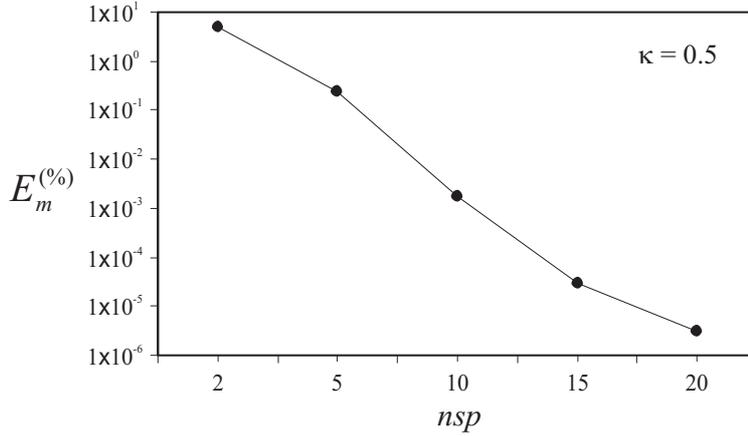


FIG. 1.26: Pourcentage de l'énergie mécanique résiduelle $E_m^{(\%)}$ non absorbée par les conditions de radiation PML à l'instant $t = 4.6s$ dans le milieu homogène correspondant au tableau 1.2, en fonction de l'épaisseur de la couche PML donnée par nsp (voir Figure 1.21). κ est défini dans l'équation 1.138.

Les valeurs de $E_m^{(\%)}$ pour des épaisseurs diverses de la couche PML depuis $200m$ jusqu'à $2000m$ (*i.e.* pour $nsp = 2, 5, 10, 15, 20$) présentent une décroissance exponentielle. Dans le cas où la couche ne possède que deux nœuds, le pourcentage d'énergie résiduelle est d'environ 5%. Rapidement il décroît pour atteindre des valeurs de $2 \times 10^{-3}\%$ et $3 \times 10^{-6}\%$ respectivement pour $nsp = 10$ et $nsp = 20$. Par conséquent, ce test montre que l'implémentation de la technique d'absorption PML rend des résultats excellents dans les conditions choisies et les paramètres considérés. Cependant, on est loin d'une situation difficile pour l'absorption des ondes avec la technique PML : il s'agit d'une onde P se propageant dans un espace homogène avec un contenu fréquentiel restreint. Vis-à-vis d'autres techniques d'absorption, le facteur qui rend intéressant les résultats de ce test est la variabilité de l'angle d'incidence de l'onde sur Γ . Étant donné que le front d'onde est sphérique, cet angle varie le long des faces extérieurs du modèle entre 0° et 45° .

Or, le problème de l'absorption en présence d'interfaces entre milieux différents est connu pour poser plus de problèmes (*e.g.*, Chew & Liu, 1996, Marcinkovich & Olsen, 2003, Festa & Nielsen, 2003). Pour cette raison j'ai

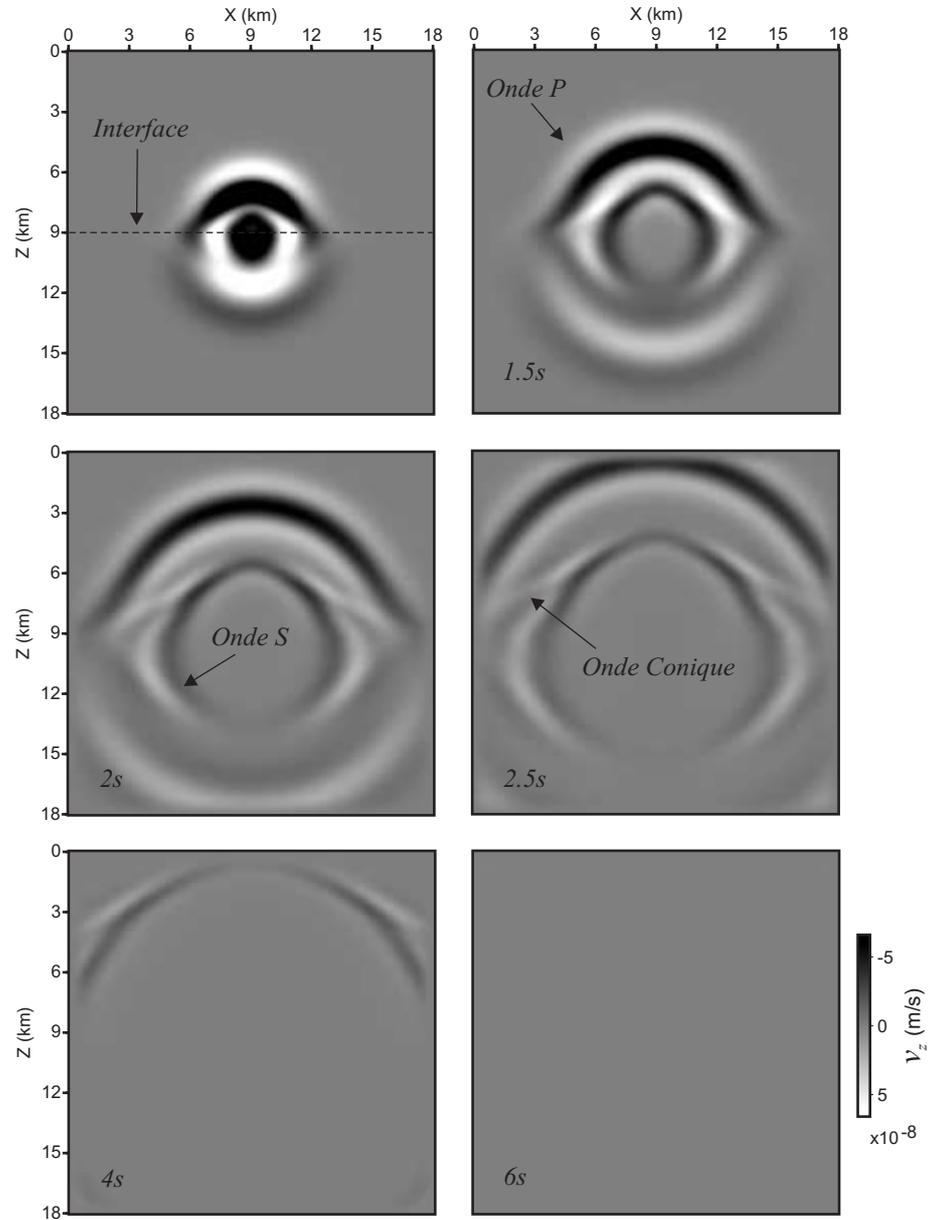


FIG. 1.27: Instantanés sur le plan $y = y_0$ de la composante vertical du champ de vitesse (v_z) excité par une source isotrope (voir équation 1.130 et Figure 1.23) dans un milieu hétérogène constitué de deux demi-espaces dont les propriétés élastiques sont données dans le tableau 1.3. Schéma numérique d'ordre (2, 4) avec $nsp = 10$ (voir Figure 1.21) et $\kappa = 0.5$ (équation 1.138).

réalisé un test énergétique, similaire à celui décrit précédemment, en tenant compte d'un modèle hétérogène constitué de deux demi-espaces. La géométrie du problème est la même sauf pour l'interface entre les deux milieux qui passe à travers la source isotrope sur le plan $z = z_0$. Les propriétés élastiques du demi-espace supérieur (D1) et du demi-espace inférieur (D2) sont données dans le tableau 1.3.

Demi-Espace	$v_s(m/s)$	$v_p(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$
D1	2500	4330	2156
D2	3500	6000	2690

TAB. 1.3: Structure de vitesses d'un milieu hétérogène à deux couches. v_p et v_s sont, respectivement, la vitesse de propagation des ondes P et des ondes S , et ρ est la masse volumique.

La Figure 1.27 montre une succession d'instantanés de la composante verticale du champ de vitesses v_z . Les images correspondent au mouvement dans le plan $y = y_0$ qui passe à travers le centre de la source. L'épaisseur de la couche d'absorption est de $1km$ (*i.e.* $nsp = 10$) et la valeur du paramètre d'amortissement κ est égale à 0.5. Contrairement à la démarche suivie dans le cas de l'espace homogène, pour l'analyse dans le milieu hétérogène j'ai utilisé un schéma numérique d'ordre supérieur. J'ai appliqué donc les équations en différence B.1 qui possèdent une précision à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^4]$. Puisque la discrétisation spatiale et temporelle du modèle est toujours la même, le choix des opérateurs en différences finies devrait améliorer l'absorption dans la mesure où ils réduisent la dispersion numérique. Bien que la source soit isotrope, étant donné qu'elle s'étale le long d'environ $2km$, la présence de l'interface produit des ondes réfractées de volume P et S sphériques ainsi que des ondes S coniques (voir Figure 1.27). Bien entendu, l'amplitude des ondes dans le demi-espace supérieur (D1) est beaucoup plus importante que dans la partie inférieure (D2) où les ondes se propagent plus rapidement. Les ondes coniques sont générées en raison de la moitié de la source qui se trouve au dessus de l'interface, à l'intérieur de D1. Elles ne sont que la réfraction des ondes P transmises dans le milieu de grande vitesse de propagation. Autrement dit, si la source se trouvait entièrement à l'intérieur du milieu D2, aucune onde conique n'aurait lieu. Malgré la diversité des ondes que l'on trouve dans cet exemple, balayant un grand nombre d'angles d'incidence en Γ , l'énergie sismique disparaît au fur et à mesure qu'elle atteint la couche PML (voir instantanés en $t = 2s$, $t = 2.5s$ et $t = 4s$). A l'instant $t = 6s$, les ondes ont visiblement disparu à l'échelle utilisée dans la figure qui est d'ailleurs la même échelle que celle de la Figure 1.24.

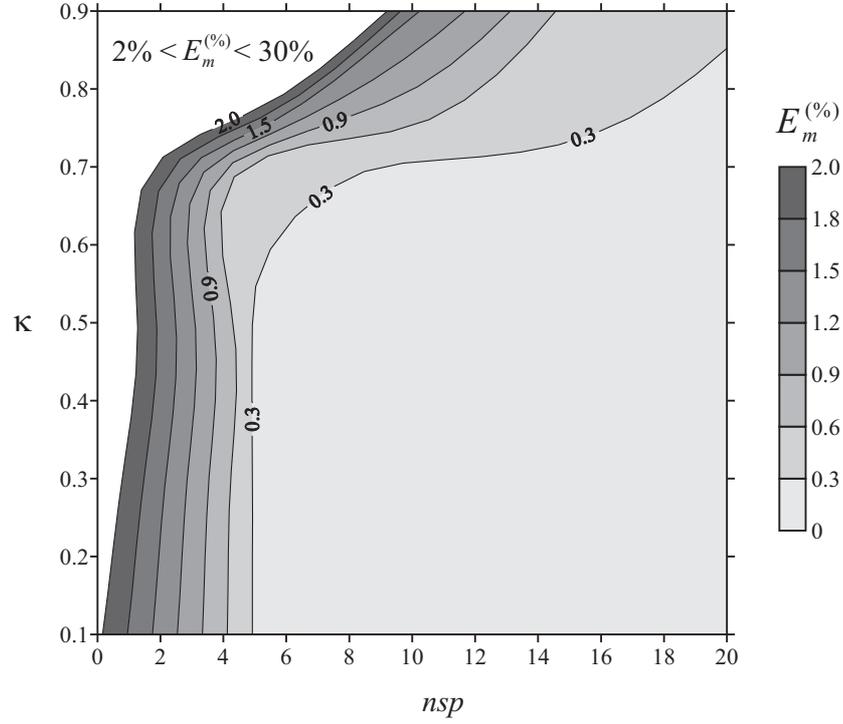


FIG. 1.28: Pourcentage de l'énergie mécanique résiduelle ($E_m^{(\%)}$) non absorbée à l'instant $t = 5.5s$ par la condition de radiation PML dans le milieu hétérogène spécifié dans le tableau 1.3, en fonction de l'épaisseur de la couche d'absorption (nsp , Figure 1.21) et du paramètre d'amortissement κ (équation 1.138). Le schéma numérique utilisé est d'ordre (2, 4).

De la même façon que je l'ai fait dans le cas homogène, il est possible d'analyser l'évolution énergétique du système à mesure que les ondes sont amorties par la condition de radiation PML (Figure 1.25). Pourtant, ayant comme but l'optimisation de la performance des conditions d'absorption, j'ai plutôt décidé de réaliser une exploration d'une telle performance en fonction des deux principaux paramètres impliqués : l'épaisseur de la couche PML (*i.e.* nsp) et le paramètre d'amortissement κ . Toujours pour le schéma d'ordre (2, 4), la Figure 1.28 présente ainsi les résultats issus de cette exploration en terme du pourcentage d'énergie mécanique non absorbée à l'instant $t = 5.5s$. Cet instant correspond approximativement au moment où la traînée de la dernière onde du demi-espace D1 atteint Γ (voir deux dernières instantanés de la Figure 1.27).

Dans ce cas, l'énergie totale mécanique E_m^{tot} injectée au système est égale

à $2.85J$. Il est intéressant de remarquer que cette valeur est environ 1.6 fois inférieure à celle déterminée dans l'espace homogène ($4.62J$), alors que l'excitation dans les deux cas est la même. Ce fait est une conséquence du contraste des propriétés élastiques entre le milieu hétérogène et le milieu homogène dont la raideur, reliée aux vitesses de propagation des ondes à travers les relations 1.79, est moins importante (comparer les tableaux 1.2 et 1.3). Du coup, l'application de la même fonction source sur les contraintes dans les deux modèles provoque des déformations et des accélérations (et vitesses) des particules plus importantes dans le cas homogène ayant une incidence directe dans l'énergie du système (voir équation 1.132 et celles qui suivent).

Bien que les pourcentages affichés sur la Figure 1.28 soient plusieurs ordre de magnitude plus grands que ceux déterminés dans l'espace homogène²⁶ (Figure 1.26), l'énergie résiduelle reste au dessous du 0.3% dans un rang de valeurs considérablement grand. Il faut noter l'insensibilité de l'absorption à des valeurs aussi différentes des deux paramètres, manifestée par l'ampleur de la bande grise plus claire. En même temps, on voit une chute assez rapide de $E_m^{(\%)}$ au dessous du seuil de 5 pour nsp , et au dessus du seuil de 0.7 pour κ . A partir de ce constat on peut donc conclure que des valeurs de $nsp \geq 5$ et de $0.1 \leq \kappa \leq 0.7$ devraient rendre une absorption optimale. Sans perdre de vue la performance informatique du code 3D, dans les simulations présentées par la suite, j'ai systématiquement pris $nsp = 10$ et $\kappa = 0.5$ comme le meilleur compromis entre la qualité de l'absorption et les ressources informatiques (mémoire et temps de calcul) demandées par la technique PML.

1.5.2.4 Test d'Absorption : Sismogrammes

L'information rapportée dans les Figures 1.26 et 1.28 ne permet pas de visualiser l'évolution de l'absorption au cours du temps. Ce point est particulièrement important car les sismogrammes, matière première des sismologues, sont l'histoire temporelle du mouvement du milieu. Pour cette raison, dans les prochains paragraphes, je présente les résultats de deux tests où des sismogrammes ont été calculés près de la couche d'absorption. Dans le premier test, la source est placée à l'intérieur du milieu homogène considéré précédemment dans l'analyse énergétique (tableau 1.2). Dans le deuxième, elle se trouve dans un milieu hétérogène à trois couches (tableau 1.4). Les dimensions des modèles physiques ainsi que la disposition de la source par rapport aux capteurs dans les milieux sont exactement les même dans les deux tests

²⁶Les valeurs à l'intérieur de la bande grise plus claire (*i.e.* celles entre 0% et 0.3%) se trouvent, sans exception, dans le voisinage de $0.26 \pm 0.01\%$.

(Figure 1.29). En fait, la seule chose qui change entre eux est la structure de vitesse.

La Figure 1.29 montre la géométrie du problème. Le centre de la source, toujours isotrope, se trouve au milieu du modèle physique à une distance de 2km de la ligne de capteurs. Cette ligne, de 5km de longueur, possède 51 capteurs équidistants disposés verticalement, dont celui central est contenu dans le plan $z = z_0$. La distance la plus courte entre les capteurs et la couche PML est de 1km dans la direction x . Dans le cas du milieu hétérogène, la source est placée au centre de la couche C2 (tableau 1.4).

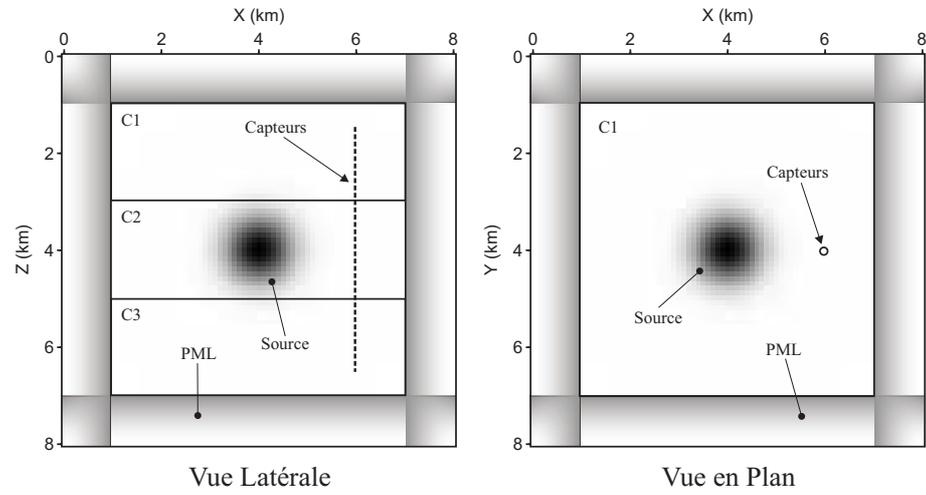


FIG. 1.29: Vue latérale (gauche) et vue en plan (droite) du modèle hétérogène à trois couches (C1, C2 et C3). Placée au centre, une source isotrope dont le support spatial est donné par une fonction gaussienne normalisée par rapport au sommet (dégradé circulaire en gris). Le modèle est enveloppé par la couche d'absorption PML.

Pour estimer la performance des conditions de radiation PML à partir des sismogrammes obtenus dans les 51 capteurs, j'ai tout simplement soustrait les signaux calculés dans les mêmes points d'observation mais dans un espace physique infini²⁷. Autrement dit, si S_{pml} représente les sismogrammes obtenus dans la ligne de capteurs en présence de la couche PML (Figure 1.29), et S_{inf} représente les sismogrammes obtenus dans les mêmes endroits mais dans un milieu infini (*i.e.* sans conditions de radiation), alors j'ai évalué

²⁷C'est-à-dire, dans un modèle où la frontière Γ est tellement loin que les éventuelles réflexions parasites dans la couche PML n'ont pas le temps d'atteindre les capteurs dans la durée de la simulation.

l'absorption au cours du temps à travers des sismogrammes résiduels, S_{res} , définis comme

$$S_{res} = \xi (S_{pml} - S_{inf}) \quad (1.139)$$

où ξ n'est qu'un facteur d'amplification qui permettra d'estimer le pourcentage d'erreur associé à l'énergie sismique non absorbée. Afin d'avoir un autre repère de comparaison pour les deux tests, j'ai aussi calculé des sismogrammes dans la configuration finie de la Figure 1.29 pour $\alpha(x, y, z) = 0$, c'est-à-dire sans amortissement (équation 1.122).

En ce qui concerne le premier test, la Figure 1.30 présente ainsi les sismogrammes calculés sans amortissement dans le milieu homogène (tableau 1.2), nommés aussi dorénavant « sismogrammes sans PML ». Juste après le passage de l'onde P directe, environ $2s$ après l'initiation de la source, une multitude d'ondes réfléchies dans la limite extérieure du modèle numérique arrive aux capteurs. Ces ondes sont polarisées de façon incohérente et voyagent dans tous les sens. Une preuve est le signal aussi important dans la composante v_y où nul mouvement devrait être enregistré. L'amplitude des ondes parasites est du même ordre que celle de l'onde directe (même des fois supérieure, voir composante v_z à l'instant $t = 2s$, par exemple). En l'absence des conditions de radiation dans les limites extérieures du modèle physique, l'énergie sismique reste piégée indéfiniment à l'intérieur de lui même.

Si l'on applique les conditions d'absorption PML avec les paramètres optimaux déterminés dans la section précédente, c'est-à-dire avec $nsp = 10$ et $\kappa = 0.5$, les sismogrammes résultants sont montrés sur la Figure 1.31. Ces signaux parlent d'eux-mêmes. A l'échelle de la figure, qui est d'ailleurs la même que celle de la Figure 1.30, on ne distingue que l'onde P directe dans les composantes où elle induit un mouvement (*i.e.* dans les composantes v_x et v_z). Aucun signal n'est enregistré, ni dans la composante v_y le long de toute la ligne de capteurs, ni dans le capteur central de la composante verticale v_z . Il ne faut pas perdre de vue que les capteurs qui se trouvent vers le début et vers la fin de la ligne sont plutôt sujets à la condition d'absorption PML des arêtes du modèle numérique (régions bleus, Figure 1.21), alors que les capteurs proches du centre sont principalement sujets à la condition d'absorption PML des faces du modèle numérique (régions jaunes, Figure 1.21). Comme je l'ai déjà montré antérieurement, ces conditions sont différentes et pourtant les résultats semblent ne pas en dépendre. L'absorption semble être aussi efficace partout.

Pour quantifier jusqu'à quel point l'absorption est efficace, la Figure 1.32 montre les sismogrammes résiduels avec un facteur d'amplification $\xi = 100$ (équation 1.139). Leur amplitude est nettement inférieure à un pour cent

Sismogrammes sans PML cas Homogène.

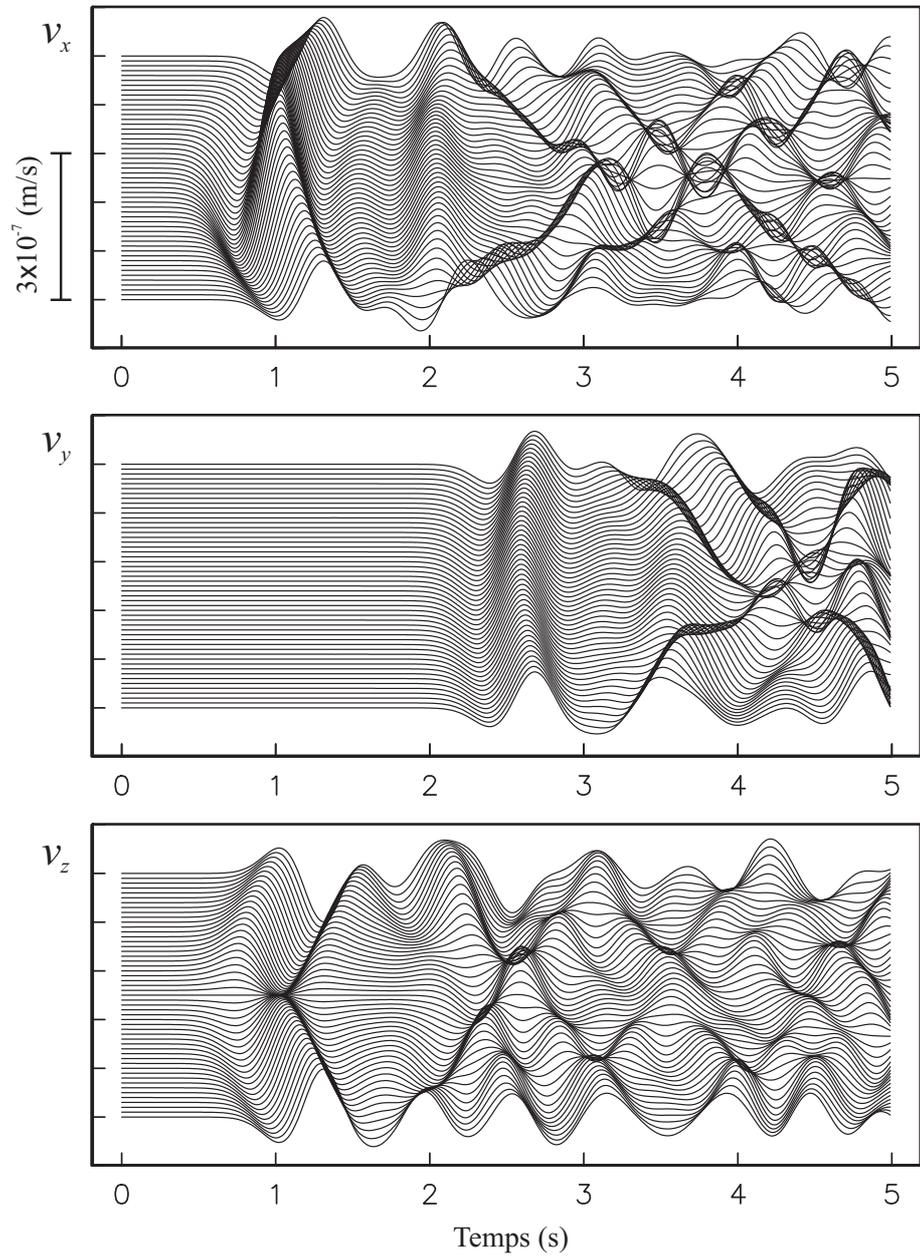


FIG. 1.30: Sismogrammes calculés dans les 51 capteurs de la Figure 1.29 à l'intérieur d'un espace homogène (tableau 1.2) sans l'application des conditions d'absorption PML. Composantes du champ de vitesse v_x , v_y et v_z .

Sismogrammes avec PML cas Homogène.

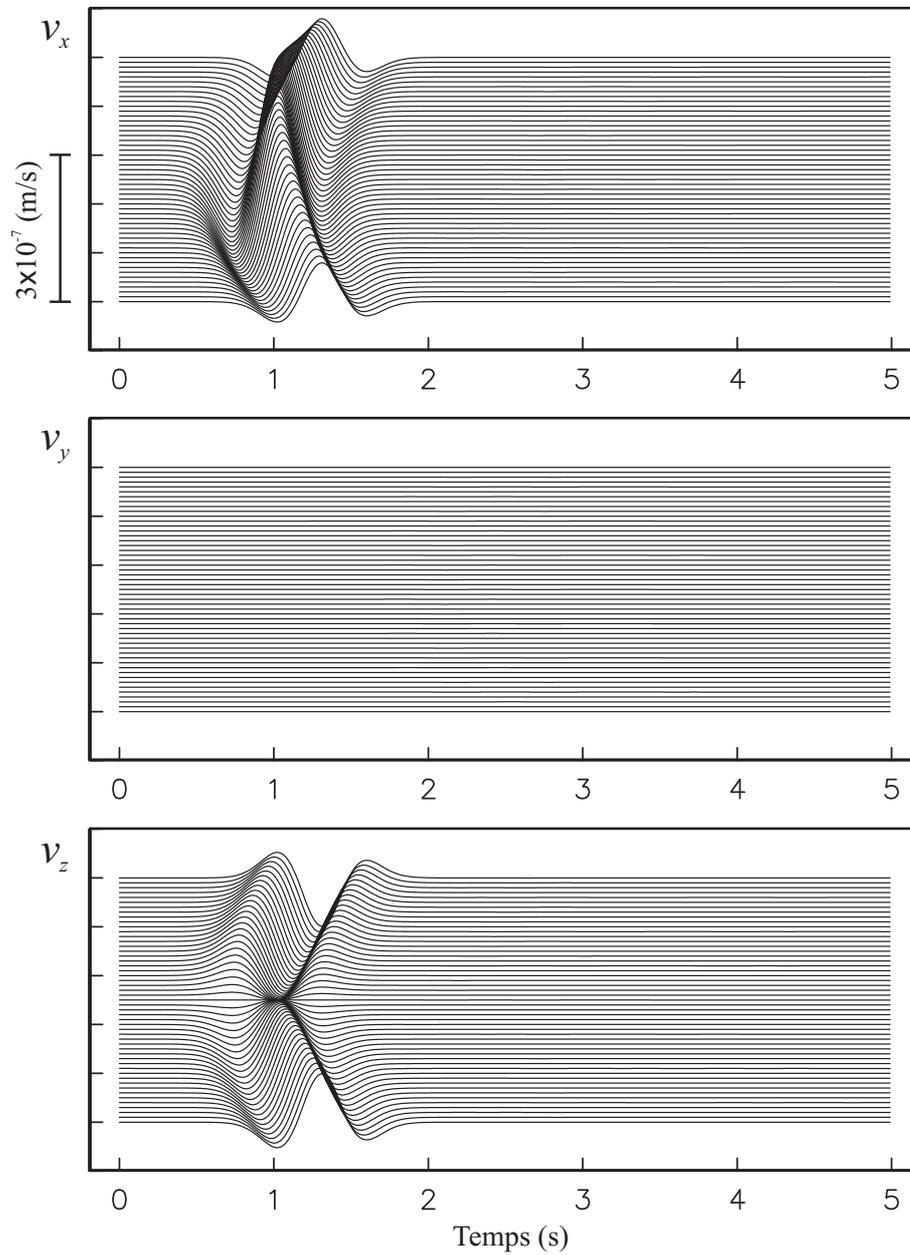


FIG. 1.31: Sismogrammes calculés dans les 51 capteurs de la Figure 1.29 à l'intérieur d'un espace homogène (tableau 1.2) avec l'application des conditions d'absorption PML. Composantes du champ de vitesse v_x , v_y et v_z .

Sismogrammes Résiduels Amplifiés cas Homogène.

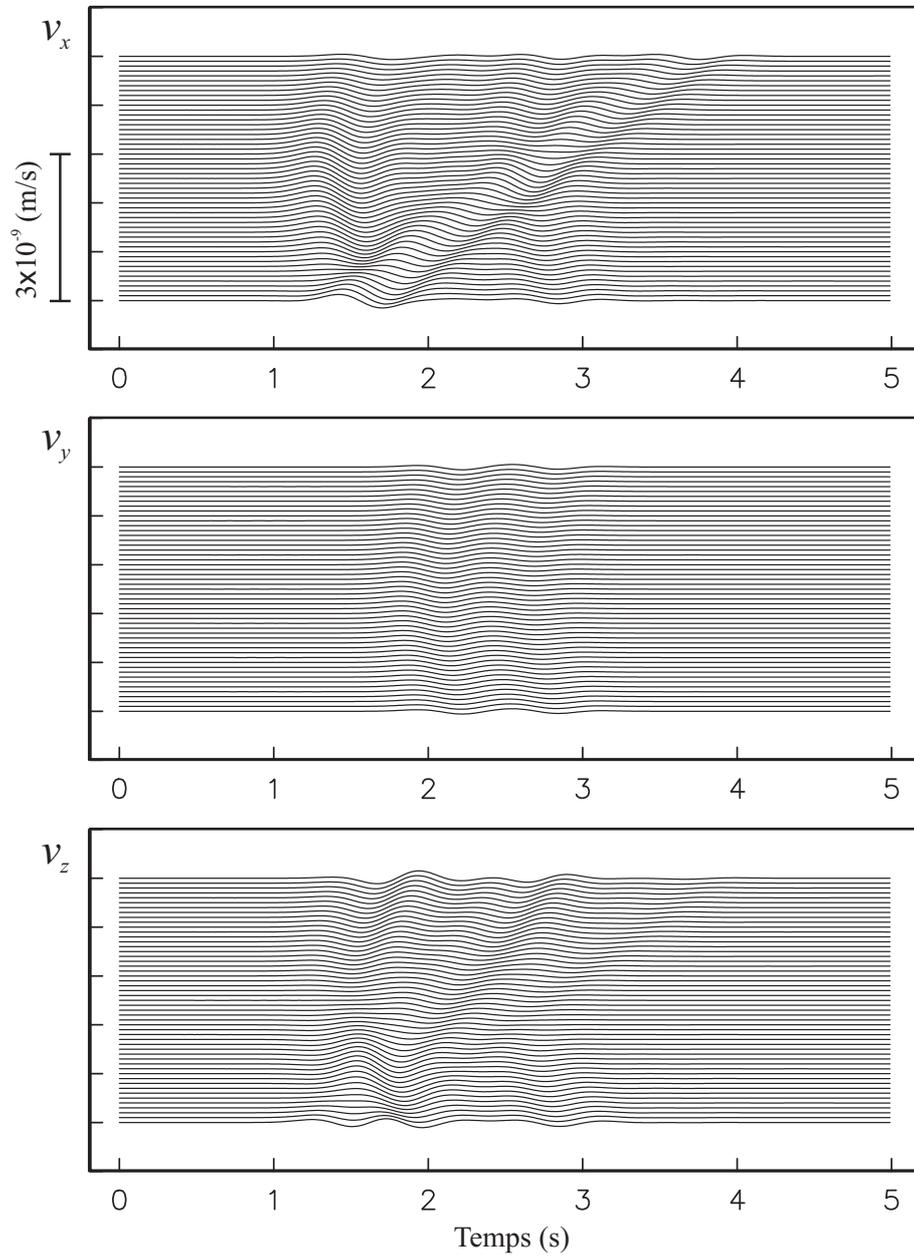


FIG. 1.32: Sismogrammes résiduels calculés avec $\xi = 100$ (équation 1.139) dans les 51 capteurs de la Figure 1.29 à l'intérieur d'un espace homogène (tableau 1.2). Composantes du champ de vitesse v_x , v_y et v_z .

de l'amplitude de l'onde directe (figure précédente), globalement autour de 0.2% (voir par exemple l'onde se propageant du bas vers le haut entre 1s et 4s dans la composante v_x). Bien qu'il reste très acceptable, ce pourcentage est supérieur à celui déterminé auparavant pour $nsp = 10$ via l'analyse énergétique (Figure 1.26).

Respectant la même démarche suivie dans le cas homogène, les Figures 1.33, 1.34 et 1.35 présentent les résultats obtenus dans le deuxième test où l'on tient compte d'un *milieu hétérogène* constitué de trois couches (tableau 1.4). Dans l'ordre d'apparition, les trois figures montrent donc les sismogrammes sans PML, les sismogrammes avec PML, et les sismogrammes résiduels avec le même facteur d'amplification que dans le premier test $\xi = 100$.

A première vue, on remarque, dans les Figures 1.33 et 1.34, une croissance de l'amplitude des ondes associée aux propriétés élastique des trois couches C1, C2 et C3. Le changement de pente des alignements des arrivées révèle aussi ces variations. Dans ce modèle multi-couches, le nombre de phases potentiellement capables d'exister est plus nombreux que dans tous les cas précédents. A partir d'une seule onde directe excitée (onde P sphérique), des ondes de volume P et S réfléchies et réfractées dans les trois couches, des ondes coniques dans la couche C2, ainsi que des réverbération d'ondes sphériques en C2 à la fois réfractées vers C1 et C3, sont générées. Même des ondes superficielles de Rayleigh peuvent avoir lieu. Pour ceci la lecture des sismogrammes devient difficile.

Quasiment aucune trace n'est distinguée sur la Figure 1.34 grâce à l'application des conditions d'absorption. Même si globalement l'amplitude des sismogrammes résiduels est légèrement supérieure à celle correspondant au cas homogène, elle reste toujours proche de 0.5% de l'amplitude du signal physique (comparer la composante v_z de la Figure 1.35 avec la même composante de la Figure 1.34). A partir de ces résultats on peut en conclure que l'absorption de l'implémentation des conditions de radiation PML en 3D dans la grille partiellement en quinconce donne des résultats très satisfaisants.

Couche	Épaisseur (m)	$v_s(m/s)$	$v_p(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$
C1	∞	2000	3464	1878
C2	2000	2500	4330	2156
C3	∞	3500	6000	2690

TAB. 1.4: Structure de vitesses d'un milieu hétérogène à trois couches. v_p et v_s sont, respectivement, la vitesse de propagation des ondes P et des ondes S , et ρ est la masse volumique.

Sismogrammes sans PML cas Hétérogène.

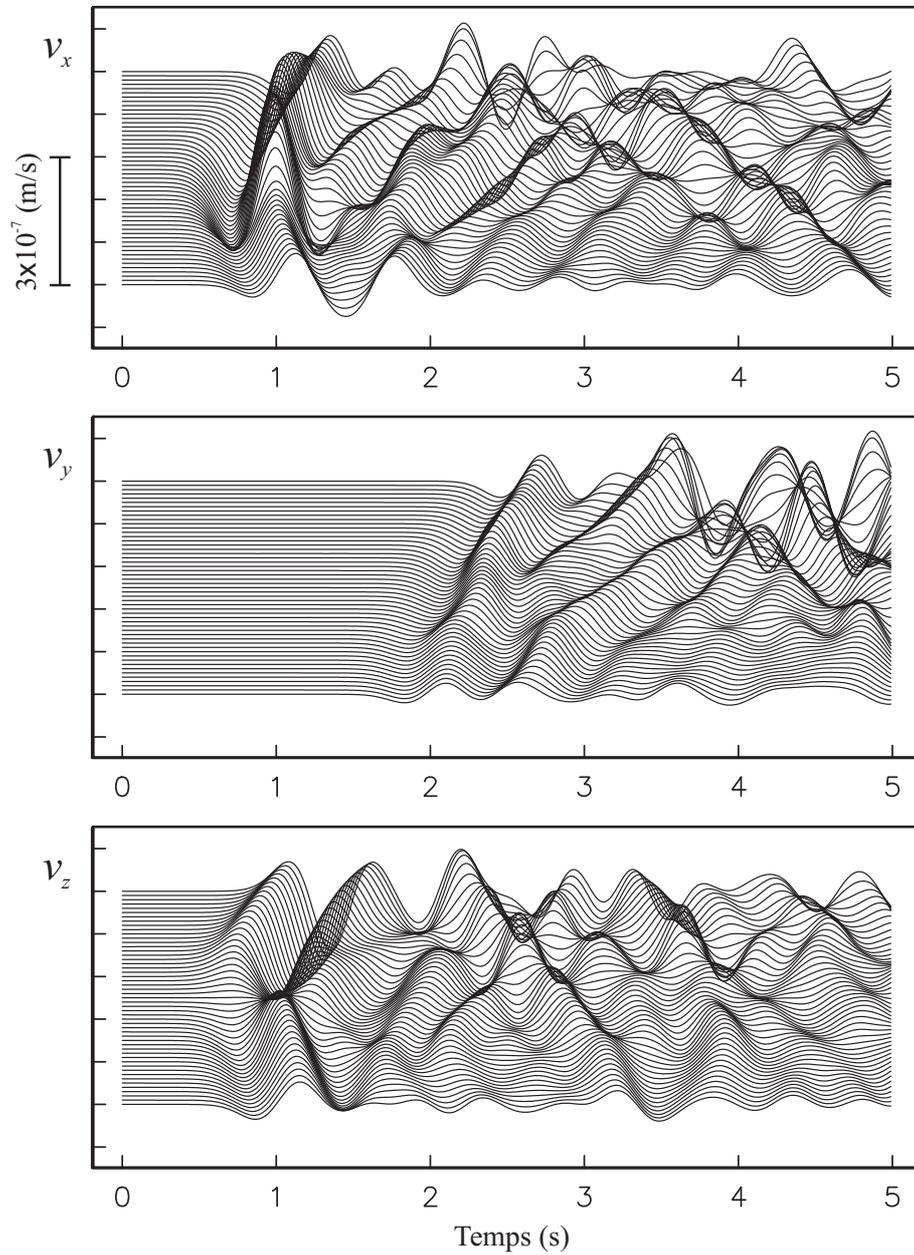


FIG. 1.33: Sismogrammes calculés dans les 51 capteurs de la Figure 1.29 à l'intérieur d'un espace hétérogène (tableau 1.4) sans l'application des conditions d'absorption PML. Composantes du champ de vitesse v_x , v_y et v_z .

Sismogrammes avec PML cas Hétérogène.

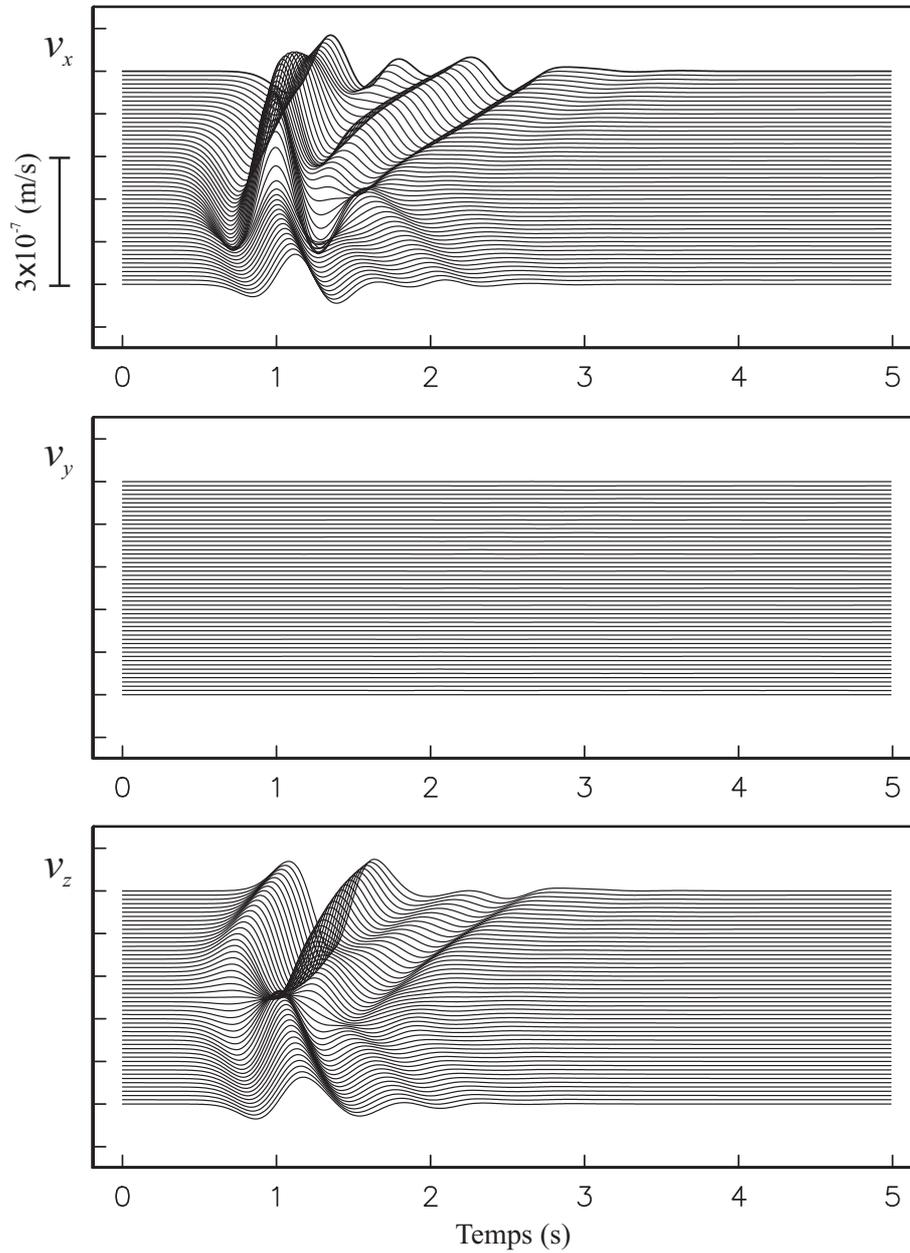


FIG. 1.34: Sismogrammes calculés dans les 51 capteurs de la Figure 1.29 à l'intérieur d'un espace hétérogène (tableau 1.4) avec l'application des conditions d'absorption PML. Composantes du champ de vitesse v_x , v_y et v_z .

Sismogrammes Résiduels Amplifiés cas Hétérogène.

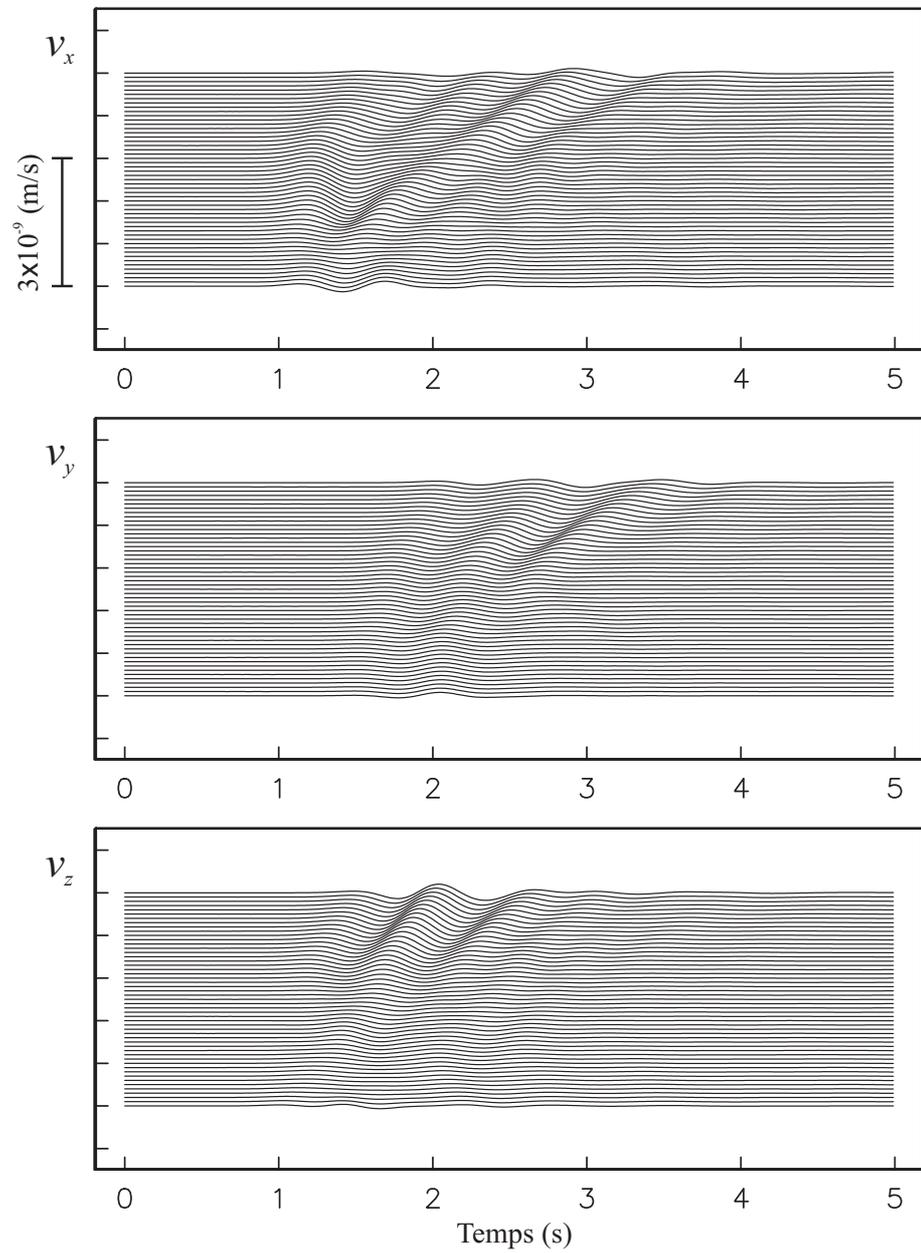


FIG. 1.35: Sismogrammes résiduels calculés avec $\xi = 100$ (équation 1.139) dans les 51 capteurs de la Figure 1.29 à l'intérieur d'un espace hétérogène (tableau 1.4). Composantes du champ de vitesse v_x , v_y et v_z .

1.6 Conclusions

La précision des schémas en DF est contrôlée par $S = c\Delta t/\Delta x$, le *numéro de Courant*, et dépend principalement de l'ordre des opérateurs spatiaux. Plus l'ordre est élevé, plus le schéma est précis (*i.e.* plus la dispersion numérique est faible). La précision d'un schéma peut être exprimée en termes du *paramètre de dispersion* $N_\lambda = \lambda/\Delta x$, c'est-à-dire en termes du nombre de points de la grille par longueur d'onde minimale. Plus la méthode est précise, moins de points sont nécessaires pour discrétiser correctement un signal. Dans les cas multi-dimensionnels, la dispersion numérique dépend aussi de la direction de propagation des ondes à travers la grille. Ce phénomène est connu comme l'*anisotropie* du schéma et est déterminé par le *stencil* employé par la méthode (*i.e.* par la discrétisation spatio-temporelle des équations). Le numéro de Courant est limité vers le haut par le *seuil de stabilité* de la méthode. Au-delà de ce seuil les solutions ne sont plus bornées et subissent une croissance exponentiellement au cours du temps. En général, le seuil de stabilité est plus restrictif dans les schémas d'ordre élevé. Globalement, un bon schéma numérique est celui qui à la fois minimise la dispersion (et l'anisotropie) et relâche le seuil de stabilité. Ceci se traduit par une bonne précision à plus hautes fréquences.

La méthode en DF adoptée dans ce travail discrétise un système d'équations hyperboliques d'ordre un formulé en vitesse-contrainte sur une *grille partiellement en quinconce* (GPQ). Cette grille place indépendamment le vecteur de vitesse et le tenseur des contraintes en deux points de l'espace séparés d'un demi-incrément de la grille dans les trois directions cartésiennes ainsi que dans le temps. Les opérateurs différentiels sont calculés à partir de la combinaison linéaire de quatre opérateurs appliqués dans les quatre directions bissectrices des axes cartésiens. L'*analyse de von Neumann* pour le schéma partiellement en quinconce à l'ordre (2,2) en 3D indique que le seuil de stabilité dans ce cas est donné par le *pas magique* de discrétisation $\Delta x = v_p \Delta t$ (*i.e.* même valeur que pour l'équation d'onde unidimensionnelle). Dans le cas 3D, une analyse similaire à l'ordre (2,4) montre que, au seuil de stabilité, $S = 0.86$. Comparée à la valeur correspondante pour la grille en quinconce standard introduite par Madariaga (1976) (GQS), elle est 1.7 fois plus élevée. Par ailleurs elle dépend uniquement des pas de discrétisation Δx et Δt , alors que dans la GQS elle décroît aussi d'un facteur $1/\sqrt{m}$ avec le nombre des dimensions m du problème.

Concernant la *dispersion du schéma*, les directions d'*erreur de vitesse de phase* maximales coïncident avec les directions de dérivation diagonales des opérateurs spatiaux. Dans le cas bidimensionnel, tournés de 45° l'un

par rapport à l'autre, les diagrammes d'anisotropie des GPQ et GQS sont exactement les mêmes hormis un facteur d'échelle. Si l'incrément spatial de la grille partiellement en quinconce est celui de la grille standard divisé par $\sqrt{2}$ (*i.e.* la distance unitaire diagonale entre deux points de la grille 2D), alors ce facteur est égal à un. Dans le cas tridimensionnel, les diagrammes d'anisotropie de deux grilles ont une topologie très différente. Si l'incrément spatial de la grille partiellement en quinconce est celui de la grille standard divisé par $\sqrt{3}$ (*i.e.* la distance unitaire diagonale entre deux points de la grille 3D), alors l'erreur de vitesse de phase maximale dans la GPQ est d'environ 30% inférieure à celle de la méthode standard. Globalement, la GPQ est donc toujours moins précise que la GQS. Cependant, sa précision comparée à celle de la grille standard dépend du nombre de dimensions du problème, et s'en approche le plus si le nombre de dimensions est égal à trois. Par exemple, à l'ordre quatre dans l'espace, la GPQ nécessite un *paramètre de dispersion* $N_\lambda \gtrsim 7$ en 2D et $N_\lambda \gtrsim 6$ en 3D pour atteindre une bonne précision, alors que dans la GQS la condition suffisante devient $N_\lambda \gtrsim 5$ indépendamment de la dimension du problème.

Les conditions de frontière sur la *surface libre* en appliquant le formalisme hétérogène du *vacuum* dans la GPQ sont stables uniquement à l'ordre deux dans l'espace. Dans une surface libre plane alignée avec les axes de référence, les méthodes GPQ et GQS sont virtuellement équivalentes. Un échantillonnage d'environ $N_\lambda \geq 30$ suffit dans les deux cas pour atteindre une bonne précision. Dans le cas d'une interface plane inclinée par rapport aux axes de référence, l'approche du *vacuum* dans la grille partiellement en quinconce est considérablement plus précise que dans la grille en quinconce standard. Des bons résultats sont atteints avec la GPQ dans toutes les inclinaisons si $N_\lambda \geq 60$. Ces résultats suggèrent la nécessité d'implémenter des grilles irrégulières près de la surface libre et ou bien d'explorer l'adaptation de l'approche explicite des *images* afin d'améliorer la précision numérique.

Les *conditions de frontière mixtes* (*i.e.* de Cauchy) associées à la *rupture dynamique plane* ont été établies pour les cas des modes de déformation II (*in-plane*) et III (*anti-plane*), ainsi que pour le cas général de déformation « multi-modale » (*i.e.* fracture circulaire). Les approches en différences finies créées pour modéliser la propagation dynamique d'une faille ont été classées en deux groupes selon la manière où les conditions de frontière sont vérifiées sur la faille : les *approches par segment* et les *approches par élément*. Dans les approches par segment le traitement des conditions aux limites sépare le milieu en deux régions (*e.g.* à travers de nœuds disjoints), une de chaque côté de la faille. Le mouvement des particules dans chaque région est donnée par l'équation élastodynamique, résolue de façon indépendante dans chaque

région. L'interaction entre les deux régions se produit de telle sorte que les conditions de frontière, établies par la loi constitutive de frottement, soient vérifiées sur la faille. Autrement dit, dans les méthodes par segment, le schéma d'intégration change le long de la surface de rupture. En revanche, dans les approches par élément, le schéma d'intégration dans la zone de faille reste le même que dans le milieu de propagation, loin de la source. C'est-à-dire, les conditions aux limites appliquées dans les modèles de zone de faille n'ont pas besoin d'un traitement complexe. Au contraire, elles restent efficaces même dans le cas de failles de géométries compliquées ou bien des milieux multi-fracturés. Les approches développées dans les chapitres 3 et 4 font partie de cette famille de modèles.

La mise au point des *conditions aux limites de radiation* « *Perfectly Matched Layer* » (PML) dans la grille partiellement en quinconce 3D a été réalisée (aussi en 2D, voir chapitre 3). L'implémentation de ces conditions est telle que les champs sont uniquement découplés à l'intérieur de la couche extérieur d'absorption, raison pour laquelle une économie de mémoire importante a été faite par rapport à l'implémentation directe avec découplage partout. Des expressions concrètes pour l'énergie mécanique dans le GPQ ont été déduites et utilisées pour l'évaluation de l'absorption des conditions PML. Les tests d'absorption en fonction de l'épaisseur de la couche dans un espace homogène ont révélés une croissance exponentielle de l'absorption avec une telle épaisseur. Un bon compromis entre l'efficacité d'absorption et la mémoire nécessaire a été déterminé dans un espace hétérogène : dix point de la grille d'épaisseur. Des tests à partir de sismogrammes résiduels à l'intérieur d'un milieu multi-couches ont montré que l'amplitude du signal réfléchi par la couche PML est inférieure à 1% de l'amplitude du signal incident.

Deuxième partie

Rupture Dynamique

Chapitre 2

Mécanique de la Rupture Dynamique

Sommaire

2.1	Dynamique Macroscopique	137
2.2	Frottement	141
2.2.1	Initiation	141
2.2.2	Phase Instable	142
2.3	Elastodynamique Locale	143
2.3.1	Champs Singuliers	145
2.3.2	Forces de Cohésion	148
2.3.3	Bilan Énergétique	152
2.4	Propagation de la Rupture	155
2.4.1	Critère de Rupture	155
2.4.2	Rupture Spontanée	159
2.5	Conclusions	168

L'UN des premiers constats que l'on fait lors de l'inspection d'une faille après l'occurrence d'un séisme est la grande déformation dans son voisinage. Si l'on quantifie la déformation entre deux points se trouvant de part et d'autres de la surface de rupture, on constatera qu'une telle mesure est loin d'être celle d'un milieu linéairement élastique soumis aux variations des contraintes associés à la rupture. Comme on a vu dans la section 1.5.1.2, cette relaxation des contraintes est une conséquence de la rupture du milieu donnant lieu à la discontinuité du champ de déplacement sur la faille. Pourtant, à l'intérieur d'une zone enveloppant la surface de rupture, on constatera aussi la présence d'un réseau de micro fractures ainsi que des éventuelles fluages de la roche. Dans cette zone d'endommagement, même si les déplacements sont continus par morceaux, ils décrivent souvent une déformation irréversible (*i.e.* plastique) (*e.g.*, Reches & Lockner, 1994, Moore & Lockner, 1995, Dalguer et al., 2003a,b, Andrews, 2005). Globalement, tous ces phénomènes font que le milieu dans le voisinage des failles ne se comporte pas comme le stipule la loi de Hooke (équation 1.71). Autrement dit, la détermination du mouvement (*i.e.* de la déformation) près de la faille à partir de l'état des contraintes dévient un problème de comportement non-linéaire. En revanche, le mouvement induit par la rupture (soit permanent soit transitoire) en dehors de cette zone est principalement gouverné par la relation $\rho \ddot{u}_i = \tau_{ij,j}$ (équation 1.78) entre l'accélération et le gradient des contraintes, ainsi que par la relation linéaire entre les déformations et les contraintes caractérisant un matériau élastique.

Négligeons l'effet inélastique de la zone d'endommagement près de la faille et réduisons la zone de rupture à une surface Σ infiniment fine où les tractions sont gouvernées par une loi constitutive de frottement. La réciprocity entre deux champs de déplacement u_i et w_i (solutions de l'équation du mouvement) donnée par le théorème de Betti (Aki & Richards, 2002, équation 2.34) permet d'établir une relation entre un de ces champs, par exemple le champ u_i , et le vecteur des tractions T_i appliqué sur cette surface Σ . En prenant le champs $w_i = G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \delta)$, où G_{in} sont les i composantes du déplacement dans le point \mathbf{x} de l'espace à l'instant t dues à l'application d'une force impulsive spatio-temporelle de direction n dans le point $\boldsymbol{\xi}$ de l'espace à l'instant δ (*i.e.* la fonction de Green) alors, en négligeant les forces de volume, on obtient

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t dt \iint_{\Sigma} G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \delta) T_n(\boldsymbol{\xi}, \delta) d\Sigma. \quad (2.1)$$

Le champ de déplacement u_i peut également être exprimer suivant la fonction spatio-temporelle du glissement sur la surface Σ : ce sont les représentations cinématiques de la source sismique. Cependant, l'expression 2.1 a l'avantage de faire le lien entre u_i et les tractions T_i . C'est-à-dire que, grâce à l'équation intégrale 2.1, on a une description physique (dynamique) du mouvement du milieu. Or, si l'on considère un milieu homogène infini, des expressions analytiques exactes existent pour la fonction de Green. Par conséquence, les tractions ainsi que les déplacements peuvent être connus les uns en fonction des autres dans des points appartenant, par exemple, à la surface Σ . Si la surface Σ représente une faille, alors on peut calculer les déplacements (ou le glissement) sur la faille associés à une relaxation de contraintes $\Delta\tau$ ou vice versa. Bien que l'équation intégrale 2.1 (ou des variations d'elle-même) présente des hypersingularités lorsque $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{x}$ et $\delta \rightarrow t$, plusieurs méthodes de régularisation menant à l'obtention de noyaux non-singuliers ont permis de la résoudre pour simuler la rupture dynamique des séismes (*e.g.*, Burridge, 1969, Das & Aki, 1977b, Andrews, 1985, Das & Kostrov, 1987, Cochard & Madariaga, 1994, Fukuyama & Madariaga, 1995, Tada & Yamashita, 1997, Kame & Yamashita, 1999, Aochi et al., 2000b, Lapusta et al., 2000).

L'hypothèse la plus fondamentale de la modélisation dynamique des séismes est que les tractions et le glissement (ou sa dérivée) à l'intérieur de la zone rompue de la faille (région Σ_1 , Figure 1.19 page 92) sont reliés non pas par le théorème de représentation 2.1 (*i.e.* l'équation du mouvement) mais par une loi constitutive de frottement. Ceci signifie que, pendant la rupture, l'évolution des tractions sur le plan de faille dans Σ_1 , mais aussi partout ailleurs (Figure 1.19), dépend directement de cette loi de frottement : les champs

évoluent autour de Σ_1 en tenant compte de la rhéologie linéaire du milieu et du principe inertiel. Par conséquent, l'histoire de la rupture est déterminée principalement par trois paramètres physiques : *l'état de contraintes initiales autour de la faille, les valeurs des paramètres constitutifs de la loi de frottement sur la surface cassée et les propriétés physiques du milieu en dehors de cette surface.*

2.1 Dynamique Macroscopique

Un séisme n'est que l'instabilité d'un système physique le long d'une zone de faiblesse (*i.e.* une faille géologique). Lorsque le frottement (*i.e.* les tractions T_i) sur le plan de faille éprouve des variations pendant le glissement, une instabilité peut se produire. Durant cette instabilité, une relaxation rapide des contraintes a donc lieu accompagnée d'un glissement soudain important. Après la relaxation, une période de stabilité existe pendant laquelle la faille subit un nouveau chargement de contraintes avant d'expérimenter une nouvelle instabilité. Ce mécanisme cyclique, où le frottement joue un rôle fondamental, est connu sous le nom de « *stick slip* ». La condition d'instabilité d'une faille peut être facilement illustrée si l'on considère l'exemple dessiné à gauche sur la Figure 2.1. Un bloc, posé sur la surface Σ , est tiré par une force F au travers d'un ressort de raideur K . La constante K représente les propriétés élastiques du milieu où se trouve la faille et F la force du frottement donnée par les tractions sur Σ . La force normale N est égale au poids du bloc. L'évolution de F en fonction du déplacement du bloc est représentée à droite de la Figure 2.1. Si cette évolution est telle que sa variation par rapport au déplacement (*i.e.* glissement, S) est supérieure à celle de la force opposée par le ressort (ligne droite de pente K), c'est-à-dire si

$$\left| \frac{\partial F}{\partial S} \right| > K, \quad (2.2)$$

alors une instabilité aura lieu puisque, étant différent de zéro, le bilan de forces provoque une accélération du bloc (épisode entre les points A et B). Le bloc retrouvera son état statique lorsqu'une accélération de signe opposée sera présente (épisode entre B et C). Par conséquent, la condition d'instabilité du système 2.2 dépend à la fois du frottement sur la surface Σ et des propriétés élastiques de l'environnement (*i.e.* le ressort) qu'exerce une charge sur le bloc (*i.e.* sur la faille). En réalité, le frottement F sur Σ est fortement relié à N à travers un coefficient μ dit de friction. Or, ce coefficient dépend à la fois de plusieurs variables comme le temps, le glissement, sa dérivée temporelle ou bien des variables d'état (section 2.2). Le frottement évolue

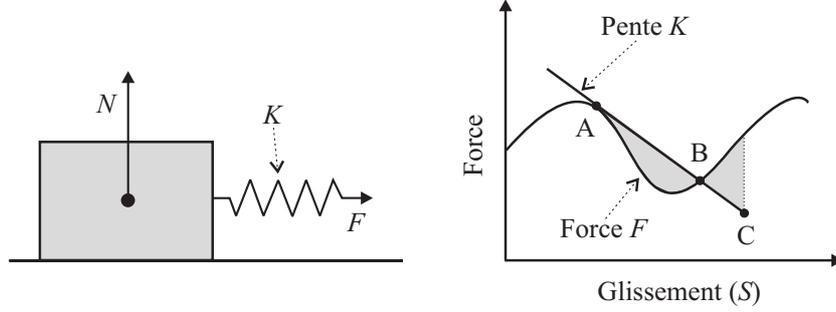


FIG. 2.1: Conditions d'instabilité dynamique d'un bloc soumis à la force d'un ressort de raideur K . Phase d'accélération du bloc entre les points A et B (voir équation 2.2). Modifié de (Scholz, 2002).

donc sur les failles permettant aux séismes de se produire dans des conditions divers.

Bien que l'évolution des tractions sur la faille pendant un séisme peut être très complexe, certains effets macroscopiques peuvent être décrits de la manière suivante. Prenons une faille circulaire statique similaire à celle décrite par la surface Σ_1 montrée sur la Figure 1.20 de la section 1.5.1.2 (page 92). Avant la rupture, la faille est soumise à une charge tectonique $\tau_{xz} = \tau_0$. A l'instant t initial, toute la faille se rompt brutalement en éprouvant une chute de la contrainte instantanée $\Delta\tau = \tau_0 - \tau_s$, où τ_s est le niveau de frottement dynamique. Selon Brune (1970), puisque la variation des contraintes près du centre de la faille $\Delta\tau = \Delta\tau_{xz} = \mu (\partial u_x / \partial z)$, alors le déplacement dans un point localisé sur l'axe z juste à côté de Σ_1 est donné par $u_x = (\Delta\tau / \mu) \beta t$. Dans un milieu homogène infini, cette valeur représente le glissement S sur la faille divisé par deux. Cette expression du déplacement, dérivée par rapport au temps, devient le champ de vitesse

$$v_x = \frac{\Delta\tau}{\mu} \beta \quad (2.3)$$

qui est constant. Ceci veut dire que le mouvement initial près du centre de la faille est celui d'une faille infiniment grande. Au bout d'un moment, les effets des bords de la faille (pulses diffractés d'arrêt) se font sentir au centre et la vitesse est brutalement diminuée. Considérons une faille circulaire de rayon égal 2.5km dans un milieu poissonien (*i.e.* où $\alpha = \sqrt{3}\beta$) avec une masse volumique $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ et une vitesse β de propagation des ondes S égale à 10^3m/s . Cela implique que les constantes de Lamé $\lambda = \mu = 10^9\text{Pa}$. A l'instant $t = 0$, la faille éprouve une chute des contraintes $\Delta\tau = 10^5\text{Pa}$ (pour

tout temps positif). La Figure 2.2b montre la vitesse du glissement, \dot{S} , dans le point central de la faille calculée numériquement avec un des modèles de zone de faille en différences finies décrits dans le chapitre 4 (avec une discrétisation spatiale et temporelle, respectivement, de $\Delta x = 50m$ et $\Delta t = 0.02s$). Aucune amortissement ou filtrage a été réalisé dans la simulation. Comme prédit par l'équation 2.3 une fois multipliée par deux, \dot{S} est égale à $0.2m/s$ durant les premiers $\sim 1.4s$. Ensuite, le premier pulse d'arrêt correspondant à l'onde P diffractée sur les bords de la faille, provoque une première chute de vitesse. Approximativement $2.5s$ après l'initiation, le pulse d'arrêt correspondant à l'onde S arrive pour arrêter complètement le mouvement. Ces deux arrivées peuvent être aussi identifiées dans la fonction glissement montrée sur la même figure (coté gauche) comme des changements de pente de la courbe. Un rebond élastique provoque une inversion du sens du glissement (*i.e.* $\dot{S} < 0$) pour retrouver au fur et à mesure un état final d'équilibre statique, environ $12s$ après l'initiation de la rupture.

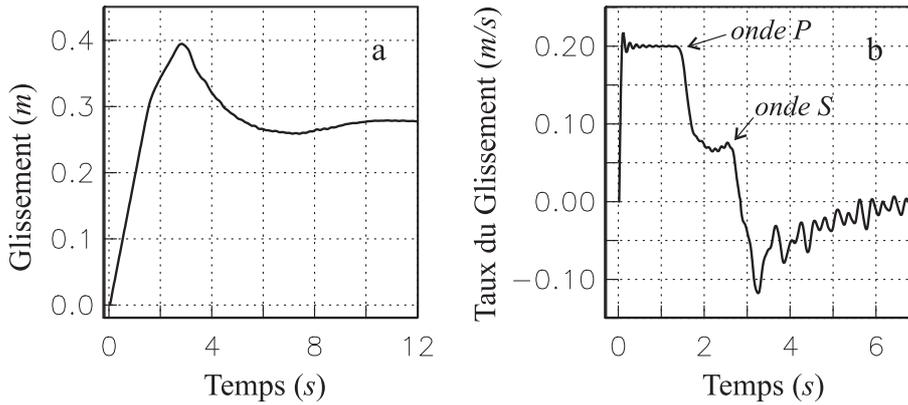


FIG. 2.2: Solution numérique (a) pour le glissement S , et (b) pour la vitesse du glissement \dot{S} , dans le point central d'une faille circulaire statique de rayon égal à $2.5km$ après une chute des contraintes brutale $\Delta\tau = 10^5 Pa$ à l'instant initial (voir texte).

La solutions statique $S(x, y)$ exacte à ce problème a été construite par Eshelby (1957). Elle permet de connaître le glissement final sur le plan de faille en fonction de la position (x, y) . Alors, pour un rayon r de la faille, nous avons

$$S(x, y) = \frac{24}{7\pi} \frac{\Delta\tau}{\mu} \left[r^2 - (x^2 + y^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

Une fois substituées les valeurs choisies dans notre exemple, on retrouve

une valeur théorique pour le glissement final au centre de la faille (*i.e.* pour $x = y = 0$) de $S = 0.27m$ qui est exactement la même obtenue numériquement à l'instant $t = 12s$. Il est important de souligner que, si l'inversion du sens du mouvement sur la faille avait été interdite en soudant la faille lorsque $\dot{S} = 0$ par exemple, c'est-à-dire si l'effet du rebond élastique avait été bloqué, alors notre solution statique aurait été surestimée d'environ 40% avec un glissement final de $\sim 0.4m$.

En réalité, la rupture d'une faille n'est pas instantanée. Bien au contraire, elle se propage avec une vitesse v_r qui dépend de plusieurs facteurs physiques, comme les contraintes initiales τ_0 et la loi de frottement (voir section 2.4). Une conséquence générale de cette propagation est la diminution de \dot{S} sur le plan de faille par rapport au cas précédent où la rupture ne se propage pas. D'après Ida & Aki (1972), si la rupture est *supersonique*¹ (*i.e.* si $v_r > \beta$), la vitesse du glissement \dot{S} est aussi constante mais inférieure à celle d'une faille statique (équation 2.3) d'un facteur égal à $\sqrt{1 - (\beta/v_r)^2}$. En revanche, si $v_r < \beta$, c'est-à-dire si la rupture est *subsonique*², alors \dot{S} n'est pas constante. Autrement dit, le glissement n'est plus décrit par une rampe linéaire (Ida & Aki, 1972, équation 57). Cependant, le comportement macroscopique du mouvement près de la faille peut être décrit tenant compte de la solution pour une faille statique (équation 2.3) multipliée par un facteur de décélération proche de 2 (Kanamori, 1994). De cette façon, la vitesse de particule $\|\mathbf{v}\|$ dans les alentours de la faille peut être approximée par

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{\beta}{c\mu} \Delta\tau \quad (2.5)$$

où la valeur c est proche de deux. Ces résultats sont en accord avec des estimations théoriques du mouvement dans le champ proche produit par la propagation des ruptures circulaires à une vitesse donnée v_r (Richards, 1976, Madariaga, 1976). Globalement, ce que l'équation 2.5 nous dit est que le champs d'ondes radié par la source est directement relié à la variation des contraintes sur le plan de faille. Comme on le verra dans les prochaines sections, l'évolution locale de cette variation sur la surface joue un rôle fondamental dans la propagation de la rupture des séismes et, par conséquent, aussi dans le champ d'onde radié.

¹En anglais appelé rupture « *supershear* ».

²En anglais appelé rupture « *subshear* ».

2.2 Frottement

Jusqu'à la deuxième moitié du siècle dernier, les concepts de fragilité et de résistance des roches dominaient la compréhension de l'origine des séismes. La théorie de la formation des failles d'Anderson (1905), basée sur l'orientation des contraintes principales dans la croûte terrestre, manquait d'un caractère prédictif lorsque les séismes avaient lieu le long de zones préférentielles qui ne coïncidaient pas forcément avec les orientations du chargement des contraintes prédit par cette théorie. Les observations tectoniques réalisées sur le terrain révélaient que les séismes se produisaient rarement à l'intérieur de massifs rocheux intacts, fracturés donc par la création de nouvelles failles. En revanche, les séismes avaient lieu à l'intérieur de surfaces préexistantes où des épisodes brutaux de glissement se produisaient de façon cyclique. Après un séisme, une période de calme intersismique prévalait avant le prochain événement. C'est grâce à Brace & Byerlee (1966) que cet ensemble d'observations se structure et devient le mécanisme sismogénique, nommé mécanisme de « *stick-slip* ».

2.2.1 Initiation

Le mécanisme de *stick-slip* est basé sur le *critère de Coulomb* qui établit que le mouvement sur le plan de faille commence lorsque le rapport entre les contraintes cisailantes (τ) et normales (σ) à la faille est égal au coefficient de frottement statique μ_s . Cette condition n'est pas stationnaire puisque μ_s augmente doucement avec le temps de contact entre les deux parois de la faille (Dieterich, 1978, Aochi & Matsu'ura, 2002). Une fois vérifié le critère de Coulomb, la contrainte τ reste proportionnelle à la contrainte σ via un coefficient de frottement. Or, pendant l'initiation du glissement sur la faille, μ_s évolue vers une valeur dynamique inférieure μ_d . Si l'on suppose σ constant, ceci implique que τ évolue de la même façon. Cette situation, où la force de frottement chute avec μ , peut produire une instabilité du même type que celle décrite dans la section 2.1 (voir Figure 2.1), donnant lieu à une propagation rapide du glissement sur la faille. L'épisode juste avant l'instabilité, *i.e.* l'initiation lente du glissement³, est l'objet de grands débats. Contient-il de l'information concernant l'évolution future immédiate du séisme, notamment sa taille (Iio, 1992, Ellsworth & Beroza, 1995, Iio, 1995, Beroza & Ellsworth, 1996)? Puisque le frottement est l'ingrédient principal pendant cette phase initiale de la rupture, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude et la compréhension de son influence (*e.g.*, Dieterich, 1992, Campillo & Ionescu,

³En anglais cette phase est connu avec le nom de « *slow initial phase, SIP* ».

1997, Ionescu & Campillo, 1999, Ampuero & Vilotte, 2002, Voisin et al., 2002, Voisin, 2002).

2.2.2 Phase Instable

De la même façon que, pendant l'initiation de la rupture, l'évolution du frottement dans la phase instable joue aussi un rôle primordiale. Des nombreuses expériences de laboratoire ont permis de cerner le comportement du frottement durant le glissement entre deux blocs via une fracture. Les observations faites ont révélé qu'en présence d'un changement brusque de la vitesse de glissement, le frottement évolue vers un état stationnaire le long d'une distance caractéristique. En revanche, il est fondamentalement dépendant de la vitesse de glissement, une fois l'état stationnaire atteint (Scholz, 1998). Des lois constitutives de frottement ont été formulées afin d'expliquer ce constat. Aujourd'hui, la loi de frottement « *rate- and state-dependent* » est suffisante pour rendre compte de l'ensemble des observations (Dieterich, 1979, Ruina, 1983, Okubo, 1989, Dieterich, 1992). Une diversité importante des données mettant en évidence la complexité des séismes, comme par exemple la cyclicité de la sismicité ou les pulses d'auto-arrêt de glissement⁴ entre autres, a été expliquée par ce genre de relations constitutives (*e.g.*, Rice, 1993, Cochard & Madariaga, 1996, Zheng & Rice, 1998, Nielsen et al., 2000, Lapusta et al., 2000, Bizzarri et al., 2001, Tinti et al., 2005b, Bizzarri & Cocco, 2005).

Des simulations numériques de la propagation dynamique d'un séisme en adoptant la loi *rate- and state-dependent* ont montré que le comportement global de cette loi est caractérisé par une distance d'affaiblissement équivalente à celle du modèle « *slip-weakening* » (Cocco & Bizzarri, 2002, Bizzarri & Cocco, 2003), discuté plus tard dans les sections 2.3.2 et 2.3.3. Des expériences de laboratoire dans des « *gouges* » cisailés montrent que cette distance d'affaiblissement est typiquement de l'ordre de $10^{-6} - 10^{-4}m$ à l'échelle des échantillons testés (Ohnaka, 1992, Ohnaka & Shen, 1999). En revanche, les déterminations faites dans la modélisation des séismes oscillent entre $10^{-2} - 10^0m$ (Guatteri & Spudich, 2000, Mikumo et al., 2003, Mikumo & Yagi, 2003). Cet écart aussi grand peut s'expliquer en introduisant des facteurs d'échelle (Marone & Kilgore, 1993, Shibazaki & Matsu'ura, 1998, Ohnaka & Shen, 1999). Pourtant, des études récentes ont fourni des arguments permettant de l'expliquer à travers des mécanismes physiques. Des expériences de laboratoire avec différentes épaisseurs de *gouge* ont révélées que la distance d'affaiblissement est très sensible à l'épaisseur du *gouge*, pouvant atteindre des valeurs similaires à celles des séismes (Chambon &

⁴En anglais nommé « *self-healing pulses* ».

Schmittbuhl, 2002). D'autre part, elles ont aussi montré que les variations du frottement τ pendant l'instabilité sont principalement liées au glissement et non pas à son taux de changement ou à des variables d'état. L'influence de la zone inélastique d'endommagement joue donc un rôle très important dans l'affaiblissement instable des failles ainsi que dans le bilan énergétique de la rupture (Andrews, 2005). Par ailleurs, la présence de fluides à l'intérieur de cette zone semble aussi être un élément clé. Des observations faites à partir de carottes prélevées au voisinage d'une faille, ainsi que des simulations numériques, ont montré que la chaleur dégagée durant la phase rapide de l'instabilité peut induire une chute considérable de la contrainte normale effective à la surface de rupture et donc du frottement (Wibberley & Shimamoto, 2005). Selon l'épaisseur et la perméabilité de la zone de faille, la distance caractéristique d'affaiblissement peut ainsi varier considérablement (0.03–0.5m). Plus l'épaisseur et la porosité sont faibles, plus l'affaiblissement thermique dû à la dilatation des pores saturés d'eau est important, donnant lieu à des chutes de contraintes plus importantes et donc à des aspérités dynamiques sur la surface de rupture.

Bien que l'ensemble des observations n'est pas expliqué par un modèle aussi simple que celui du « *slip-weakening* » que j'introduirai dans la section 2.3.2, l'affaiblissement dynamique des failles semble être fortement relié à une longueur caractéristique de glissement. Pour cette raison, dans toutes les simulations et développements numériques réalisés dans ce travail (chapitres 3 et 4), j'ai adopté une loi constitutive de frottement linéairement dépendante du glissement.

2.3 Elastodynamique Locale

Bien que la dynamique de la rupture des séismes est un phénomène particulièrement complexe, la théorie de la fracturation des roches peut servir de base pour comprendre la nature des champs élastiques lors de l'occurrence d'un séisme. Le champ de déformation associé à la fracturation du milieu peut être vu comme la combinaison linéaire des trois modes principaux de déformation présentés sur la Figure 2.3 : mode I (ouverture), mode II (« *in-plane* ») et mode III (« *anti-plane* »). Étant donné qu'à l'intérieur de la Terre ce sont les contraintes de confinement qui président l'état pre-sismique des failles, les modes de déformation plus vraisemblables pendant la rupture sont les mode II et III : c'est-à-dire les deux modes associées aux déformations de cisaillement où il n'y a pas d'ouverture des parois internes des fractures. Dans les trois cas, la déformation produit une concentration de contraintes dans le voisinage de la limite de la fracture, à l'extrémité de la faille, appe-

lée aussi le « *crack-tip* »⁵. Comme on verra dans les prochains paragraphes, selon la nature de la chute des contraintes à l'intérieur de la fracture, on peut montrer théoriquement qu'une telle concentration peut être infiniment grande produisant une singularité des contraintes devant le front de rupture.

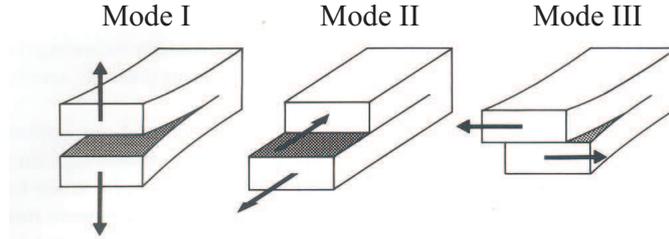


FIG. 2.3: Modes principaux de déformation associés à la fracturation d'un milieu : mode I (ouverture), mode II (*in-plane*) et mode III (*anti-plane*).

Pour les points les plus proches de la fracture, les champs locaux ont un comportement essentiellement bidimensionnel. Ceci peut être vu si l'on considère le gradient du champ des contraintes près du front de rupture. En termes qualitatifs, le gradient dans la direction tangentielle à ce front est insensible à la singularité des contraintes tandis que, dans la direction perpendiculaire, le gradient est plus singulier que le champ de contrainte même. Ainsi, la fonction spatio-temporelle du tenseur de contraintes à proximité d'une fracture a une structure universelle indépendante du mode de fracturation. En négligeant les termes d'ordre inférieur (Freund, 1990, pages 57-59), le champ de contraintes a des composantes de la forme

$$\tau_{ij} = \frac{K(t)}{\sqrt{2\pi x'}} \cdot \Theta_{ij}(\theta) \quad (2.6)$$

où $x' = x - v_r t$. v_r est la vitesse de propagation d'une fracture infinie en y se propageant dans la direction x dans le plan $z = 0$ d'un référentiel cartésien. Dans cette équation, le terme $\Theta_{ij}(\theta)$ est une fonction adimensionnelle qui représente la variation angulaire de chaque composante du tenseur de contraintes autour de l'extrémité de la faille en coordonnées polaires (r, θ) lorsque $r \rightarrow 0$, dans tous les plans parallèle à $y = 0$. Cette fonction est normalisée pour satisfaire $\Theta_{ij}(0) = 1$ (*i.e.* pas d'influence sur le plan $z = 0$). Les expressions exactes pour les trois modes de fracturation I, II et III sont données par Freund (1990, respectivement équations 2.1.3, 2.1.4 et 2.1.5). La

⁵L'appellation anglaise *crack* pour désigner une fracture, étant si employée dans la littérature, sera aussi utilisée le long de ce travail. De même pour le mot anglais *tip* qui désigne la limite de la fracture, soit le front de rupture.

fonction temporelle $K(t)$, de dimensions $Nw/m^{3/2}$, est le *facteur d'intensité de la contrainte* associé à chacun des trois modes de déformation. Le terme $1/\sqrt{x'}$ est universel et domine la convergence asymptotique de τ_{ij} lorsque $x' \rightarrow 0$ dans l'équation 2.6. Le seul facteur qui tient compte de l'influence de la géométrie et des propriétés du milieu ainsi que des détails de l'état de contrainte pendant la propagation d'une fracture est K , le facteur d'intensité de contrainte dynamique. Par conséquent, sa détermination est critique pour les spécialistes dans le domaine de la mécanique des fractures, en particulier en cas de rupture statique.

Bien entendu, la singularité des contraintes à l'extrémité de la faille est une idéalisation mathématique. Aucun matériel réel ne peut résister à une telle distribution de contraintes. L'étude de la fracturation dans des matériaux réels a abouti au concept d'une « résistance locale à petite échelle⁶ ». Ceci signifie qu'à l'intérieur d'une zone voisine à la fracture, les contraintes potentiellement infinies sont dissipées grâce à un fluage plastique ou à des micro-fracturations ou par tout processus inélastique (voir Ben-Zion & Sammis, 2003, pour la structure d'une zone de faille). En général, cette zone a des dimensions latérales petites par rapport à la dimension de la fracture. Dans ces conditions, la distribution des contraintes dans le milieu élastique qui enveloppe la zone inélastique est correctement décrite par le terme limite de la solution 2.6 au problème purement élastique. Le champ de contrainte autour de l'extrémité de la faille est donc complètement déterminé par le facteur d'intensité de contrainte. Ce facteur caractérise la nature du chargement appliqué à la zone inélastique près de la fracture.

2.3.1 Champs Singuliers

La formalisation mathématique des champs élastiques liés à la propagation d'une dislocation (*e.g.* S , \dot{S} ou τ_{ij}) à partir des considérations uniquement cinématiques peut comporter la violation de certaines lois physiques du phénomène. Par exemple, si l'on résout l'équation d'onde avec la condition de discontinuité du champ de déplacement sur la faille (section 1.5.1.2) $S = H(-x')$ où H est la fonction unitaire *heaviside*, alors la contrainte cisailante dans la fracture pour $x' < 0$ (*i.e.* à l'intérieur de la zone casée) tend vers l'infini au voisinage de l'extrémité de la faille alors qu'elle ne devrait jamais être supérieure à la valeur liée au frottement.

Considérons maintenant une fonction glissement plus réaliste. Elle vaut zéro en $x' = 0$ et croît avec le logarithme de $|-x'|$ grâce à la superposition des fonctions *heaviside* $H(\xi - x')$ décalées successivement d'un $\Delta\xi$. La fracture,

⁶En anglais, « *small scale-yielding* ».

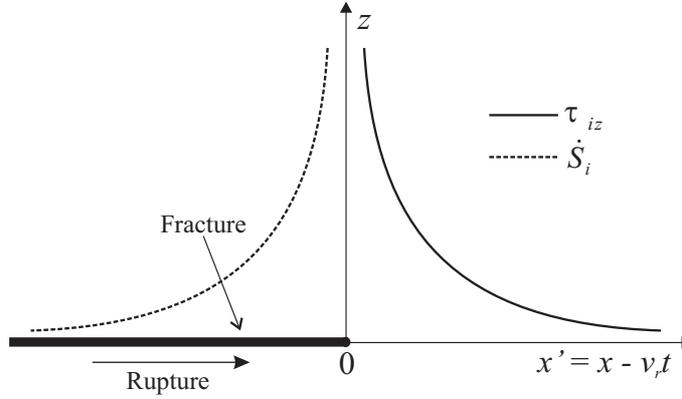


FIG. 2.4: Singularités des champs de contraintes (ligne continue) et de la vitesse du glissement (ligne discontinue) associées à la propagation d'une fracture soit de mode II (pour $i = x$) soit de mode III (pour $i = y$). Le front de rupture se trouve en $x' = 0$ où v_r est la vitesse de propagation de la fracture.

contenue dans le plan $z = 0$ pour $x' < 0$, se propage à une vitesse v_r dans la direction x' (figure 2.4). La chute des contraintes $\Delta\tau$ associée à la rupture peut avoir lieu soit sur la contrainte τ_{xz} (mode II) soit sur la contrainte τ_{yz} (mode III). On peut donc montrer que la relation entre la contrainte cisailante τ_{iz} et la vitesse du glissement \dot{S}_i en $z = 0$ est donnée par (Aki & Richards, 2002) :

$$\tau_{iz} = \Phi \int_{-\infty}^0 \frac{\dot{S}_i}{\xi - x'} d\xi, \quad (2.7)$$

où Φ est une constante qui dépend uniquement de μ , v_r et β et α (si $i = x$) ou de β (si $i = y$). Cette équation montre que la contrainte cisailante sur la surface de rupture est égale à Φ fois la transformée de Hilbert de la vitesse du glissement. Ceci implique que τ_{iz} et \dot{S}_i ont une forme similaire mais déphasées de $\pi/2$. Tout de même, si l'on suppose une relaxation totale à l'intérieur du crack, alors la contrainte doit valoir zéro pour $x' < 0$ de la même façon que \dot{S}_i à l'extérieur (*i.e.* pour $x' > 0$) (voir équations 1.111, page 93). Les fonctions pour la contrainte et pour la vitesse du glissement qui satisfont l'équation 2.7 ainsi que les conditions de frontière mentionnées sur les plan $z = 0$ sont

$$\tau_{iz} = \frac{K^m}{\sqrt{2\pi x'}} H(x') \quad \text{et} \quad \dot{S}_i = \frac{A^m v_r}{2\sqrt{-x'}} H(-x'), \quad (2.8a)$$

pour la distribution de glissement suivante :

$$S_i = A^m \sqrt{-x'} H(-x'), \quad (2.8b)$$

où K^m et A^m sont, respectivement, le facteur d'intensité de contrainte et une constante, définies pour le mode *in-plane* ($m=II$) et le mode *anti-plane* ($m=III$) (voir Aki & Richards, 2002, équations 11.6 et 11.7). Par conséquent le problème mécanique de la propagation d'une fracture pour une chute brutale de contraintes $\Delta\tau$ avec les conditions de frontière associées à cette propagation (équation 1.111) est satisfait par une singularité de contrainte devant le front de rupture ainsi que par une autre singularité de la vitesse du glissement derrière le front de rupture, comme le montre la figure 2.4.

Freund (1979) a étudié le cas de la propagation unilatérale stationnaire (*i.e.* vitesse constante égale à v_r) d'une fracture *anti-plane* de longueur $2a$ (centrée par rapport à l'axe z) sur le plan $z = 0$ du référentielle de la Figure 1.19 (section 1.5.1.2). La fracture est donc soumis à une charge homogène $\tau_{yz} = \tau_0$ avant la rupture. Dans son analyse il a supposé une chute instantanée de la contrainte cisailante $\Delta\tau = \tau_0 - \tau_s$ (où τ_s est le frottement dynamique) à $t = 0$ et une distribution du glissement tel que celui-ci tende doucement vers zéro à l'extrémité gauche de la fracture. Reformulés par Kanamori (1994), ses résultats montrent les deux mêmes singularités sur le front de rupture du champ de contrainte

$$\tau_{yz} = \Delta\tau \left[\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} - 1 \right] + \tau_0 \quad \text{sur } x > a, \quad (2.9a)$$

et de la vitesse du glissement

$$v_y = \Delta\tau \frac{v_r}{\mu} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad \text{sur } -a < x < a, \quad (2.9b)$$

introduites précédemment (Figure 2.4) mais en fonction de la longueur a de la source. Dans l'équation 2.9b, v_y représente la vitesse de la particule sur le plan $z = 0$. D'un point de vue sismologique, souvent, ce sont des paramètres physiques moyens auxquels on a accès lorsque qu'on emploie des sismogrammes pour interpréter le phénomène de rupture. A partir de l'expression 2.9b on peut donc calculer la vitesse moyenne de la particule $\|\mathbf{v}\|$ due à la dislocation sur la surface de rupture comme (Kanamori, 1994) :

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} v_y dx = \frac{\pi v_r}{2\mu} \Delta\tau \quad (2.10)$$

d'où on déduit que

$$\Delta\tau = \frac{2\mu}{\pi v_r} \|\mathbf{v}\| \approx \frac{\mu}{\beta} \|\mathbf{v}\| \quad (2.11)$$

pour une vitesse de propagation de la rupture supposée proche de β (*e.g.* $v_r = 0.7\beta$). L'approximation 2.11 est en accord avec l'équation 2.5 à un facteur 0.5 près. Cette incertitude est du même ordre de grandeur de celles dues à la méconnaissance des propriétés du milieu.

2.3.2 Forces de Cohésion

Bien que l'analyse réalisée dans la section 2.3.1 nous a permis de comprendre la nature des champs élastiques autour d'une fracture, les principales conclusions tirées ne vérifient pas certains principes physiques : les singularités des contraintes et de la vitesse du glissement sont inadmissibles à l'intérieur des matériaux réels. Au voisinage de la fracture, il existe une zone où la réponse du milieu n'est pas linéaire. L'existence de cette zone d'endommagement permet au moins d'avancer certaines considérations physiques omises dans l'analyse précédent qui auraient permis la dissipation des contraintes sous la forme d'une déformation inélastique. Les solutions singulières ont été obtenues en supposant une relaxation totale et instantanée des contraintes sur la surface de rupture et un comportement élastique linéaire près de l'extrémité de la faille. Pourtant, Barenblatt (1959b,a) a montré que le travail réalisé par des forces de cohésion à l'intérieur de la faille fait disparaître les singularités des champs élastiques. En cherchant à apporter un sens physique à ce travail, Ida (1972) et Palmer & Rice (1973) ont repris l'idée des forces de cohésion sous la forme de fonctions dépendantes de la discontinuité des déplacements sur la fracture. Leurs développements théoriques visaient à établir les bases mathématiques d'un mécanisme d'affaiblissement connu comme le modèle du « *slip-weakening* », modèle qui explique un ensemble important d'observations faites dans de nombreuses expériences de laboratoire (section 2.2). Des travaux récents ont montré que ce mécanisme peut jouer un rôle fondamental dans la formation de la zone d'endommagement inélastique. Dans certains cas, il peut être équivalent, d'un point de vue cinématique de la rupture, à une réponse plastique du milieu dans cette zone (Andrews, 2005, Rice et al., 2005).

La force de cohésion est distribuée à l'intérieur de la fracture dans une zone finie près du front de rupture. Dans cette zone, connue comme la *zone de cohésion*, une force (*i.e.* une traction) inférieure à la résistance du matériel et supérieure au niveau dynamique de frottement s'oppose à la charge extérieur qui mène à la rupture. Les contraintes cisailantes τ le long de la

fracture peuvent donc être exprimées comme la superposition de la contrainte résiduelle due au frottement τ_s et de la distribution spatiale de la force de cohésion σ_c que l'on suppose désormais dépendante uniquement du glissement S dans chaque point de la fracture :

$$\tau(x', t) = \tau_s + \sigma_c[S(x', t)]. \quad (2.12)$$

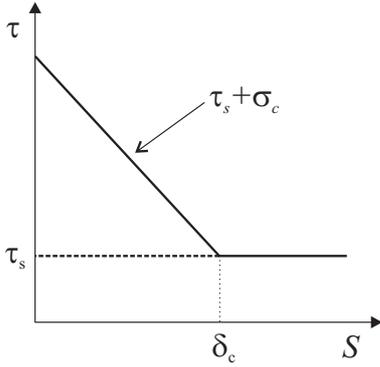


FIG. 2.5: Bilan décrit par l'équation 2.12 entre la force de cohésion σ_c et le frottement dynamique τ_s (supposé constant) en fonction du glissement S . Bilan pour $\sigma_c(S) = 0$ (ligne discontinue) et pour $\sigma_c(S)$ avec une décroissance linéaire selon le glissement (ligne continue). δ_c le glissement caractéristique d'affaiblissement.

tions de S (Ida, 1972, Table et Figure 1). Parmi les différentes solutions, se trouve celle où la force de cohésion décroît linéairement avec S (Figure 2.5). Ses résultats, résumés dans les figures 2 – 4 de son travail, confirment l'effacement de la singularité des contraintes dans tous les cas. Ils montrent aussi que S devient dérivable en $x' = 0$. Plus la dérivée de σ_c par rapport à S est faible, plus le décroissement de $S(x')$ est lisse lorsque x' tend vers 0 par la gauche. La solution analytique non-singulière pour la contrainte τ parallèle au front de rupture correspondante à une force de cohésion décrite par la fonction

$$\sigma(S) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{pour } 0 \leq S \leq \delta_c \\ 0 & \text{pour } S > \delta_c, \end{cases} \quad (2.13)$$

La solution à ce problème pour laquelle la singularité de contraintes disparaît en $x' = x - v_r t = 0$ (*i.e.* front de rupture) se trouve dans le choix de la fonction σ_c . La force de cohésion doit être telle que le facteur d'intensité de contraintes soit de signe opposé à celui associé au cas singulier. Avec ce choix, les contraintes τ sont finies et continues dans tout le plan où la fracture est contenue. Puisque la vitesse du glissement \dot{S} est proportionnelle à la transformée de Hilbert de la contrainte cisailante (équation 2.7) alors la singularité dans ce champ est aussi éliminée.

La distribution du glissement à l'intérieur de la fracture correspondante à une distribution donnée de la force de cohésion σ_c , ne peut être calculée que numériquement via un processus itérative. Ida (1972) a obtenu ainsi la solution au problème pour différentes distributions spatiales de σ_c , soit pour différentes fonc-

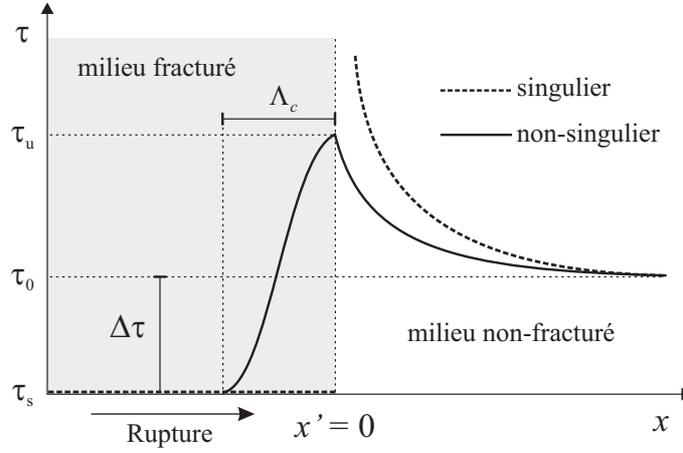


FIG. 2.6: Contrainte cisillante τ le long d'un plan où une fracture se propage dans la direction x . Avec une longueur Λ_c , la zone de cohésion s'étale depuis le front de rupture ($x' = x - v_r t = 0$) vers l'intérieur de la zone casée (région gris). τ_u et τ_s sont respectivement les résistances statique et dynamique de la fracture dues au frottement (section 2.2), τ_0 la contrainte initiale et $\Delta\tau = \tau_0 - \tau_s$ la chute de contraintes statique.

où σ_0 est une constante et pour $\tau_s = 0$, est donnée explicitement pour le cas bidimensionnelle d'une fracture de mode *anti-plane* comme (Ida, 1972, équation 25) :

$$\tau(x') = \frac{2\sigma_0}{\pi} \arctan\left(\frac{4\delta_c}{x'}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } x' > 0. \quad (2.14)$$

Andrews a réalisé les premières simulation numériques de la propagation d'une fracture présidé par l'effet d'une force de cohésion linéairement dépendante du glissement. Ce modèle de fracturation, dès lors appelé le modèle *slip-weakening*, a été appliqué pour les cas d'une déformation de mode III (Andrews, 1976a) et de mode II (Andrews, 1976b). Il fut utilisé par la suite par des nombreux auteurs (*e.g.*, Burridge et al., 1979, Day, 1982b, Olsen et al., 1997).

Pour illustrer ceci graphiquement, la Figure 2.5 montre deux fonctions différentes pour la force de cohésion. Celle associée au cas singulier où $\sigma_c(S) = 0$ est en ligne discontinue et celle mentionnée auparavant où σ_c décroît linéairement avec le glissement est en ligne continue. Les valeurs de la contrainte cisillante τ le long du plan où la fracture se trouve, pour ces deux cas, est schématisée sur Figure 2.6. Selon comment la force de cohésion est définie, la

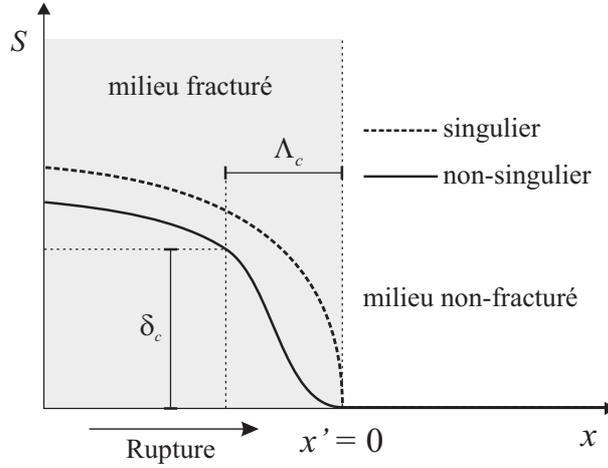


FIG. 2.7: Schéma du glissement S le long d'un plan où une fracture se propage dans la direction x avec (ligne continue) et sans (ligne discontinue) force de cohésion. Comparer avec la Figure 2.6.

contrainte cisailante peut être singulière en $x' = 0$ ou bien continue. Alors que dans le cas correspondant à une chute brutale (ligne discontinue) on retrouve la singularité, dans le cas où la force de cohésion est différente de zéro (ligne continue) la contrainte cisailante est continue. Étant donné que, pendant la rupture, la force de cohésion est une fonction implicite du temps, derrière le front de rupture il y a une zone de cohésion dans laquelle τ évolue depuis une valeur statique τ_u jusqu'à une valeur dynamique τ_s déterminées par la loi de frottement. La dimension de cette zone, Λ_c , est directement liée à la nature de la fonction $\sigma_c(S)$. Comme on peut le voir sur cette figure, la distribution spatiale de τ dans $-\Lambda_c < x' < 0$ n'est pas linéaire même si $\sigma_c(S)$ l'est (ligne continue, Figure 2.5). Bien entendu, plus le glissement caractéristique δ_c est petit (Figure 2.6) plus la distribution des contraintes tend vers celle du cas singulier.

Les solutions pour le glissement correspondants aux mêmes deux cas sont présentées sur la Figure 2.7. La ligne discontinue montre la fonction de glissement associée à la chute instantanée des contraintes $\Delta\tau$. La dérivée par rapport à x de cette fonction, $S' = \partial S / \partial x$, est discontinue en $x' = 0$ puisque sa pente en cet endroit est verticale. Si σ_c est non-nulle, cette solution est modifiée à l'intérieur de la zone où $S \leq \delta_c$ (ligne continue), c'est-à-dire à l'intérieur de la zone de cohésion. Par conséquent, la dérivée S' existe sur le front de rupture. Si la taille de la zone de cohésion est négligeable par rapport à la taille de la fracture alors, pour des valeurs de $x' < -\Lambda_c$, la

solution modifiée possède la même structure que celle du problème singulier (*i.e.* elles sont proportionnelles). Si x_c est la coordonnée de l'extrémité de la zone de cohésion donnée par $x - v_r t - \Lambda_c$, alors on peut montrer que la dimension de la zone de cohésion est (Ida, 1972)

$$\Lambda_c = \frac{-k\delta_c}{S'(x_c)}, \quad (2.15)$$

où $k \approx 2$ pour le cas d'une force de cohésion linéaire en fonction du glissement (Figure 2.5). Or, d'après le procédé suivi par Andrews (2004), si $\Delta\tau$ est uniforme pendant la propagation d'une fracture, alors la dérivée du glissement en x_c pour le cas d'une rupture bilatérale en 2D ou bien en 3D avant d'atteindre les bords de la fracture, peut s'exprimer comme :

$$S'(x_c) = \frac{-L}{\delta_c} \left(\frac{C\Delta\tau}{\mu} \right)^2 \quad (2.16)$$

où L est la distance entre le front de rupture et le centre de la fracture et C est une constante toujours d'ordre un. En substituant 2.16 en 2.15 on obtient que

$$\Lambda_c = \frac{k\delta_c^2}{L} \left(\frac{\mu}{C\Delta\tau} \right)^2. \quad (2.17)$$

Cette équation montre que, pour $\Delta\tau$ et δ_c constants, la dimension de la zone de cohésion éprouve une contraction inversement proportionnelle à la distance de propagation L . Une analyse plus détaillée sur la taille de la zone de cohésion à partir des considérations énergétiques a été réalisée par Day et al. (2005). Leur démarche théorique a montré que Λ_c dépend du mode cisailant de fracturation, soit *in-plane* soit *anti-plane*, étant dans les deux cas une fonction de la chute dynamique de contraintes $\tau_u - \tau_s$, de δ_c et de la vitesse de fracturation v_r . Dans ce contexte, la zone de cohésion éprouve aussi une contraction dite de Lorentz dans les directions perpendiculaires au front de rupture.

2.3.3 Bilan Énergétique

Du point de vue énergétique, un séisme n'est que la libération brutale de l'énergie mécanique accumulée avant la rupture. Or, cette libération a lieu à travers un processus de partition d'énergie complexe. Soit Ω_∞ un espace infini contenant la surface Σ où la discontinuité de déplacements a lieu pendant la rupture (*i.e.* le glissement S_i), et τ_{ij}^0 l'état de contrainte statique initial dans le milieu. Puisque le milieu est au repos à l'instant

$t = 0$, l'énergie total du système E , potentiellement à l'origine d'un séisme, est égale à l'énergie potentielle élastique E_u^0 (équation 1.132, section 1.5.2.3). L'énergie potentielle gravitationnelle sera négligée car sa variation pendant la rupture est relativement faible.

Soit τ_{ij}^1 l'état de contrainte statique final après le séisme lorsque t tend vers l'infini. Donc, le changement de l'énergie total (*i.e.* de l'énergie potentielle élastique) dans l'espace Ω_∞ , ΔE , est égal au travail réalisé par les tractions sur Σ pendant le glissement S_i . Il est donné par la relation de Volterra (*e.g.*, Kostrov, 1974, Dalhen, 1977) qui établie que

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} S_i (\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) n_j d\Sigma. \quad (2.18)$$

ΔE représente ainsi l'énergie mécanique totale libérée par le séisme dont le vecteur normal à la surface de rupture est égal à n_j . Soient τ_0 et τ_1 respectivement les contraintes cisailantes initial et final sur Σ . Donc, l'énergie totale libérée peut être visualisée dans la Figure 2.8 comme l'aire du trapèze \overline{abcd} intégrée le long de Σ , où \bar{S} est le glissement final dans chaque point de la fracture. Par ailleurs, les forces du système qui accélèrent le milieu pendant la rupture font face à la force de friction qui s'oppose au mouvement le long de Σ . Ceci implique qu'une partie de ΔE est irréversiblement transformée en *chaleur* (Figure 2.8, rectangle gris) :

$$E_h = \int_{\Sigma} \tau_1 \bar{S} d\Sigma, \quad (2.19)$$

où τ_1 est supposée égal à la valeur du frottement dynamique τ_s (section 2.2). La différence entre ΔE et E_h (surface quadrillée, Figure 2.8) est donc égale à l'énergie disponible pour provoquer la rupture W . Or, durant la dislocation, cette énergie éprouve une transformation (*i.e.* une partition). Si l'on assume que la surface de rupture est parfaitement lisse, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottement sur Σ (*i.e.* $\tau_s = 0$), alors il paraîtrait qu'aucun travail n'a lieu sur Σ car les tractions sont nulles. Pourtant, une quantité finie de travail est réalisée dans les frontières de Σ (*i.e.* front de rupture) par unité de distance parcourue par l'extrémité de la faille due à la formation d'un incrément unitaire de surface fracturée (voir Freund, 1972, Husseini et al., 1975). Cette énergie reçoit le nom d'*énergie de fracturation* E_γ . Dans le cas où il existe une force de cohésion σ_c dans la zone voisine au front de rupture (section 2.3.2) alors cette énergie, déterminée par Ida (1972) et interprétée par Andrews (1976a), est égale à

$$E_\gamma = \int_{\Sigma} \Pi d\Sigma \quad \text{où} \quad \Pi = \int_0^{\delta_c} [\tau(S) - \tau_1] dS, \quad (2.20)$$

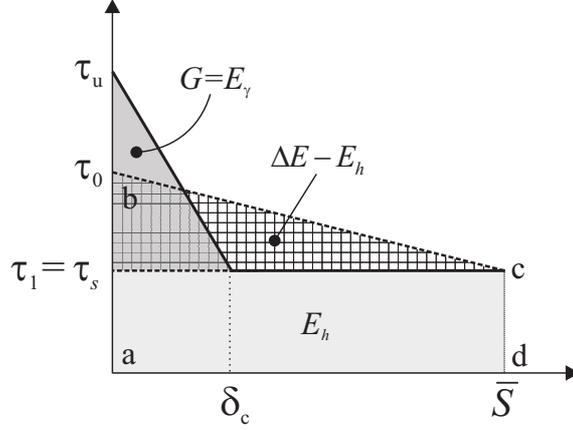


FIG. 2.8: Bilan énergétique dans un point d'une fracture avec force de cohésion. E_γ est l'énergie de fracturation, E_h est l'énergie dissipée en chaleur, $\Delta E - E_h$ est égale à l'énergie disponible W . Voir l'explication dans le texte.

où $\tau(S)$ est la valeur de la contrainte cisailante en fonction du glissement et δ_c est la distance critique d'affaiblissement, comme l'énonce la loi de frottement *slip-weakening* (section 2.2) étudiée dans la section précédente. L'équation 2.20 montre que E_γ , aussi désigné par la lettre G , est le travail réalisé sur Σ en excès de la chaleur produite pendant le glissement. Si l'on suppose une dépendance linéaire de τ par rapport à S (Figure 2.8, ligne continue), alors l'énergie de fracturation devient tout simplement (Andrews, 1976a,b) :

$$G = \frac{1}{2}(\tau_u - \tau_s)\delta_c \quad (2.21)$$

où τ_u représente la résistance du milieu qui détermine le seuil de rupture dans chaque point de Σ (voir section 2.2).

Le reste de l'énergie disponible est partitionnée entre l'énergie cinétique, E_k , et l'énergie élastique, E_u , dont la définition a été donnée dans la section 1.5.2.3 et qu'on réécrit comme :

$$E_k = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \|v_i\|^2 dV \quad \text{et} \quad E_u = \frac{1}{2} \iiint_V \tau_{ij} u_{i,j} dV,$$

où V est le volume de l'espace Ω_∞ . Ainsi, le bilan énergétique de la propagation d'une fracture est donné par le principe de conservation d'énergie :

$$\Delta E - E_h = \underbrace{E_k + E_u}_{E_m} + E_\gamma. \quad (2.22)$$

Les membres à gauche et à droite représentent l'énergie disponible pour propager la fracture, W . Selon la démarche suivie par Hussein (1977), en transformant l'expression mathématique de E_u , et en substituant les termes correspondants dans l'équation 2.22, on peut déduire que :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \bar{S}(\tau_0 - \tau_1) d\Sigma = \frac{1}{2} \int_V \rho(\dot{u}_i \dot{u}_i - \ddot{u}_i \dot{u}_i) dV + E_{\gamma}. \quad (2.23)$$

Étant donné que le membre de la gauche est égale à W (surface quadrillée, Figure 2.8), si l'on définit l'énergie radiée comme

$$E_r = \frac{1}{2} \int_V \rho(\dot{u}_i \dot{u}_i - \ddot{u}_i \dot{u}_i) dV, \quad (2.24)$$

alors

$$W = E_r + E_{\gamma}. \quad (2.25)$$

Si l'on compare 2.25 avec 2.22 on déduit que l'énergie radiée, définie de cette manière, est égale à l'énergie mécanique E_m . Par ailleurs, l'équation 2.25 nous dit également que la partie de l'énergie totale qui n'est pas dissipée en chaleur est partitionnée en deux composantes ; celle nécessaire pour faire avancer la fracture et celle radiée sous la forme d'ondes sismiques. On peut donc introduire le coefficient d'efficacité de radiation⁷, η_r , défini par le rapport suivant :

$$\eta_r = \frac{E_r}{W}. \quad (2.26)$$

Bien que η_r est fondamentalement insensible au mode de fracturation, il dépend de la vitesse de propagation de la rupture (Hussein & Randall, 1976, Hussein, 1977). Plus v_r tend vers β ou vers V_R (vitesse des ondes de Rayleigh), respectivement pour les mode III et II de fracturation, plus l'énergie radiée est importante (*i.e.* $\eta_r \rightarrow 1$). Une révision mathématique claire des certains concepts traités dans cette section, notamment celui de l'énergie radiée, est faite par Rivera & Kanamori (2005).

2.4 Propagation de la Rupture

2.4.1 Critère de Rupture

Les théories modernes sur la fracturation ont évacuée l'hypothèse d'une résistance constante et unique caractérisant chaque matériel. Aujourd'hui

⁷ En anglais « *radiation efficiency* ».

on sait que les matériaux contiennent des imperfections (*i.e.* des hétérogénéités) qui, provoquant des concentrations locales de contraintes, font que la fracturation a lieu à des niveaux de charges bien inférieurs à celles prédites par les théories anciennes. Puisque aucun matériau n'est capable de résister à des contraintes infinies, l'idée d'un seuil de fracturation donné par une contrainte maximale semble pertinente. Cependant, Griffith (1920) a établi des conditions suffisantes pour la propagation des fractures suivant une analyse énergétique. Il a considéré la propagation d'une fracture comme un système thermodynamique en équilibre, c'est-à-dire, comme un système dans lequel le bilan entre l'énergie totale disponible (équation 2.22) donnée par l'énergie mécanique E_m fournie par le milieu, et l'énergie de fracturation E_γ dépensée pour casser le milieu, ne varie pas lorsqu'un incrément différentiel de fracture se produit. Cette considération énergétique, se traduit par la condition suivante :

$$\frac{\partial(E_m + E_\gamma)}{\partial l} = 0, \quad (2.27)$$

où l est la longueur de la fracture. Elle établit donc un état critique permettant la fracture de se propager. En d'autres termes, l'équilibre entre l'énergie mécanique du milieu et l'énergie de surface requise pour faire avancer la fracture mène à l'obtention d'une longueur critique minimale de la fracture, L_c , permettant sa propagation (voir Andrews, 1976a,b, Freund, 1990). Si l'on considère la fonction glissement d'une fracture circulaire statique (équation 2.4), on peut montrer que cette longueur critique, exprimée en termes du rayon de la fracture, r_c , est égal à (Day, 1982b) :

$$r_c = \frac{7\pi}{24} \left[\frac{\mu(S+1)\delta_c}{\Delta\tau} \right], \quad (2.28)$$

où $\Delta\tau = \tau_0 - \tau_s$ est la chute de contraintes statique, δ_c est le glissement caractéristique d'affaiblissement (Figure 2.8), et le paramètre adimensionnel S , introduit par Andrews (1976b), est défini comme :

$$S = \frac{\tau_u - \tau_0}{\tau_0 - \tau_s}, \quad (2.29)$$

où τ_u et τ_s sont respectivement le frottement statique et dynamique donnés par la loi constitutive de frottement, et τ_0 est la contrainte cisailante initial sur la surface de rupture (voir Figure 2.8).

Le critère énergétique de Griffith a été utilisé par Kostrov (1966) afin de déterminer analytiquement le mouvement d'une fracture pour une propagation prédéfinie à vitesse variable. Puis, l'étude de la propagation spontanée

d'une fracture présidée par ce critère a été réalisée par d'autres auteurs (*e.g.*, Andrews, 1976b, Das & Aki, 1977b). Néanmoins, la théorie actuelle de la fracturation d'un *continuum* a suivi une autre voie lorsque Irwin (1957) à introduit le *facteur d'intensité de contraintes* (K , section 2.3) comme le paramètre caractérisant le champ de contraintes dans le voisinage des extrémités d'une fracture. Cette idée a établi un cadre alternatif pour la discussion sur la résistance à la fracturation des solides élastiques. Irwin a proposé que la propagation d'une fracture aura lieu lorsque le facteur d'intensité de contraintes atteint une valeur critique, K_c . Il est important de souligner que, dans l'énoncé de ce critère de fracturation, la quantité K_c représente une propriété du milieu alors que K est un paramètre caractérisant l'état instantané du champ de contraintes. On peut montrer que, dans le cas statique où le facteur d'intensité de contraintes est univoquement relié au flux d'énergie par unité d'extension de la fracture, ce critère est équivalent à celui de Griffith (Irwin, 1957, 1960). Une comparaison de l'évolution d'une fracture de mode III avec les deux critères en fonction du paramètre S (équation 2.29) a été réalisée par Das & Aki (1977b, Figure 13). Cette comparaison montre que, globalement, la fracture se propage plus rapidement avec le critère de Griffith. Pourtant, elle montre aussi que cet écart diminue lorsque S est grand.

Aucun des critères de rupture précédemment décrits peut être directement adapté pour un traitement numérique. Hamano (1974) a proposé un critère de rupture discret dès lors très répandu. Dans son approche, la surface de rupture est discrétisée en segments équidimensionnels de longueur d dans lesquels la valeur des champs élastiques est supposée égale à leur valeur moyenne le long des segments (Figure 2.9). Or, la valeur de la contrainte cisailant à l'intérieur de la fracture est égale à τ_s , tandis que celle à l'extérieur est égale $\tau + \tau_0$, où τ représente l'incrément des contraintes induit par la rupture à l'extérieur de la fracture (Figure 2.9). Ainsi, le critère introduit par Hamano établit que le front de rupture avancera d'un segment lorsque la condition

$$\bar{\tau} + \tau_0 \geq \tau_u \quad (2.30)$$

est vérifiée dans le segment en question. Puisque τ_0 est indépendant de la rupture, ceci dit tout simplement que la fracture avancera du moment où la contrainte moyenne $\bar{\tau}$ à l'intérieur du segment dépasse le seuil fixé par τ_u . Or, le champ de contraintes à l'extérieur de la fracture peut être approximé, grâce à l'équation 2.6, comme (courbe continue, Figure 2.9) :

$$\tau = \frac{K}{\sqrt{2\pi x}} H(x'), \quad (2.31)$$

où $H(\cdot)$ est la fonction *heavyside* et $x' = x - v_r t$. Donc, la contrainte moyenne le long d'un segment de longueur d est donnée par

$$\bar{\tau} = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{K}{\sqrt{2\pi x'}} dx' = \frac{2K}{\sqrt{2\pi d}}. \quad (2.32)$$

L'hypothèse derrière le critère de Hamano est que la contrainte τ' dans les points de la grille numérique qui se trouvent au centre de chaque segment (cercle blancs) est approximativement égale à la valeur moyenne $\bar{\tau}$ le long des segments, *i.e.*

$$\tau' \approx \bar{\tau} \quad (2.33)$$

(Figure 2.9). Par conséquent, la relation entre le facteur d'intensité de contraintes, K , et la contrainte cisailante τ' dans le seuil de rupture peut être exprimée comme :

$$K_c \approx c\tau_u \sqrt{d} \quad (2.34)$$

où K_c représente la valeur critique du facteur d'intensité de contraintes considérée par Irwin. Das & Aki (1977b) ont implémenté le critère de rupture de Hamano dans une formulation intégrale de frontière des problèmes de la propagation spontanée des fractures de modes II et III. Leurs résultats numériques pour le cas *anti-plane* montrent une grande similitude avec la solution analytique obtenue avec le critère de Irwin. Ils ont trouvé des valeurs optimales pour c en fonction de S d'environ 0.5. Dans le cas d'une déformation *in-plane*, Das & Aki ont argumenté que, puisque τ_u tend vers l'infini lorsque d tend vers zéro (approximation 2.34), alors la rupture supersonique ne peut pas avoir lieu dans la simulation numérique d'une fracture sans forces de cohésion. Comme on verra dans la section suivante cette conclusion est fautive puisque τ_u est une propriété du milieu qui ne dépend pas du choix d'un paramètre numérique. Cependant, l'équation 2.32 montre que la contrainte moyenne à l'intérieur du segment contigu au front de rupture est fortement dépendante de sa taille d . Ce fait est une conséquence directe de la singularité de contrainte associée à la chute brutale des contraintes à l'intérieur de la fracture. S'il y avait une force de cohésion près du front de rupture (Andrews, 1976a) (section 2.3.2), la singularité de contraintes disparaîtrait en réduisant de manière importante le gradient de τ près de $x' = 0$ (Figure 2.6). Dans ce contexte, l'approximation 2.33 dévient donc plus juste du fait que la valeur discrète, τ' , est plus représentative de la valeur moyenne, $\bar{\tau}$, près du front de rupture indépendamment de d (*i.e.* de la discrétisation de la fracture).

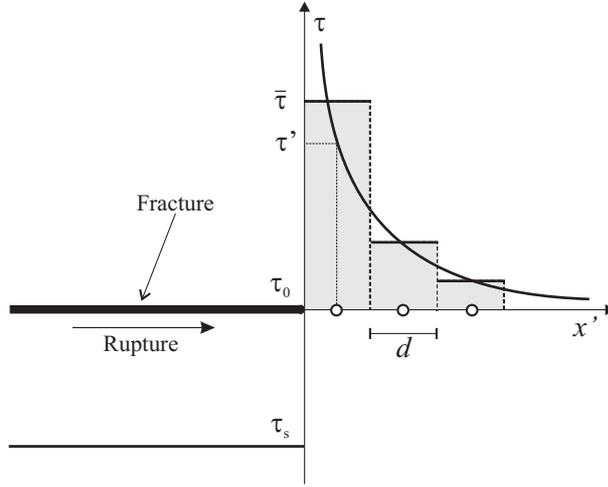


FIG. 2.9: Schéma qui décrit le critère de rupture discret de Hamano (1974). Le champ de contraintes τ (ligne courbe) près du front de rupture ($x' = 0$) est approximé par l'équation 2.31. La valeur moyenne $\bar{\tau}$ à l'intérieur de chaque élément de la fracture de longueur d est donnée par les sommets des rectangles gris (équation 2.32). τ' est la valeur de la contrainte au centre des éléments (cercles blancs). Modifié à partir de Das & Aki (1977b).

Le critère de rupture de Hamano (1974) a été implémenté dans tous les modèles numériques en 2D et 3D présentés dans le reste de ce document. Comme on verra dans le chapitre 4, la zone de cohésion associée au mécanisme d'affaiblissement *slip-weakening* joue un rôle fondamental dans la convergence numérique. Un minimum d'éléments de la grille numérique à l'intérieur de cette zone doit exister pour étaler suffisamment la singularité de contraintes à l'extérieur de la fracture et assurer cette convergence malgré l'approximation implicite dans le critère de Hamano. Par conséquent, le glissement caractéristique d'affaiblissement δ_c , qui détermine la taille de la zone de cohésion (section 2.3.2), est une longueur physique qui permet de régulariser le problème pour le rendre indépendant de sa discrétisation (*i.e.* du choix de d).

2.4.2 Rupture Spontanée

Le mouvement rapide des particules dans le voisinage des extrémités de la surface de rupture contribue à l'excitation de hautes fréquences dans le champ d'ondes radiées. Pourtant le mécanisme concerné dans ce processus reste un problème ouvert. Les hautes fréquences sont générées par des changements

de la vitesse de rupture, dès l'initiation jusqu'à l'arrêt, provoqués par des variations abruptes des propriétés du milieu ou des paramètres constitutifs de frottement (*e.g.*, Madariaga, 1976, Richards, 1976, Aki, 1979, Yamashita, 1983, Chen et al., 1987). La vitesse de propagation des fractures a été un grand sujet de débat théorique pendant les années 70. L'idée d'une vitesse de rupture maximale inférieur ou égale à celle des ondes S pour les modes II et III de déformation a été pendant longtemps soutenue sur des bases théoriques (voir Hussein & Randall, 1976, et références incluses).

L'analyse énergétique de la propagation d'une fracture sans force de cohésion montre que le flux d'énergie vers le front de rupture est une fonction qui décroît exponentiellement avec la vitesse de propagation de la fracture, v_r . Lorsque $v_r^{\text{II}} = v_R$ dans le mode II de déformation (où v_R est la vitesse des ondes de Rayleigh) et lorsque $v_r^{\text{III}} = \beta$ dans le mode III déformation, cette fonction disparaît puisque les facteurs d'intensité de contraintes, et par conséquent les singularités des contraintes aussi (voir équation 2.8a), sont nuls (Aki & Richards, 2002, équations 11.6 et 11.7). Ceci signifie que dans ces régimes de propagation, l'énergie nécessaire pour créer une nouvelle surface fracturée ne peut pas être fournie. Dans ce sens, elles représentent les vitesses terminales pour chacun de ces modes de fracturation. Cette conclusion est valable pour la vitesse terminale du mode *anti-plane* (*i.e.* $v_r^{\text{III}} = \beta$), même en présence des forces de cohésion. Pourtant, Burridge (1973) a montré que, lorsqu'une fracture de mode *in-plane* sans cohésion se propage à une vitesse $v_r = v_R$, la contraintes induite par l'onde S devant le front de rupture peut atteindre la valeur seuil de frottement statique si le paramètre $S < 1.63$ (équation 2.29). Dans ce cas, la fracture peut se propager à la vitesse des ondes P (*i.e.* $v_r^{\text{II}} = \alpha$). Par ailleurs, il a aussi montré que l'intervalle de vitesse $v_R < v_r^{\text{II}} < \beta$ est inadmissible. La Figure 2.10 illustre ce point avec des résultats issus d'une simulation numérique en différences finies⁸. Peu de temps après la nucléation, le front de rupture atteint la vitesse v_R (front F_1). Au bout d'un moment, l'onde S déclenche une rupture

⁸Les résultats des Figures 2.10 et 2.11 ont été obtenus dans un modèle inédit de zone de faille (section 4.1) dans la grille en quinconce standard introduite par Madariaga (1976), en appliquant les opérateurs spatiaux A.1 de précision d'ordre quatre. L'implémentation numérique de ce modèle de rupture 2D ressemble à celles proposées par Madariaga (1976) et par Virieux & Madariaga (1982). C'est-à-dire, la faille est décrite par un seul plan (ligne) de nœuds où une des deux composantes de contraintes cisailantes chute vers la valeur dynamique de frottement (*i.e.* τ_{xz} , voir Figure 4.1 à gauche, page 209). La différence fondamentale par rapport à ces modèles est que la rupture se développe au milieu d'un espace infini sans tenir compte de la symétrie du problème par rapport au plan où se trouve la fracture. En d'autres termes, les conditions de frontière appliquées ne sont pas mixtes mais uniquement celles concernant la surface Σ_1 dans le problème posé par les équations 1.111a (sauf celle appliquée à la contrainte normale τ_{zz} , page 93).

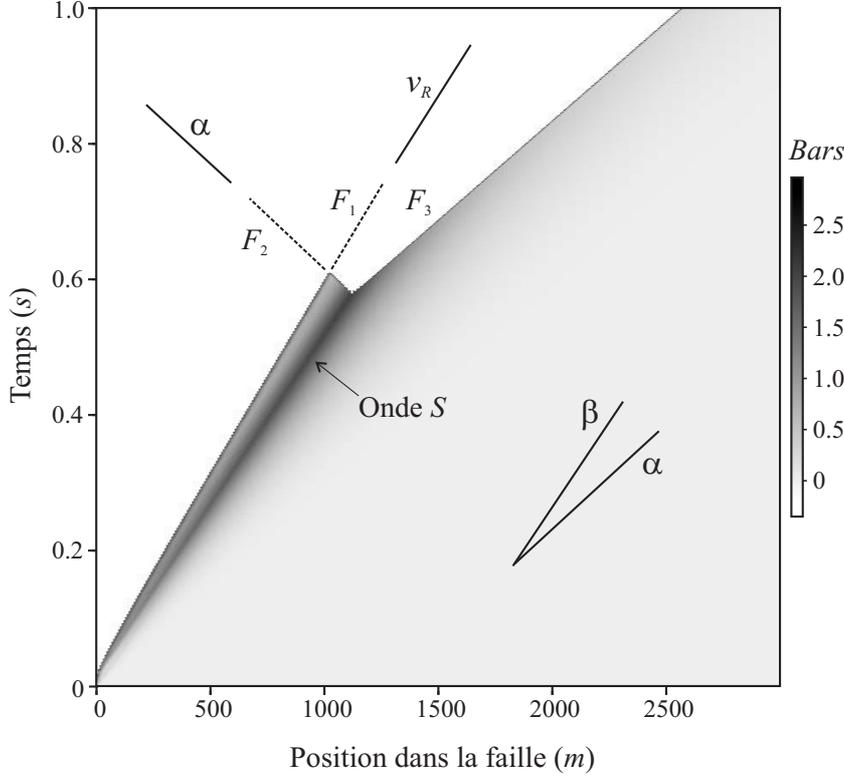


FIG. 2.10: Contraintes cisailante sur le plan de faille à l'extérieur de la zone de nucléation en fonction de la position et du temps. Transition abrupte d'une fracture de mode *in-plane* sans forces de cohésion depuis un régime subsonique (*i.e.* $v_r < v_R$) vers un régime supersonique (*i.e.* $v_r > \beta$). Lorsque la transition a lieu, trois front de rupture coexistent, F_1 , F_2 et F_3 , dont un (le front F_2) se propage dans le sens contraire au front principal F_1 . Le critère de rupture proposé par Hamano (1974) (section 2.4.1) a été implémenté dans la grille en quinconce standard bidimensionnel (Figure 3.1, voir note 8). L'état de contraintes est égal à zéro dans tout le milieu à l'instant $t = 0$. La rupture est initiée par une chute brutale des contraintes cisailantes $\Delta\tau = 1.65bars$ dans une zone de nucléation de $1000m$ (exclue de la figure). La valeur de frottement statique le long de la faille, τ_u , est égale à $2bars$ alors que celle de frottement dynamique, τ_s , est de $-1.65bars$ (*i.e.* $S = 1.21$, équation 2.29). Les propriétés du milieu élastique sont les suivantes : $\beta = 2000m/s$, $\alpha = 3464m/s$ et $\rho = 2000kg/m^3$. Les paramètres numériques utilisés pour cette simulation sont $h = 15m$ et $\Delta t = 0.001s$.

bilatérale composée de deux fronts, F_2 et F_3 , se propageant à la vitesse des ondes P (*i.e.* α). Puisqu'il n'y a pas de cohésion dans la surface de rupture, lorsque $v_r^{\text{II}} = v_R$ alors $K^{\text{II}} = 0$ (front F_1), faisant disparaître la singularité de contraintes associé au front. La même situation est présente dans les fronts secondaires F_2 et F_3 où aucun signal est visible avant leur arrivée (dans ce cas $v_r^{\text{II}} = \alpha$). Comme prédit par Burridge, les seules deux vitesses de rupture admises (stables) sont ainsi v_R et α . La Figure 2.11 montre une série d'instantanées de la composante τ_{xz} du tenseur des contraintes dans le milieu, associées à la simulation montrée dans la figure précédente. Dans ces images on peut apprécier les ondes générées quelques instants après la transition (Figure 2.11b) du régime subsonique (Figure 2.11a) au régime supersonique (Figure 2.11c). Les ondes de volume directes P et S , l'onde conique associée à la propagation supersonique (onde de choc), ainsi que les pulses d'arrêt (ondes diffractées) générées dans l'extrémité de la fracture sont toutes facilement identifiables dans la séquence. Une description plus détaillée se trouve dans la légende de la figure.

Aucun matériel réel ne peut supporter des contraintes infinies. Par conséquent, d'une manière ou d'une autre, de l'énergie doit être absorbée sur le front de rupture. Le mécanisme probablement le plus judicieux est que l'absorption aie lieu au travers d'un processus inélastique dans la région voisine de la fracture. Si la déformation dans cette région est irréversible, l'entropie augmente et l'énergie mécanique est dissipée dans le matériel. Un mécanisme alternatif est que cette dissipation se produise au travers le travail réalisé par la chute des contraintes au fur et à mesure que le glissement sur la faille augmente. Comme discuté dans les sections 2.2.2 et 2.3.2, ce mécanisme de *slip-weakening* a été identifié comme l'un parmi les plus importants pendant la phase instable de la rupture. Si une fracture se propage à une vitesse inférieur à celle des ondes de Rayleigh, une portion de l'énergie radiée peut être focalisée sur un point, le front de rupture, pour y être absorbée. En revanche, si la fracture se propage à une vitesse supérieur à celle des onde S , cette dissipation n'est pas possible sur un point mais uniquement le long d'un front de rupture étalé dans l'espace (*i.e.* zone de cohésion). Dans le mode de déformation *in-plane* avec des forces de cohésion (modèle *slip-weakening*), Andrews (1976b) a montré que la rupture se déroule en plusieurs étapes. Après l'initiation, la rupture accélère pour s'approcher de la vitesse v_R . Dans certains cas, avant d'atteindre cette vitesse, un deuxième front de rupture est déclenché devant la fracture principale. Cette nouvelle dislocation est unilatérale et présente une évolution plus complexe que celle de la fracture sans cohésion (Figures 2.10 et 2.11). Elle éprouve une accélération progressive vers la vitesse des ondes P à partir d'une vitesse $v_r = \sqrt{2}\beta$ (Andrews, 1976b,

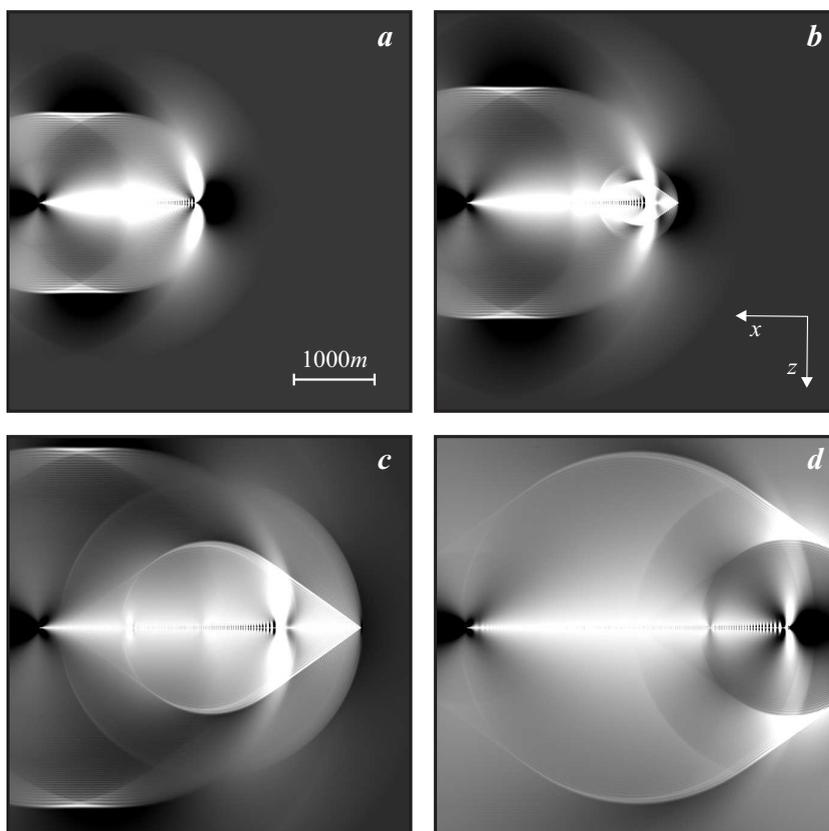


FIG. 2.11: Instantanés de la composante τ_{xz} du tenseur des contraintes pendant la propagation d'une fracture unilatérale de mode II (*in-plane*) sans forces de cohésion. Même simulation que celle de la Figure 2.10. (a) La rupture se propage initialement avec une vitesse subsonique égale à celle des ondes de Rayleigh. (b) Puisque $S = 1.21$, la rupture subit une transition de vitesse vers un régime supersonique (Figure 2.12). Un nouveau front de rupture F_3 plus rapide (Figure 2.10) émerge devant l'ancien en générant une onde S conique (onde de choc) ainsi qu'une onde P dont le front d'onde sphérique définie, dans son centre, l'endroit précis où la transition s'est produit. L'hémisphère gauche de ce front d'onde est généré par le front de rupture retro-propagé F_2 avant son effacement dû à la rencontre avec le front primaire F_1 . (c) La rupture, en régime supersonique stable, continue à se propager en laissant derrière l'onde S très énergétique qui a provoqué la transition. (d) La fracture atteint une barrière infinie (*i.e.* $\tau_u = \infty$) et s'arrête brutalement en générant deux diffractions sphériques P et S (pulses d'arrêt) ainsi qu'une nouvelle onde conique qui rejoint les fronts des deux diffractions.

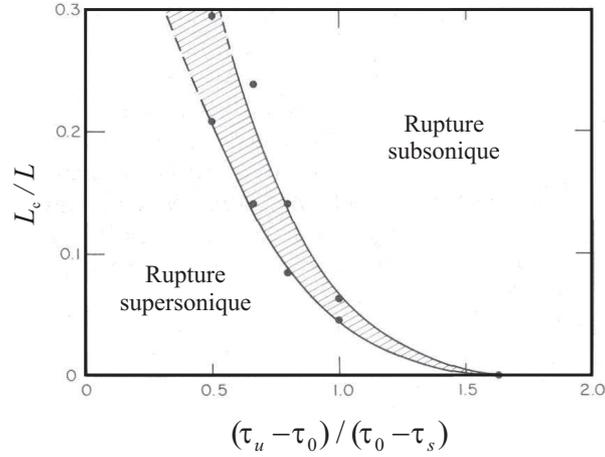


FIG. 2.12: Domaine de la vitesse de rupture d'une fracture de mode II en fonction du rapport entre la longueur critique L_c (section 2.4.1) et la longueur de la fracture L , et du paramètre $S = (\tau_u - \tau_0) / (\tau_0 - \tau_s)$. D'après Andrews (1976b).

Figure 3). Ainsi il a conclu que la vitesse de rupture d'une fracture de mode II en présence de forces de cohésion est confinée au domaine $v_r^{\text{II}} < v_R$ et $\sqrt{2}\beta < v_r^{\text{II}} < \alpha$. Quelques années plus tard, Burridge et al. (1979) ont corroboré analytiquement ces résultats en précisant certains points concernant la stabilité des différentes phases de la rupture. Par exemple, tandis que Andrews exclut toute propagation dans l'intervalle $v_R < v_r^{\text{II}} < \sqrt{2}\beta$, Burridge et al. précisent que, pour ce qui concerne le sub-intervalle $v_R < v_r^{\text{II}} < \beta$, aucune solution stable n'est possible. Pourtant, dans les intervalles $v_r^{\text{II}} < v_R$ et $\beta < v_r^{\text{II}} < \sqrt{2}\beta$, des solutions instables ont été déterminé du fait que la charge motrice décroît à mesure que v_r^{II} augmente dans ces régimes. Finalement ils ont aussi montré que dans le domaine supérieur $\sqrt{2}\beta < v_r^{\text{II}} < \alpha$, un régime typiquement stable de propagation existe puisque la charge motrice augmente avec la vitesse de rupture.

Andrews (1976b) a réalisé une série de simulations numériques pour étudier l'initiation et l'arrêt de la transition de vitesse vers le régime supersonique. Pour différentes valeurs du paramètre S (équation 2.29), il a quantifié la longueur de la fracture à l'instant où la transition commence et puis à l'instant où elle finit. Ses résultats sont représentés dans la Figure 2.12 avec des points noirs. L'axe vertical représente le rapport entre la longueur critique L_c (voir section précédente) et la longueur de la fracture L . Il est simple de montrer que ce rapport est égal au rapport entre l'énergie de surface consom-

mée pour faire avancer la fracture, E_γ (équation 2.20), et l'énergie disponible libérée, W (équation 2.25) (voir Andrews, 1976b). La zone hachurée montre le domaine de transition de vitesse. Plus la valeur de S diminue plus la rupture doit se propager afin d'attendre la transition. Le point où les deux lignes continues convergent sur l'axe horizontal correspond à la valeur de $S = 1.63$ trouvée par Burridge (1973) à partir de laquelle la transition de vitesse vers le régime supersonique est inadmissible.

Madariaga & Olsen (2000) ont élargi l'analyse de la propagation de la rupture des séismes en introduisant une longueur physique supplémentaire. L'influence du rapport L_c/L dans la Figure 2.12 révèle que la transition de vitesse est directement reliée au bilan énergétique dans le front de rupture. Comme Day (1982b) l'a montré, la distance caractéristique d'affaiblissement δ_c du modèle *skip-weakening* joue donc un rôle fondamental, puisqu'elle détermine l'énergie de fracturation (voir équation 2.21). Ainsi, Madariaga & Olsen ont étudié les paramètres qui interviennent dans ce bilan énergétique pour introduire ce qu'ils ont appelé la « criticalité » de la rupture, notion qui fait référence aux états énergétiques où l'évolution du phénomène éprouve des bifurcations. Par exemple, l'existence d'une longueur caractéristique L_c pour la zone de nucléation (*e.g.*, Andrews, 1976a,b, Freund, 1990), exprimée par le rayon d'un cercle (r_c) dans une géométrie 3D par Day (1982b) (équation 2.28), révèle une première bifurcation du phénomène : la rupture se propage ou non selon si la longueur de la zone de nucléation est, respectivement, supérieure ou inférieure à la valeur caractéristique donnée par la condition énergétique mentionnée dans les premiers paragraphes de la section 2.4.1. Une deuxième bifurcation peut avoir lieu si les conditions énergétiques pendant la propagation dynamique font que la rupture éprouve ou non la transition vers le régime supersonique. A partir de ce constat, Madariaga & Olsen (2000, équation 4) ont introduit un nombre adimensionnel qui, en terme du paramètre S (équation 2.29) et de la chute de contraintes $\Delta\tau = \tau_0 - \tau_s$, devient :

$$\kappa = \frac{\Delta\tau}{\mu(S+1)} \left[\frac{L}{\delta_c} \right] \quad (2.35)$$

(comparer avec l'expression 2.28). Le terme entre crochets contient les seuls deux longueurs physiques caractérisant le problème. Le paramètre L représente un aspect de la géométrie de la faille, par exemple, sa largeur. L'autre terme concerne le rapport entre l'état de contrainte initial et le paramètres constitutifs de frottement. En prenant r_c (défini par l'expression 2.28, page 156) comme la longueur L dans cette équation, alors nous trouvons une valeur critique théorique $\kappa_c = 7\pi/24$ pour l'initiation de la rupture. Au dessus

de cette valeur approximative, la rupture peut se propager alors que, en dessous, elle ne peut pas (*i.e.* première bifurcation). La valeur de κ correspondante aux résultats rapportés par Madariaga et al. (1998) est environ 30% inférieur à la valeur théorique. Cependant, une analyse expérimentale plus détaillée leur a permis de déterminer une valeur plus robuste égale à $\kappa_c = 0.8$. Des estimations de κ pour le séisme de Landers en 1992 ($M_W = 7.3$) (Madariaga & Olsen, 2000, Peyrat et al., 2001) ont révélés qu'elle est très proche de la valeur critique. Si le nombre κ prend des valeurs supercritiques (*i.e.* $\kappa \gg \kappa_c$) alors la rupture éprouve la transition de vitesse vers le régime supersonique (*i.e.* deuxième bifurcation). Des valeurs supercritiques ont été déterminées dans une faille rectangulaire. Pour un modèle de barrière, le seuil de « supercriticalité » se trouve autour de $\kappa \approx 1.2$ tandis que, pour un modèle d'aspérité, le seuil se trouve autour de la valeur $\kappa \approx 1.0$. Globalement, plus le glissement caractéristique δ_c est grand, plus la contrainte tectonique initiale doit être proche du seuil de rupture τ_u pour que la rupture puisse se propager, mais aussi pour qu'elle puisse éventuellement éprouver la transition supercritique (voir Madariaga & Olsen, 2000, Figure 5).

Les arguments théoriques présentés dans les paragraphes précédents permettent de conclure que l'histoire de la rupture dépend fortement de l'état de contrainte sur la surface de rupture et des paramètres constitutifs de la loi de frottement. Des simulations numériques ont montrées que les conditions initiales le long des failles possédant des barrières⁹ et des aspérités¹⁰ ont une grande influence dans l'évolution de la rupture ainsi que dans le champ d'ondes radié (*e.g.*, Das & Aki, 1977a, Mikumo & Miyatake, 1979, Miyatake, 1980, Day, 1982b, Aagaard et al., 2001, Fukuyama & Olsen, 2002, Dunham et al., 2003). L'effet de la géométrie de la surface de rupture (Aochi et al., 2002, Kame et al., 2003, Oglesby et al., 2003, Cruz-Atienza et al., 2004a, Aochi & Olsen, 2004), ou bien de l'interaction entre la surface libre et le champ d'ondes pendant la propagation dynamique (Nielsen, 1998, Oglesby et al., 1998, 2000), peut être aussi très important dans la vitesse de rupture et dans les accélérations du champ proche. En outre, comme le montrent les Figures 3.15 et 3.16 du prochain chapitre (page 200), les propriétés du milieu dans lequel la rupture se produit peuvent avoir des conséquences majeurs (Cruz-Atienza & Virieux, 2004). Si la rupture a lieu le long d'une interface entre deux matériaux des propriétés élastiques différentes, alors la rupture peut devenir asymétrique en atteignant des vitesses supersoniques dans une des

⁹Une *barrière* est une région de la faille dans laquelle le frottement statique est supérieur à celui de l'entourage.

¹⁰Une *aspérité* est une région de la faille dans laquelle la contraintes cisailante initiale est supérieure à celle de son entourage.

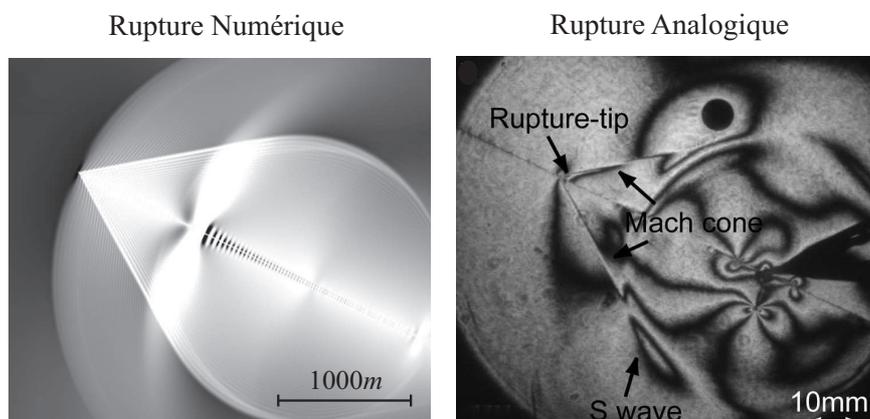


FIG. 2.13: Comparaison des instantanées de la propagation spontanée d’une rupture issus d’une expérience numérique (Figure 2.11c) (à gauche) et d’une des expériences analogiques réalisées par Xia et al. (2004, Figure 2b) (à droite).

directions de propagation (Andrews & Ben-Zion, 1997, Harris & Day, 1997, Ben-Zion & Huang, 2002, Weertman, 2002, Ben-Zion & Sammis, 2003).

Tous les travaux mentionnés ci-dessus appartiennent encore au domaine de la théorie. Les conditions expérimentales nécessaires pour vérifier toutes ces prédictions restent, encore aujourd’hui, très souvent inconnues sur le terrain. Des travaux pionniers ont suggérés l’existence d’épisodes supersoniques dans l’évolution de la rupture des séismes californiens de la Vallée Impériale en 1979 ($M_L = 6.6$) (Archuleta, 1984) et de Landers en 1992 ($M_W = 7.3$) (Olsen et al., 1997). Cependant, ce n’est qu’en 1999 que les premières observations directes de la propagation supersonique d’une fracture de mode II (*in-plane*) ont pu être réalisées (Rosakis et al., 1999). Ces observations, effectuées en laboratoire sous des conditions extrêmement contrôlées, ont permis d’étudier le phénomène en détail dans les modes I et II de fracturation (Coker & Rosakis, 2001). D’intérêt particulier pour les sismologues sont les travaux plus récents, publiés toujours par la même équipe (Xia et al., 2004, 2005), dans lesquels des séismes à petite échelle ont été soigneusement photographiés pendant la propagation de la rupture. La similitude avec des vrais séismes est remarquable puisqu’ils n’ont pas fracturé un milieu sain, mais déclenché un glissement instable le long d’une surface préexistante soumise à une charge initial lointaine. Leurs expériences ont révélés encore une fois une transition de la rupture vers un régime supersonique avec les mêmes caractéristiques décrites dans les Figures 2.10 et 2.11. La Figure 2.13 montre

une comparaison entre deux instantanées issues d'une expérience numérique (à gauche) et d'une des expériences analogiques (à droite) publiées par Xia et al. (2004, Figure 2b). La ressemblance est surprenante ! Même l'asymétrie de la rupture due au contraste des propriétés entre les deux blocs de la faille prédite indépendamment par Harris & Day (1997) et par Andrews & Ben-Zion (1997) a été identifiée en laboratoire (Xia et al., 2005). Donc, les travaux sismologiques réalisés dans le dernier lustre où la rupture supersonique des plusieurs séismes a été rapportée (*e.g.*, le séisme de Izmit en 1999 ($M_W = 7.4$) par Bouchon et al. (2001), le séisme de Kunlunshan en 2001 ($M_S = 8.1$) par Bouchon & Vallée (2003) et le séisme de Denali en 2002 ($M_W = 7.9$) par Dunham & Archuleta (2004)), possèdent désormais une justification qui repose sur un constat physique.

2.5 Conclusions

Le long de ce chapitre, j'ai exploré différents aspects essentiels concernant la mécanique des séismes. La rupture d'un séisme est un phénomène particulièrement complexe car il dépend d'une physique locale au voisinage de la faille qui interagit avec une physique globale à travers la propagation des ondes. Or les propriétés mécaniques près de la faille peuvent être compliquées et très variées, reliées à la fois à la nature du frottement sur la surface de rupture et aux phénomènes non-linéaire de fluage, micro-fracturation ou thermopressurisation. En dehors de cette zone d'endommagement, la perturbation des champs élastiques est fondamentalement déterminée par l'évolution des contraintes sur la faille. Ainsi, malgré la méconnaissance des processus à l'intérieur de cette zone, le champ d'onde radié peut être macroscopiquement décrit grâce à l'adoption des lois constitutives de frottement sur le plan de faille. Autrement dit, la dissipation d'énergie associée à la fracturation et aux phénomènes inélastiques dans la zone de faille est souvent ramenée à la surface de rupture au travers des paramètres constitutifs qui contrôlent la relaxation des contraintes.

L'énergie mécanique totale libérée pendant un séisme dépend fondamentalement de trois facteurs : la chute des contraintes statique, le niveau absolu des pré-contraintes et le glissement final sur la faille. La partition de cette énergie en chaleur, énergie de fracturation et énergie radiée durant la rupture est directement reliée aux paramètres constitutifs de frottement mais aussi à l'état initial de contraintes sur la surface de rupture. Une connaissance sur cet état est donc nécessaire afin de modéliser le phénomène. L'état de pré-contraintes est le résultat de la superposition d'un champ résiduel, associé aux déformations locales dues aux séismes précédents, et un champ tecto-

nique régional, souvent considéré homogène autour de la faille. La projection de ce dernier sur la surface de rupture dépend naturellement de l'orientation de la faille. Si cette orientation change dans l'espace, alors les conditions énergétiques de la rupture changent aussi, ayant une incidence directe sur la partition local de l'énergie. Par ailleurs, lorsque le front de rupture rencontre des variations d'orientation relativement abruptes, des diffractions haute fréquence sont émises en diminuant ainsi l'énergie disponible pour continuer la rupture (Madariaga, 2005, Vilotte et al., 2005, Madariaga & Ampuero, 2005). Par conséquent, la géométrie des failles est un facteur déterminant dans la propagation des séismes. Ne pas tenir compte de ce facteur dans l'étude dynamique des vrais séismes peut conduire à des conclusions fausses par rapport à la physique des processus qui ont eu lieu pendant leur rupture. Pour cela, dans les chapitres 3 et 4, j'aborde cette problématique en construisant un nouveau modèle numérique permettant de simuler la rupture de séismes le long des failles de géométrie non-planaire.

Chapitre 3

Modèle 2D d'une Faille Dynamique Nonplanaire

Sommaire

3.1	Introduction	174
3.2	Elastodynamic Equations for an Arbitrary Crack	175
3.3	Crack Boundary Conditions	177
3.4	Point Source Analysis	179
3.4.1	Point Source Discretization	179
3.4.2	Slip and Slip-Rate Estimation	182
3.5	Planar Finite Source	186
3.5.1	Numerical Accuracy	186
3.5.2	Self-Similar Constant Velocity Crack	189
3.5.3	Constitutive Friction Law	190
3.5.4	Spontaneous Rupture Propagation	194
3.6	Nonplanar Sources in Heterogeneous Media	196
3.6.1	A Realistic Example	198
3.7	Discussion and Conclusions	201

THIS chapter treats the two-dimensional (2D) problem of the dynamic rupture of earthquakes using a recent partly-staggered grid finite-difference formulation (see section 1.4.1.2). Rupture boundary conditions are only applied inside the crack, without assuming any symmetry with respect to the rupture surface. By a simple rotation of the stress tensor, the local orientation of the crack is taken into account at each stress point. The grid size is controlled by the source discretization. The greater the number of grid nodes discretizing the finite source, the lower the grid size could be. Below the lower bound value associated with a given discretization, numerical artifacts are not negligible with respect to the spatial frequency content of the dynamic solution. Solutions converge for both point and finite sources by densifying the number of stress points in the source. Numerical scaling of boundary conditions is an important element of this convergence and allows the removal of high-frequency spurious effects of dynamic rupture conditions. For the self-similar crack, the comparison with the Kostrov's analytical solution shows that accurate stress singularities are obtained for various crack orientations with respect to the numerical grid. For spontaneous rupture modeling assuming a slip-weakening constitutive law, similar solutions are found for both rupture kinematics and excited wavefield in planar faults with any orientation. Finally, based on these results, rupture propagation over an arbitrary nonplanar fault is justified and then performed in the presence of heterogeneous medium.

3.1 Introduction

Dynamic modeling of seismic rupture has been performed applying different numerical tools such as finite difference (FD) methods (Madariaga, 1976), finite element (FE) methods (Day, 1977, Archuleta & Frazier, 1978) and boundary integral equation (BIE) methods (Das & Aki, 1977b, Andrews, 1985). The last approach seems the most appropriate for solving the boundary problem of seismic source dynamics because integral equations discretize only boundary structures. The stress field must be specified on a given discretized surface at time t . Nevertheless, the analytical construction of Green functions is required representing an important limitation of these methods : it is not possible to embed the dynamic source in a heterogeneous media. In spite of this limitation, the BIE methodology has been successfully used to simulate nonplanar seismic sources showing how important it is for rupture history to consider realistic source geometries (Aochi & Fukuyama, 2002). Moreover, application of FE methods has shown that rupture dynamics is largely influenced in dipping faults by the interaction with the free surface and by the two-way interaction between nonparallel fault segments (Oglesby et al., 2000, 2003). Thus, complex source geometry seems to be determinant in rupture evolution. On the other hand, simulations with FD approaches have revealed that heterogeneous surrounding media can also strongly affect the source dynamics. For instance, the presence of low-velocity zones directly acts on both rupture front velocity and fault slip (Mikumo et al., 1987, Harris & Day, 1997). If rupture governed by Coulomb friction propagates within a compliant fault zone, the strength and shape of the slip pulse will strongly depend on the elastic properties and geometry of such a zone (Ben-Zion & Huang, 2002). Even more, observational evidence of ground motion in some remarkable cases can only be explained if realistic heterogeneous structures are taken into account during simulations (e.g., Olsen, 2000, Shapiro et al., 2000). However, until now only planar source boundary conditions have been applied in FD methods to keep numerical errors under control. This constraint has precluded such approaches from considering different fault geometries. Is it possible to implement intricate source geometries in a FD approach ? If so, we contribute toward finding more realistic simulations by considering arbitrary heterogeneous media, composite friction laws, and complex source geometries.

We present a new approach to model dynamic faulting with any pre-established source geometry based in a FD formulation. We consider a new spatial stencil proposed by Saenger et al. (2000). Stress boundary conditions with numerical scaling features represent the source inside the numerical

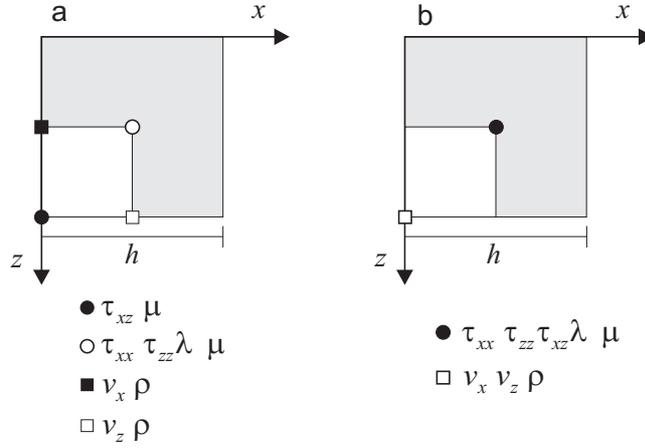


FIG. 3.1: Staggered-grid numerical stencils for a) the standard FD approach (Madariaga, 1976), and for b) the new FD approach (Saenger et al., 2000) used in this work. h is the grid size, $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$ is the second order stress tensor, (v_x, v_z) is the particle velocity vector, λ and μ are the Lamé coefficients, and ρ is the density.

grid. This is our original contribution. Accurate estimations of elastic fields are observed near the crack tip. We first introduce the elastodynamic equations for in-plane cracks in two dimensions, as well as the FD technique we use. Afterwards, boundary conditions are discussed in a separate paragraph. We show how rupture simulations of planar sources allow us to validate and estimate the accuracy of seismic source and wave modeling. Finally, we discuss the case of a simple scenario that includes a nonplanar source traversing a single heterogeneity in the elastic medium, mainly for illustration of our new approach.

3.2 Elastodynamic Equations for an Arbitrary Crack

Let us consider the following two-dimensional (2D) velocity-stress formulation of elastodynamic equations

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\
 \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \\
 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

for modeling *P-SV* wave propagation (Virieux, 1986). We assume a 2D medium with Cartesian coordinate axes x and z pointing rightward and downward respectively. The medium is linearly elastic and isotropic : it is fully described by λ and μ , the Lamé coefficients, and ρ , the density. The particle velocity vector is denoted by (v_x, v_z) , while the second-order stress tensor is denoted by $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$. The velocity-stress system (3.1) can be discretized by using a staggered grid in order to calculate spatial derivatives half-way between two grid points. Madariaga (1976) has proposed an elementary structure for such a grid (Fig. 3.1a) that has become a standard procedure in elastic wave propagation. The stencil structure is uniquely determined by the definition of the spatial differential operators. Authors have developed various schemes following the same staggered-grid strategy in order to improve the accuracy of numerical simulations in elastic wave propagation (see Virieux, 1986, Levander, 1988, among others). Furthermore, many people have successfully used this numerical approach for modeling dynamic propagation of planar cracks (e.g., Virieux & Madariaga, 1982, Olsen et al., 1997, Madariaga et al., 1998, Peyrat et al., 2001).

However, the stencil associated with this formulation has one strong disadvantage : neither normal and tangential stresses nor the two velocity components are defined in the same grid node (Fig. 3.1a). This limitation has prevented authors from applying boundary conditions to an arbitrary oriented crack. In order to avoid this problem, the stencil should be conceived in a different way. We define the partial differential operators D_x , along coordinate x , and D_z , along coordinate z , as follows

$$\begin{aligned}D_x(f_{ij}) &= \frac{1}{2h} \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \\ D_z(f_{ij}) &= \frac{1}{2h} \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}\tag{3.2}$$

which correspond to the same stencil as the one introduced by Saenger et al. (2000) (see appendix A). The associated staggered grid is unique (Fig. 3.1b) and defines the stress components at a single grid node. Similarly, velocity components are defined at a single node shifted half-way in both x and z

directions. In the present work we have applied fourth-order accurate operators in space increment (appendix A), and second-order accurate in time increment, as the best compromise between accuracy of wavefields and memory requirement to solve the system (3.1). We emphasize that this new finite difference approach retains the accuracy of the staggered grid : one must estimate stress derivatives at velocity grid points and, conversely, velocity derivatives at stress locations. On the whole, the three main advantages of the new approach with respect to the standard one are : the reduction of numerical-grid dispersion along preferred directions, a less restrictive numerical stability criterion (Saenger et al., 2000), and definition of the stress and velocity fields separately in only two staggered grids. Thanks to this particular wavefield discretization, we are able to apply boundary conditions for any crack orientation in specific nodes. The way we impose such boundary conditions will be described in the next section. In order to simulate an unbounded space, we have implemented the standard Perfectly Matched Layer (PML) absorbing boundary conditions in the external edges of the computational domain (Berenger, 1994, Hastings et al., 1996).

3.3 Crack Boundary Conditions

Considering planar crack geometries may reduce the computational effort by a factor of two when the problem is symmetric. This is the case when modeling a half-space bounded by the plane containing the crack (e.g., Madariaga, 1976, Das & Aki, 1977b). This fact has led authors to introduce Cauchy mixed boundary conditions that guarantee such symmetry : depending on the fracture mode, some stress components are dropped inside the crack on the crack plane, while certain velocity components are equal to zero outside the crack on the crack plane (see section 1.5.1.2). Because we should take into consideration complex crack geometries, we should not take advantage of such a symmetry even for the case of planar cracks. Therefore, we only impose stress boundary conditions inside the crack, and deduce wavefields anywhere else by solving the partial differential equations (3.1). We have verified that velocities outside a horizontal crack, on the crack plane, are automatically equal to zero in a homogeneous medium, thanks to the symmetry of the spatial finite-difference stencil. Authors such as Olsen et al. (1997) and Madariaga et al. (1998) have used fourth-order spatial operators for mixed boundary conditions within a fault zone discretized by two planes of grid points. As a consequence, they improved the precision of wavefields (especially the high frequency content) near the crack tip compared with previous results (Madariaga, 1976, Virieux & Madariaga, 1982). An alterna-

tive methodology for mixed boundary conditions has also been proposed by Nielsen & Olsen (1998) reducing spurious oscillations by spatially matching the friction and the slip on the same grid nodes. In the present work, because stress components are defined at the same grid points, we proceed in the following way for setting local boundary conditions.

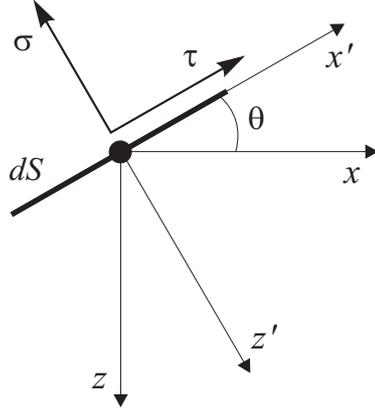


FIG. 3.2: Shear (τ) and normal (σ) stresses acting on a crack surface (dS) tilted at an angle θ with respect to the Cartesian frame of reference $x - z$. The reference frame $x' - z'$ always matches the crack orientation.

correspond to the tangential and normal stresses to the crack point (see Fig. 3.2). For in-plane conditions, one has to specify the shear stress τ , which in general is assumed to drop down to its dynamic friction level as a function of the normal stress σ and the friction coefficient. Once the shear stress is imposed at a given crack point, we transform the stress tensor τ_{mn} back to the original coordinate system, $x - z$, by applying the following inverse transformation :

$$\tau_{ij} = \tau_{mn} \beta_{im} \beta_{jn}$$

where β_{ik} are the director cosines of the transposed matrixes used in equation (3.3). Finally, we perform a new time extrapolation of the velocity field by the finite-difference explicit second-order extrapolation in time. The above procedure shows the general way we apply the crack boundary conditions in a single stress-grid point inside the crack. For a numerical analysis of this new strategy for setting local boundary conditions, we shall first consider a

Let us consider a local Cartesian reference frame, $x' - z'$, that matches the crack orientation at a given stress-grid point of the new staggered grid (Fig. 3.2). The crack orientation angle with respect to the absolute Cartesian coordinate system, $x - z$, is denoted by θ . Thus, applying a second order invariant transformation, we may express the stress tensor in the new rotated frame of reference $x' - z'$, in terms of the non-rotated stress components τ_{ij} , as follows :

$$\tau_{mn} = \tau_{ij} \beta_{mi} \beta_{nj} \quad (3.3)$$

where β_{kl} are the director cosines of the rotation matrix associated with the rotation of axes. The components $\tau_{x'z'}$ and $\tau_{z'z'}$ in equation (3.3), from now on respectively denoted by τ and σ ,

crack described by a single point source before handling more complex crack geometries.

3.4 Point Source Analysis

The numerical scaling between the grid spatial size and the physical dimension of a given seismic source allows one to discretize such a source by a different amount of stress-grid points. This is done by adapting the grid size accordingly. As the amount of points describing the source increases, we might expect the accuracy of the solution to increase. The velocity grid is still shifted by half the grid step on both cartesian directions. The slip at a point source can be estimated from the particle displacement values around the point source. Since the slip enters in the rupture failure criterion, an accurate scheme is required. Let focus our attention on the discretization of a point source before analyzing the slip estimation at such a point source.

3.4.1 Point Source Discretization

Let us first consider a point source which emits the same wavefield for any fault orientation. Numerically, several configurations of clusters of stress-grid nodes will satisfy such invariance with respect to the fault orientation. For instance, the simplest configuration is the one-point numerical cell which will not be considered because it provides inaccurate results. The next one is the four-point numerical cell. It consists of four stress-grid points describing one square (black points, Fig. 3.3a). Similarly, all other cells, nine-point (black points, Fig. 3.3b), sixteen-point, twenty-five-point and so on, will also provide the same wavefield for any source orientation. Inside a numerical cell, as an independent unity, the same boundary condition is applied to each stress-grid point. The boundary condition is applied as described in the previous section. Therefore, an oriented seismic point source is represented by one numerical cell, and we expect a better azimuthal behavior as the number of stress-grid points increases.

In order to verify the azimuthal invariance of our point source discretization model, we compare velocity seismograms around one four-point numerical cell for six different fault inclination angles. Results (Fig. 3.4) show that the point source model satisfies the wavefield expectation : no significant variations were found for different fault orientations. Seismograms were computed in the same seven observational positions (black circles) with respect to the point source (white square) orientation θ . Thanks to the new stencil which regroups the two velocity components in the same grid nodes

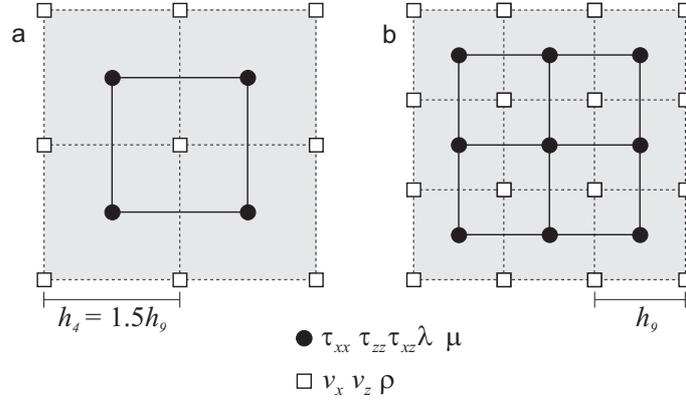


FIG. 3.3: Two equivalent numerical cells : a) four- and b) nine-point cells with equal spatial support Ω (shaded areas). They obey the scaling relation $h_n \sqrt{n} = \sqrt{\Omega}$, where h_n is the grid size associated with a given numerical cell containing n stress-grid points.

(Fig. 3.1b), the velocity field was rotated at each observational point into the parallel ($v_{x'}$) and normal ($v_{z'}$) directions to the fault plane. To keep high frequency contents of wavefield under control, we implemented a linear time-weakening constitutive relation. A time lag of 0.1 s was taken for the stress to drop from its initial zero value down to the dynamic level of -30 bar .

Notice the good agreement between the six superposed traces in each one of the seven observational points of Fig. 3.4. Even the double-couple radiation patterns of the P - and S -wave can be clearly identified. If we analyze the signals in the two observational points that are aligned with the fault plane, we see no ground motion in the parallel component $v_{x'}$. In contrast, we find in the normal component $v_{z'}$ the near-field term deformation with no P -wave signature followed by the energetic S -wave amplitude. Likewise, similar observations can be made at the middle point that lies perpendicular to the fault plane.

A point source always has a finite support, especially in finite difference formulations when source discretization is performed as shown in Fig. 3.3. Discretizing such a source by an increasing number of nodes should lead to similar results if we respect its physical support. This consideration is translated into the following scaling rule for a 2D geometry :

$$h_n = \sqrt{\frac{\Omega}{n}}, \quad (3.4)$$

where the surface Ω is the physical support of the point source (shaded areas,

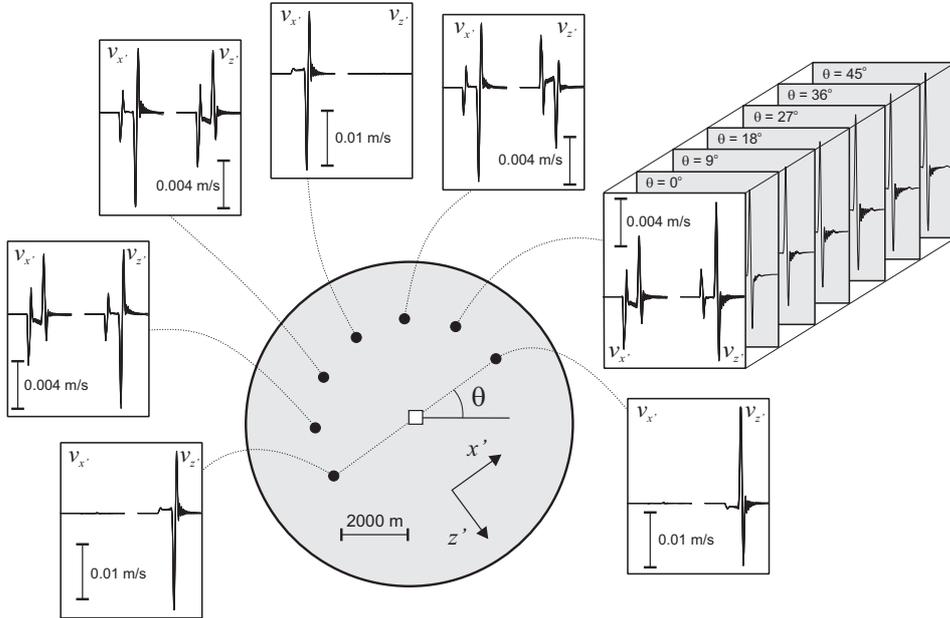


FIG. 3.4: Velocity seismograms (time window 2.4 s) around one point source (white square) for six different fault inclination angles θ computed in seven equidistant positions (black points) with respect to the source. To allow comparison, velocity components were rotated for every θ into the tangential $v_{x'}$ and normal $v_{z'}$ directions to the fault plane, and superposed (white panels).

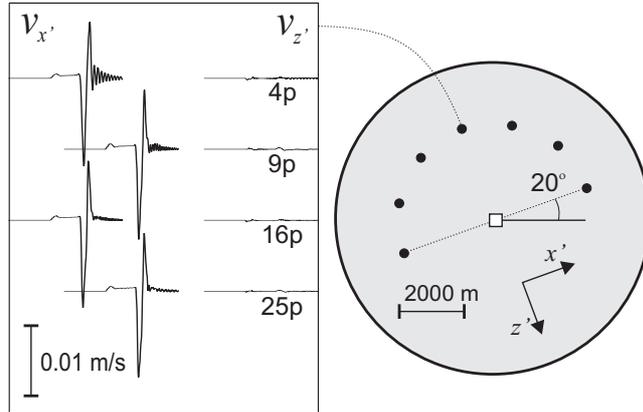


FIG. 3.5: Velocity seismograms (time window 2.4 s) computed around a 20° tilted point source (white square) represented by : four-, nine-, sixteen- and twenty-five-point equivalent numerical cells.

Fig. 3.3), and h_n is the grid size related to a given numerical cell containing n stress-grid points. So, the same wavefield will be excited by any numerical cell we place inside the surface Ω if the same boundary condition is applied in every node. In other words, whatever the number of stress-grid points with equal stress drop put inside Ω , the wavefield generated by this seismic source remains identical. To illustrate the scaling relationship (3.4), we compared seismograms generated with several equivalent numerical cells (Fig. 3.5). This comparison was carried out for many different fault orientations obtaining basically the same results. However, we found that the content of numerical noise varies with the fault angle, with the maximum level around the middle direction between 0° and 45° . We point out that these two directions are privileged by the spatial differential operators (see equation 3.2 and appendix A). Fig. 3.5 presents results that correspond to a rather noisy case of a 20° tilted source for four-, nine-, sixteen-, and twenty-five-point equivalent numerical cells with a physical support Ω equal to 3600 m^2 . Similarly to the simulations of Fig. 3.4, the same linear time-weakening constitutive law was used to compute seismograms in the same seven observational points (black circles). We observed a good agreement between signals. Both the waveform and the true amplitude of all traces are quite similar to each other. However, a strong reduction of numerical noise should be noted when considering sources with more than four stress-grid nodes. Exactly the same behavior was found in the other six observational points not shown in this figure. In accordance with our expectations regarding the numerical scaling, as the order of the numerical cell increases, the numerical noise decreases.

3.4.2 Slip and Slip-Rate Estimation

The second point we address in order to completely describe our point source model is the slip and slip-rate estimation. The slip function S on the fault plane is the relative displacement between the positive (D^+) and the negative (D^-) fault blocks as assumed in this equation :

$$S(t, \Phi) = D^+(t, \Phi) - D^-(t, \Phi) \quad (3.5)$$

where the time is denoted by t and the constitutive law by the local set of parameters Φ . We shall assume that the slip will keep the same sign during the rupture process. The fault plane always passes through the center of the numerical cell (Fig. 3.6). Thus, velocity-grid points i around the cell belong either to the positive (p nodes, white squares) or the negative (q nodes, gray squares) fault block. The particle displacement components u_i parallel to the broken surface at these points can be computed by a straightforward

integration of the projected velocity field. Hence, for a given set of constitutive parameters Φ , we define the positive fault block displacement D^+ as the average function of the p weighted particle displacements, \tilde{u}_i , associated with the p velocity-grid points embedded within the block :

$$D^+(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \tilde{u}_i^2(t)}{p}} \quad (3.6)$$

where the weighted displacement functions are

$$\tilde{u}_i(t) = u_i(t, \theta) \mathcal{H}_i(\theta). \quad (3.7)$$

The weight functions \mathcal{H}_i should be defined so that \tilde{u}_i do not depend on θ . In other words, we look for a factor that yields the block displacement D^+ independent of fault orientation. The way the displacements u_i depend on θ can be easily understood as follows. For any time t , the function u_i in a given velocity-grid point i will be at its maximum if a perpendicular line to the fault plane passing through the center of the cell coincides with such a point. Conversely, u_i will be at its minimum (i.e., equal to zero) if the fault plane coincides with the point. From this we assume that, for any time t , the maximum value of u_i with respect to θ at a given point i ($\max_{\theta}\{u_i\}$) corresponds to the reliable displacement value for the slip estimate. Since in general no velocity-grid point necessarily coincides with the perpendicular line to the fault plane for a given fault orientation θ , the weight functions \mathcal{H}_i must operate over the displacements u_i to yield the maximum values $\max_{\theta}\{u_i\}$ at every point i . As a result, we could determine the positive block displacement D^+ through equation 3.6 independently of θ .

At fixed fault orientation θ , the ratio between $\max_{\theta}\{u_i\}$ and u_i remains invariable for any time t in every velocity-grid point i . Consequently, we define the weight functions as follows :

$$\mathcal{H}_i(\theta) = \frac{\max_{\theta}\{u_i(t, \theta)\}}{u_i(t, \theta)} \quad (3.8)$$

and found they are time independent. These functions, input into equation (3.7), gives the reliable displacement value for slip estimate $\max_{\theta}\{u_i\}$ at every velocity-grid point i . Functions \mathcal{H}_i are constructed as a function of θ for a given numerical stencil and for a given kind of numerical cell. Because these functions are normalized with respect to the maximal displacement value, they do not depend on the elastic properties of the media inside which they were constructed. In fact, they represent the radiation pattern of the

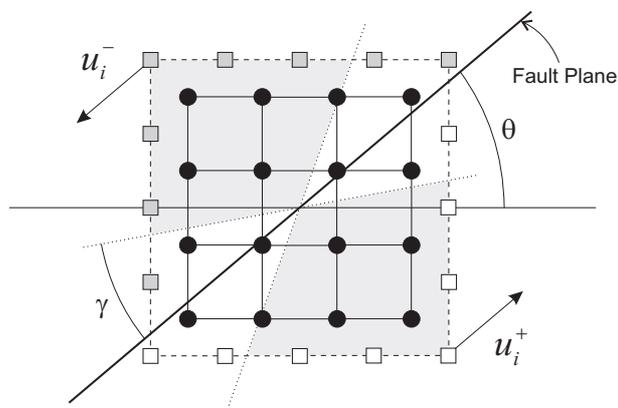


FIG. 3.6: Sixteen-point numerical cell. Both stress- (black points) and velocity-grid (squares) points are separated in two groups by the fault plane (black diagonal line) tilted by an angle θ . The angle γ defines the angular sector (shaded areas) needed to compute the fault slip S (equation 3.5) from individual displacement components u_i (see text).

displacement component parallel to the fault plane seen from every point i around the cell. That is the reason why they do not depend on time. So, once they are computed, they could be stored for future use for boundaries of any shape and propagating media.

Because the particle displacement u_i at a given velocity-grid point i tends to zero as the fault plane approaches it, if the fault plane coincides with this point the quotient in equation (3.8) becomes infinite. Consequently, there exists an angular vicinity γ around the fault plane (Fig. 3.6) in which the quotient can not be accurately determined because particle displacement is too small. For that reason, to compute the fault block displacement using equation (3.6) we always neglect the velocity-grid points lying inside this vicinity (white areas, Fig. 3.6). We have found suitable values for γ around 20° for point sources. However, as we shall see in the next section, such an angular vicinity will depend on the order of numerical cells when they interact dynamically between each other. In all cases, we also neglect the four velocity-grid points located at the cell corners. There, the displacements are underestimated since they see both sides of the cell.

To determine the negative fault block displacement D^- , we perform the same procedure described in the equations above but considering the q velocity-grid nodes. Finally, one may deduce the slip over the fault plane using equation (3.5). The slip-rate is determined in exactly the same way but without integrating the velocity field in the p and q velocity-grid nodes.

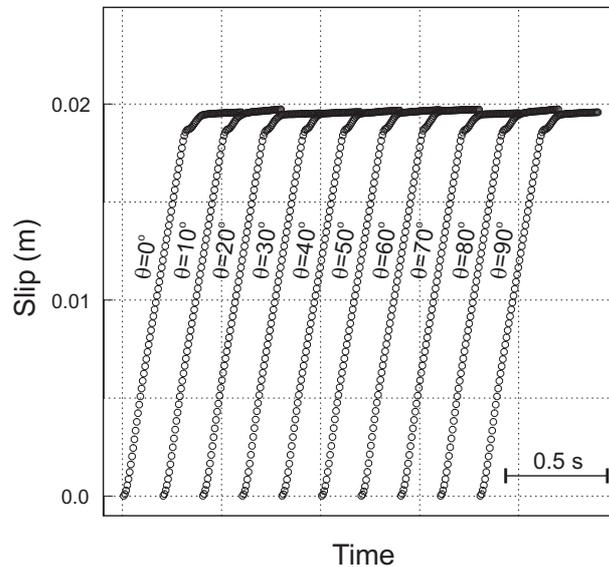


FIG. 3.7: Slip functions (equation 3.5) computed in the same point source with ten different orientations. The source is represented by a sixteen-point numerical cell (figure 3.6). The slip estimate is independent of fault orientation.

Note that normalized functions \mathcal{H}_i are valid also for the velocity field.

Fig. 3.7 shows the slip function evolution on one point source for different fault orientations. For these simulations we choose a sixteen-point numerical cell like the one in Fig. 3.6. We considered the same time-weakening constitutive relation we used before, condensed into Φ . The only variable parameter between simulations is the point source orientation. We see that slip functions are not dependent on the source orientation. These results correspond to a particular set of Φ . However, in order to verify that weight functions \mathcal{H}_i are also independent of the constitutive friction parameters, we have performed many tests for different choices of Φ and found the constitutive law to have no influence. Of course, we also verified the general validity of our slip estimation procedure. It works in the same way for any kind of numerical cell we consider.

The accurate estimations of the slip or the slip-rate over the fault plane are key elements for friction behavior. Rupture simulations with complex friction laws, the slip-weakening one among others, could now be implemented in our numerical model.

3.5 Planar Finite Source

A finite source may be thought of as a set of grid points which interact dynamically with each other during rupture evolution. This is by no means an addition of single point source solutions. As a matter of fact, such interaction is the critical issue of our rupture model and we should study how discretization affects numerical solutions. The validation of our finite source model will allow us to simulate the spontaneous rupture propagation of sources governed by sophisticated constitutive relations in a rather accurate way.

3.5.1 Numerical Accuracy

Numerically, a finite source will be a set of neighboring cells placed alongside each other without sharing any stress-grid point (see Fig. 3.8). In other terms, each stress-grid point of the source belongs to a single numerical cell. The set of cells should mimic the physical geometry of the fault (solid lines, Fig. 3.8). Fig. 3.8 shows how the greater the number of nodes within each cell, the smoother the discrete fault geometry (dotted lines). Thus, the fault geometry will be fairly well discretized as one increases the order of cells (e.g., Figs 3.8c and d). The zigzag discrete shape associated with low order numerical cells (e.g., Figs 3.8a and b) has undesired implications in wave-field and fault slip estimation. Depending on the finite source orientation angle θ , solutions may degrade and hence differ from each other. This is a consequence of destructive dynamic interactions of cells. We apply local boundary conditions in each numerical cell. This means that the individual point source orientation θ_i in a given cell (see Fig. 3.8) is the tangent angle to the discrete fault geometry (dotted lines). Consequently, as the number of points within the cells is higher, every θ_i tends to θ thus the destructive interferences tend to disappear, i.e., the degradation of solutions. Generally speaking, the higher the order of cells, the smaller the trace of source discretization in numerical solutions.

A minimal grid size should be considered because of the interaction between boundary nodes. As the grid size is smaller, the dynamic interaction between numerical cells is stronger. For this reason, the smoothness of fault discretization becomes critical when scaling down the mesh spacing. For a given order of cells, there exists a minimal grid size beyond which the interference between cells is destructive enough to perturb solutions. So, in order to solve high-frequency content during rupture modeling by scaling down the finite difference space increment, we must consider high-order numerical cells to discretize the fault. Fig. 3.9 illustrates the criterion for numerical accuracy of boundary conditions we have determined for our finite source model.

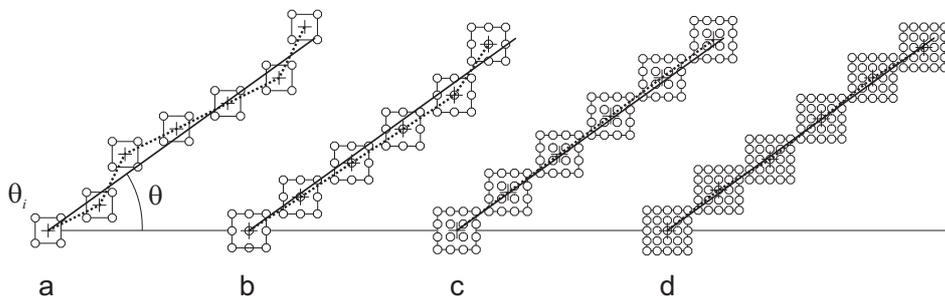


FIG. 3.8: Several discretizations of the same planar finite source (diagonal solid lines) for a) four-, b) nine-, c) sixteen- and d) twenty-five-point numerical cells. Small circles represent the stress nodes. Individual boundary condition is applied on each cell following the local fault orientation angle θ_i which corresponds to the tangent angle to the discrete source geometry (dotted lines).

This criterion has been determined experimentally by numerical investigation over a wide range of values for n and h_n . The shaded area represents the numerical domain in which our method yields accurate solutions. It means that, inside this region, solutions are not degraded by destructive interference. Nevertheless, despite the weighting procedure introduced in section 4.2 we found that, in the case of finite sources, the averaged slip S (equation 3.5) over the rupture surface exhibits a parabolic increase from the reference inclination value at 0° up to a maximum overestimation of 170% at 45° . This angular modulation of the slip amplitude is periodic every 90° and remains the same for any kind of numerical cells we use to discretize the source within the shaded area of Fig. 3.9. Numerical simulations have shown that neither the rupture evolution nor the exited wavefield are affected by such slip variations when rupture is governed by the slip-weakening friction law. However, we may correct the slip function (equation 3.5) for any orientation θ in order to yield its value to the reference one for $\theta = 0^\circ$ by a normalized factor $f(\theta) = A\theta^2 + B\theta + C$, where $A = 0.0002$, $B = -0.0168$ and $C = 1.0$. This factor was also determined numerically, and it yields the slip and slip-rate functions no longer dependent on fault orientation. The dashed line of Fig. 3.9 represents the numerical boundary over which solutions are perturbed by a factor smaller than 2 with respect to the horizontal reference case. In the region delimited by such a line and the dashed region, destructive interactions are important enough to prevent a simple correction such as the one mentioned before which is only valid inside the shaded area.

As we mentioned in the last section, the angular vicinity γ (Fig. 3.6)

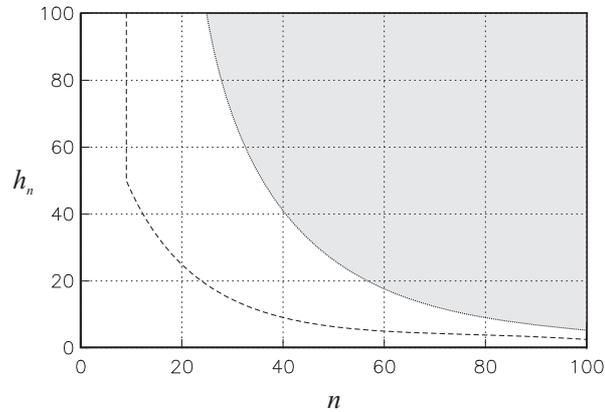


FIG. 3.9: Accuracy criterion that relates the grid size, h_n (in m), to the number of stress-grid points per numerical cell, n , in a given finite source. Shaded area shows the domain inside which numerical solutions are robust for any kind of source geometry. Surprisingly, in order to increase numerical resolution, it is not enough to reduce h_n : we also need to adapt the source boundary conditions adding stress-grid points. Within the region delimited by the dashed line and the shaded area, solutions may disagree up to a factor of two as a function of fault inclination. No parabolic correction can be applied there (see text).

required to evaluate the fault slip, depends on the order of cells when they interact dynamically. So as to minimize undesired perturbations in the slip function (equation 3.5) due to the source discretization, we found that the velocity-grid nodes (squares, Fig. 3.6) which should be taken into account in equation (3.6) are those located as far as possible from the contact zones of the two neighboring cells. In other words, those points lying in the vicinity of the normal to the local fault plane that crosses the center of the cell (inside the shaded areas of Fig. 3.6). Therefore, we have deduced a formula to determine γ that optimizes the slip evaluation in finite sources taking account of the aforementioned consideration. This formula is defined in terms of n , the number of stress-grid points per cell, and states that $\gamma = \arctan(\sqrt{n} - 1)$. Geometrical considerations lead us to deduce this equation that guarantees, for any kind of numerical cells, at least one, and maximum two velocity nodes inside the shaded area of each fault block.

The scaling relationship that assures the equivalence between different point sources (equation 3.4) is still strictly valid for finite source modeling. However, finite sources present a length L that is usually much greater than

the numerical source thickness T . On that account we should expect some threshold value for the aspect ratio beyond which solutions for different source discretizations are similar (i.e., different thicknesses or kinds of numerical cells). Numerical tests for different combinations of L and T have confirmed this hypothesis revealing such a geometrical condition. It tells us that the fault aspect ratio must be smaller than approximately 0.033. In other terms :

$$L \gtrsim 30.0 h_n \sqrt{n} \quad (3.9)$$

where $h_n \sqrt{n}$ is equal to T , and h_n is the grid space increment related to a given order of numerical cell containing n stress-grid points. Equation 3.9 represents an efficient criterion to guarantee the low-frequency equivalence between different finite source discretizations. One straightforward consequence of this condition is that we are not obliged to consider a fine mesh in large scale simulations to maintain the same numerical accuracy. This means that a considerable coarse mesh would be enough to obtain similar low-frequency results. Of course, if we are looking for high-resolution modeling, then we should reduce the spatial grid size h_n being always aware of the accuracy criterion showed in Fig. 3.9.

3.5.2 Self-Similar Constant Velocity Crack

Kostrov (1964) has constructed a closed-form solution for a self-similar crack propagating at a constant velocity. This analytical example may be used to validate numerical solutions. Yet, dynamical crack growth always exhibits numerical instabilities that are caused by the discrete grid-step advance of the fracture edge. Previous works have found inaccurate numerical solutions for the self-similar case, especially when evaluating the shear stress concentration due to the S -wave traveling ahead of the rupture front (Virieux & Madariaga, 1982, Trifu & Radulian, 1985). This problem mainly arises from the application of low-order spatial differential operators. More recent FD investigations have reduced this problem by increasing the spatial support of derivatives and by improving the source boundary conditions (Madariaga et al., 1998). On the other hand, the spurious oscillations associated with rupture growth can be controlled if dissipation terms are introduced in the formulation of the problem (Knopoff & Ni, 2001). These kinds of artifacts indeed help us to clean up numerical solutions. Nevertheless, they will not necessarily improve the accuracy of the stress field determination (Kame & Yamashita, 1999) for instance. Thus, to validate our finite source discretization model introduced in the last section, we have performed self-

similar crack simulations without any kind of dissipation terms for different crack inclination angles with respect to the FD grid. Taking account of these artifacts may reduce our requirements allowing faster simulations.

The Kostrov solution corresponds to a planar source geometry. So, in order to well discretize such geometry for any crack orientation θ , we have used high-order numerical cells (one-hundred-point cells). As a result, for every orientation θ , the discrete fault traces are smooth enough to fairly represent the straight crack shape. The rupture is bilaterally symmetric and propagates in a Poissonian medium at 0.5α , the P -wave velocity. The value of the shear stress τ drops abruptly from the pre-stress level to some lower level, say τ_f , the dynamic frictional stress. All stresses were normalized by the stress drop $\tau_o - \tau_f$, where τ_o is the initial state of stress, so that all results presented here are for a dimensionless stress drop equal to unity.

Figs 3.10a and 3.10b show, respectively, the slip and the shear stress evaluation in four equidistant points placed along the crack plane for six different inclination angles with respect to the horizontal Cartesian axis. Although oscillations could be observed, the overall estimation is accurate and fits quite well the analytical predictions. We have performed the same test discretizing the source with numerical cells of smaller order finding less accurate results. As we explained in the last subsection, there is a geometrical reason behind this problem that determines the way the cells interact. Because the analytical solution corresponds to a straight rupture surface, we must consider high-order numerical cells (see Fig. 3.8) in order to reasonably mimic this specific source geometry and hence to achieve high resolution simulations without undesired cell interaction. On the whole, we may conclude that numerical shear stress and slip computation for any fault angle is accurate enough for dynamic rupture modeling with slip or slip-rate dependent friction behaviour. Solutions do not depend on fault orientation. Furthermore, we have checked that, as we increase the order of numerical cells, not only are the elastic fields better determined, but also the observed spurious oscillations decrease.

3.5.3 Constitutive Friction Law

At the present time, many questions about earthquake mechanics have been answered thanks to complex frictional models which have emerged from laboratory experiments (see Scholz, 1998, and references therein). The main root of these quite predictable models lies in the tectonic observation that earthquakes happen almost always on pre-existent fault surfaces or at tectonic plate boundaries. This means that both rupture initiation and pro-

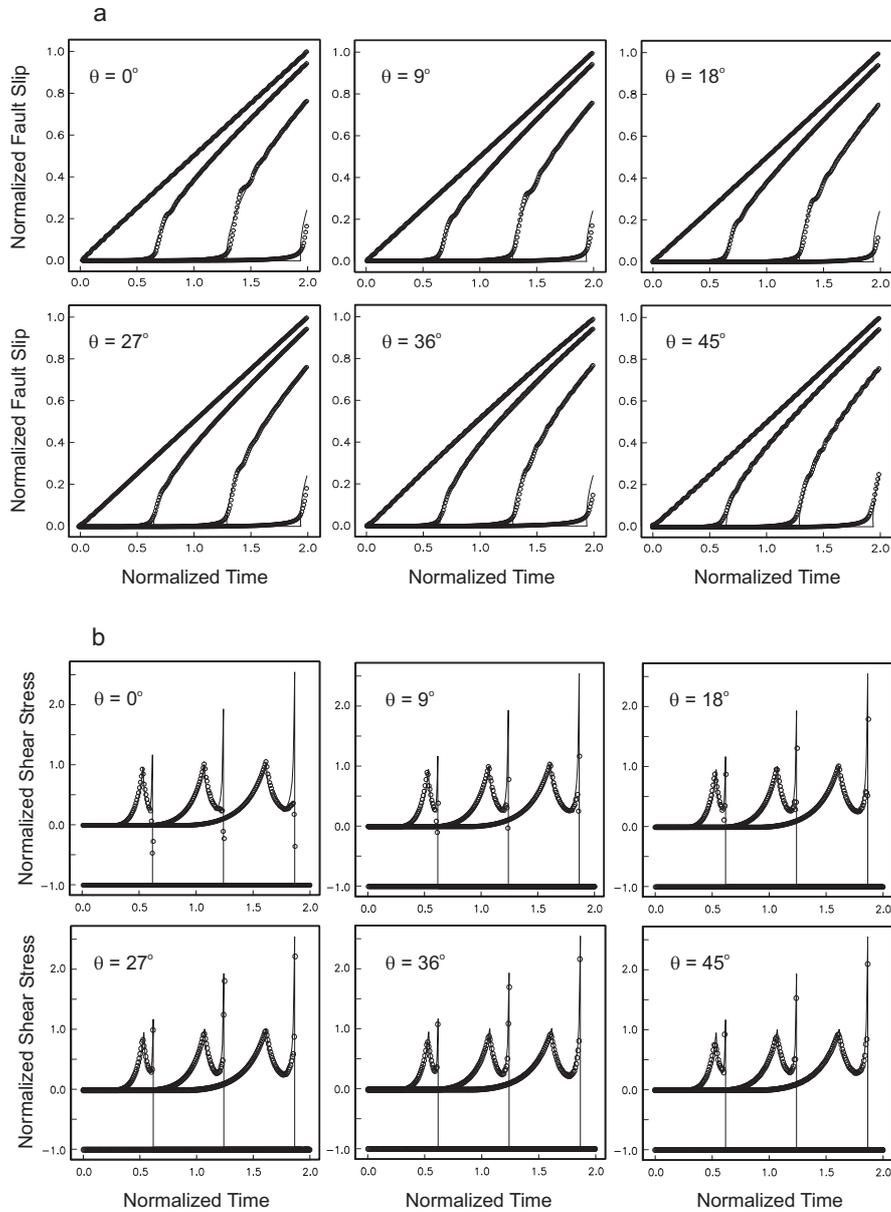


FIG. 3.10: Comparison between analytical (Kostrov, 1964, solid lines) and numerical (this work, circles) solutions for a) fault slip and b) shear stress at four equidistant points of a self-similar crack propagating at 0.5α , the P -wave velocity. Each panel corresponds to a given crack inclination θ with respect to the numerical FD grid. Results should be the same for every θ , only slight oscillations are observed.

	$v_p(m/s)$	$v_s(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$
Medium	4000	2300	2500
Circular LVZ	2200	1300	1400

TAB. 3.1: Velocity structure of the elastic medium used in Fig. 3.15. v_p and v_s are, respectively, the S - and P -wave velocities, and ρ is the density.

pagation are frictional rather than fracture phenomena. However, we have not yet studied the aforesaid complex constitutive relations in our numerical modeling. Instead, we have chosen the widely accepted slip-weakening (SW) friction law (Ida, 1972, Andrews, 1976a) for our first investigation of rupture properties. The whole seismic cycle as a consequence of a regular stick-slip frictional instability as well as rupture pulse characterization, for instance, can be explored in future works with our new approach if constitutive relations depending on slip-rate, time, or state variables are taken into account (e.g., Ruina, 1983, Nielsen & Carlson, 2000).

The SW friction law we have tested depends on the initial shear stress on the fault surface, τ_o , and the three constitutive parameters cohesion strength, τ_u , dynamic shear stress level, τ_s , and characteristic weakening length, δ_c (Andrews, 1976a). Mathematically, the way the shear stress τ depends on the slip S is expressed by the following equation :

$$\tau = \begin{cases} \tau_u - (\tau_u - \tau_s) \frac{S}{\delta_c} & ; 0 \leq S \leq \delta_c \\ \tau_s & ; S > \delta_c. \end{cases} \quad (3.10)$$

We should point out that Coulomb-type friction laws could also be easily integrated, for example, in a similar way as proposed by Aochi et al. (2002) because normal (σ) and shear (τ) stresses are computed at the same grid nodes (see Figs 3.1b and 3.2). The material strength is finite. Hence, the shear stress concentration near the crack tip is bounded to some prescribed yield value. In the friction model we have chosen (equation 3.10), such a value corresponds to the strength τ_u . Once the yield stress is reached at a given fault point, stress drop begins with increasing slip.

According to the equation (3.10), in order to estimate the shear stress within the cohesive zone we need the slip which, in turn, requires the shear stress to be computed. So, to initiate the rupture in a given fault point, we perform an iterative procedure for shear stress and slip estimations : once the yield stress has been reached, we drop the shear stress to the friction level τ_s , we deduce the slip after one time step by FD integration, we obtain a new shear stress via the friction law (equation 3.10) to restart, one time-step back, a new slip computation. We stop iterating when small enough variation in slip

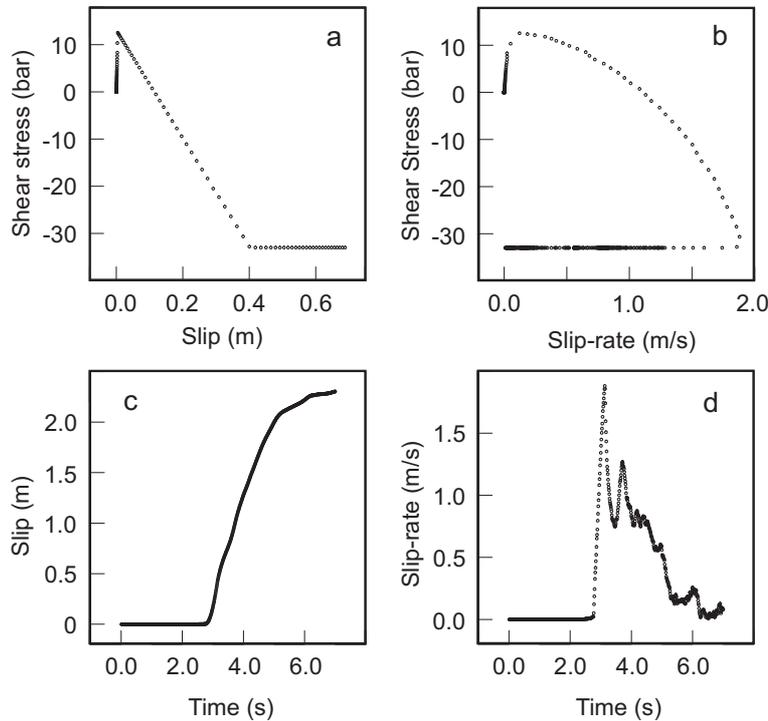


FIG. 3.11: Numerical solutions at a fault point located in the middle of the spontaneous rupture zone governed by the linear slip-weakening friction law (equation 3.10) displayed in panel (a). See text for explanation.

is found. In this way we are able to know the next stress state after rupture initiation to continue the stress drop according to our linear constitutive law for successive time-step extrapolations. During rupture process, the same shear stress is applied equally at each node of the concerned numerical cell following the procedure described in section 3.

Fig. 3.11 displays several phase diagrams for one point in the middle of the source during spontaneous rupture propagation. The relation between pairs of parameters allows one to check the accuracy of the implementation of the constitutive law (Fig. 3.11a) and wavefield estimate. The elastic properties of the homogeneous medium are shown in Table 3.1. For this simulation we have chosen the following constitutive values : $\tau_u = 13 \text{ bar}$, $\tau_s = -33 \text{ bar}$ and $\delta_c = 0.4 \text{ m}$, with an initial shear stress $\tau_o = 0 \text{ bar}$. To initiate the unilateral rupture, we impose rupture in a nucleation zone 2 km long at one extremity of a 10 km fault governed by the same parameters except for the yield stress, τ_u , that is assumed equal to the initial stress, τ_o .

For this simulation we used thirty-six-point numerical cells with a FD spatial increment $h = 15 \text{ m}$ which is accurate enough for a planar fault parallel to a reference axis. Soon after rupture nucleation, the rupture front velocity becomes super-shear because of the choice of friction parameters. Das & Aki (1977b) have defined the upper yield point parameter S as the ratio between the stress excess ($\tau_u - \tau_o$) and the stress drop ($\tau_o - \tau_f$). Under plane-strain conditions, for values of S less than 1.63, the crack starts growing with a sub-Rayleigh velocity, but as its length increases, the velocity changes to super-shear and finally approaches the P -wave velocity. That happens in our case given that $S = 0.39$. As it can be clearly seen in Fig. 3.11d, the observational point lies in a fault region for which the rupture front has reached the super-shear regime. Indeed, the slip-rate peak associated with the rupture initiation (around 3 s) arrives before the slip-rate perturbation of the S -wave (around 3.5 s) traveling behind the rupture front. After the S -wave, we found perturbations due to the back propagating P - and S -wave arrest pulses around 5 and 6 s after initiation. Only small numerical oscillations are found. Figs 3.11a and 3.11b show the shear stress evolution as a function of slip and slip-rate, respectively. No slip is found before the arrival of the rupture front. In contrast, we see a small increment in the slip-rate just before the material yield stress is reached. This lack of precision can be diminished by scaling down the grid size h . We recall that no boundary condition is imposed in the velocity field outside the crack (see section 3). Finally, Fig. 3.11c shows the slip history at the same fault point. Slope variations in the slip function around 3.5, 5 and 6 s, correspond to the direct S -wave and the two aforementioned arrest pulses, respectively. Likewise, we may estimate a rise-time of about 3 s.

3.5.4 Spontaneous Rupture Propagation

An other way to show how our finite source model does not depend on fault orientation is to compare solutions for spontaneous sources with different orientations. Similarly to the example presented in the above paragraph, the simulations performed for this section also include spontaneous rupture growth governed by the slip-weakening constitutive law we have described. In all simulations from now on, we took the initial stress state $\tau_o = 0 \text{ bar}$, and the constitutive parameters over the rupture surface as $\tau_u = 17 \text{ bar}$, $\tau_s = -20 \text{ bar}$ and $\delta_c = 0.2 \text{ m}$. Only the fault orientation angle θ varies. The elastic properties of the homogeneous medium are given in Table 3.1. We used one-hundred-point numerical cells to discretize the sources in a FD mesh of 1200×1200 grid points with a spatial increment

$h = 10$ m. Fig. 3.12 shows velocity seismograms for six different fault orientations computed in the same seven positions with respect to the fault plane (black points).

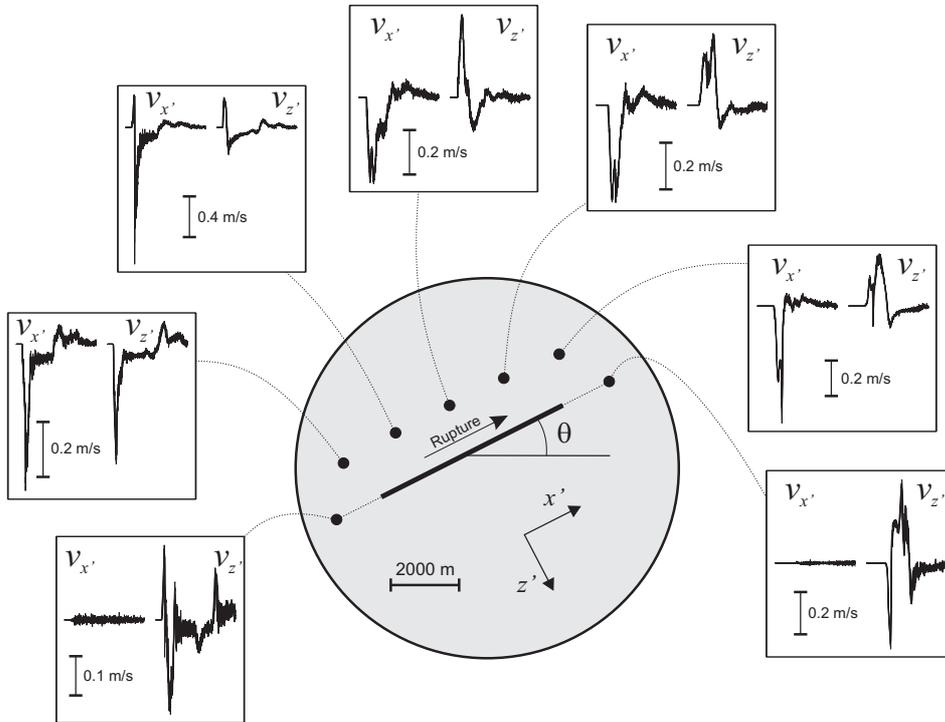


FIG. 3.12: Velocity seismograms (time window 7 s) computed at seven positions (black points) around one finite source (diagonal solid line) for six different fault orientation angles θ (0° , 9° , 18° , 27° , 36° , and 45°). Velocity components are rotated for every θ into tangential ($v_{x'}$) and normal ($v_{z'}$) directions to the fault plane, and superposed (white panels). The spontaneous rupture is governed by the slip-weakening constitutive law (equation 3.10). The inclination θ only induces numerical noise.

So as to allow comparison between different orientations, seismograms were rotated into the parallel ($v_{x'}$) and normal ($v_{z'}$) directions to the fault plane, and then superposed within the white panels. We considered a final source length of 6 km with a nucleation zone of 1.5 km starting from the left fault edge. We see a good agreement between seismograms for all fault orientations. Because the rupture is governed by the SW constitutive law, this implies that the slip estimation during rupture evolution is independent enough of θ to yield the same rupture histories for all cases. Figs 3.13a and

3.13b show this fact : as a function of time and fault position, our slip and slip-rate estimations on finite sources are satisfactorily independent of fault orientation. As we mentioned before, this feature is important because the dynamic rupture evolution depends directly on the slip S . Any inaccuracy in its estimation may change the rupture history and hence the radiated wavefield.

Looking closer, both figures show the same elapsed time in all cases for the entire rupture. Moreover, as a consequence of the constitutive parameter values, the nondimensional parameter S is equal to 0.85 (see last subsection) and then the rupture front exerts the so-called bifurcation (Andrews, 1976b) : soon after rupture nucleation, the rupture front velocity jumps from a sub-shear to a super-shear regime at the same time for all orientation angles around 0.7 s after rupture nucleation. Figures 3.14a and 3.14b compare the slip and the slip-rate functions at the middle-point of the spontaneous rupture region for the six fault orientations. We confirm the good estimation of the kinematical parameters independently of θ . We can also identify the S -wave travelling behind the rupture front as mentioned before (arrow, Fig. 3.14b). Furthermore we clearly see the P stopping phase that abruptly changes the slip rate around 2.2 s after rupture initiation (arrow, Fig. 3.14a) yielding a rise-time of about 2.3 s . Judging from these results, we may say that given the choice of numerical parameters we are using, oscillations are weak and do not affect the rupture behavior.

Simulations presented in this section make us confident that spontaneous rupture is adequately modeled when proper source discretization for boundary conditions is performed. This allows us to consider nonplanar finite sources as the most sophisticated scenario we are looking for at the current stage of this work.

3.6 Nonplanar Sources in Heterogeneous Media

Finite difference approaches have the capability of propagating elastic waves in arbitrary heterogeneous media by specifying the spatial distribution of elastic properties in the medium. Authors who have studied earthquake dynamics applying these techniques have found how important it could be, in rupture evolution and radiated wavefield, to consider heterogeneous surrounding media (e.g., Harris & Day, 1997, Olsen et al., 1997, Ben-Zion & Huang, 2002). For instance, strong variations in slip and slip-rate over the fault surface, as well as in the nature of rupture propagation, have been found. On the other hand, numerical simulations have also shown how important it is to propagate the wavefield through realistic media to explain

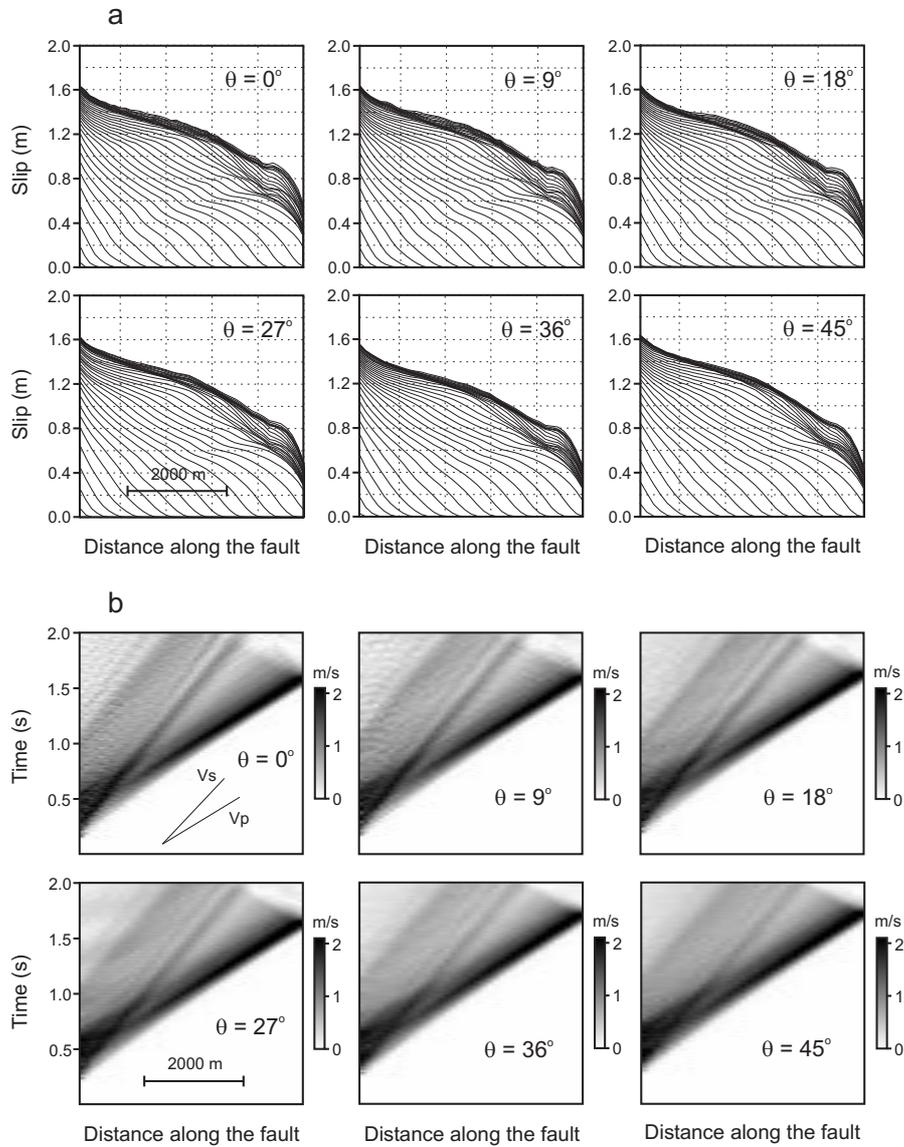


FIG. 3.13: Slip and slip-rate solutions for the finite sources described in Fig. 3.12. a) Slip evolution every 0.1 s as a function of fault position. Only reasonably small variations in the slip function are seen depending on fault orientation. b) Slip-rate as a function of time and fault position. Traces of source discretization are visible as vertical sharp colons associated with numerical cells. However, quite similar results are obtained for all orientation angles θ . Rupture front bifurcation happens soon after spontaneous rupture initiation in all cases.

the observed ground motion in some remarkable cases (e.g., Shapiro et al., 2000, Olsen, 2000). As we shall see, we are able to introduce this physical consideration during rupture simulations given that our numerical model is based on FD.

For modeling finite sources we impose individual boundary conditions at each numerical cell discretizing the fault surfaces. This means that the local fault orientation θ_i (Fig. 3.8) of every point source depends on its relative position with respect to the immediate neighboring cells. So far, the rupture surfaces were supposed to be straight lines in order to simulate planar faults. Nevertheless, the discretization of any kind of geometry in finite difference modeling necessarily has steps- or zigzag-shape (e.g., discrete lines, Fig. 3.8) making it difficult to simulate cracks along straight lines, especially when these lines are not parallel to the reference axis. Therefore, from the viewpoint of boundary conditions, discretization of straight or curved lines reduces to the same numerical problem. On that account, the self-similar rupture validation, as well as the spontaneous rupture analysis we have performed for planar sources validate, ultimately, our methodology for any kind of source geometries.

So, let us discretize a finite nonplanar source following the strategy presented previously, and analyze what happens if we nucleate its spontaneous rupture.

3.6.1 A Realistic Example

We carried out the dynamic rupture simulation of an arbitrarily nonplanar fault crossing a circular low velocity zone (LVZ). Rupture propagation is governed by the slip-weakening constitutive relation (3.10). The goal of this example is not to elucidate the dynamics of such a problem, but to illustrate the performance of our new approach under these realistic conditions.

Fig. 3.15 shows a snapshot of the horizontal particle velocity v_x four seconds after rupture nucleation. The solid black line represents the fault trace which traverses the LVZ (circular dashed line). The elastic properties of both media are shown in Table 3.1. The fault is 13.8 km long, while the LVZ has a diameter of 4 km. The constitutive parameters along the entire fault are $\tau_u = 15 \text{ bar}$, $\tau_s = -33 \text{ bar}$ and $\delta_c = 0.05 \text{ m}$ (see equation 3.10). In order to initiate the spontaneous rupture propagation, we impose rupture along a zone 1 km long located at the left edge of the fault. In such a nucleation region, the initial shear stress $\tau_o = 0$ is taken as the yield stress, τ_u , to start rupture. We used one-hundred-point numerical cells to discretize the sources in a FD mesh of 1600×1600 grid points with a spatial increment

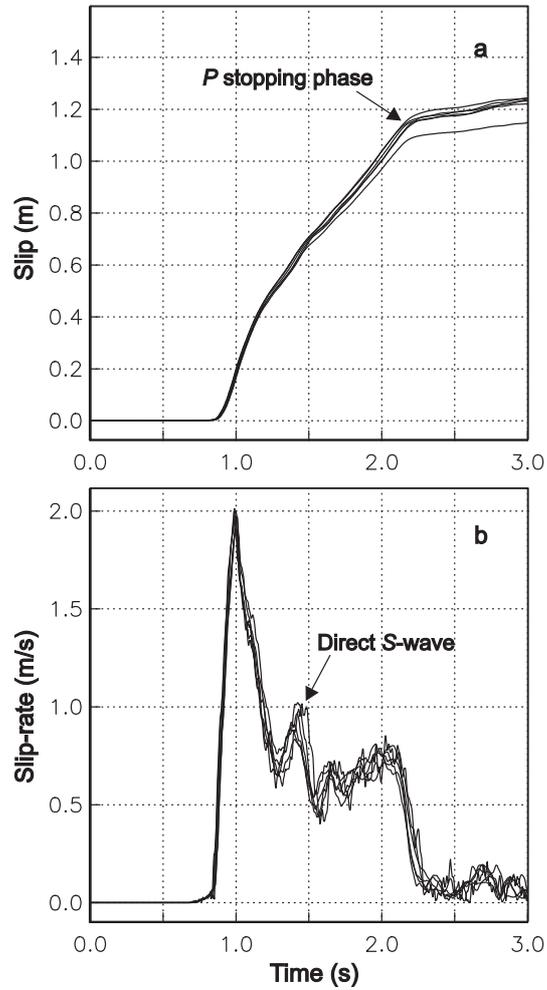


FIG. 3.14: Slip (a) and slip-rate (b) functions computed in the middle-point of the spontaneous rupture region for simulations shown in Fig. 3.12. The six functions associated with the six different fault orientations are superposed in both panels.

$h = 10 \text{ m}$.

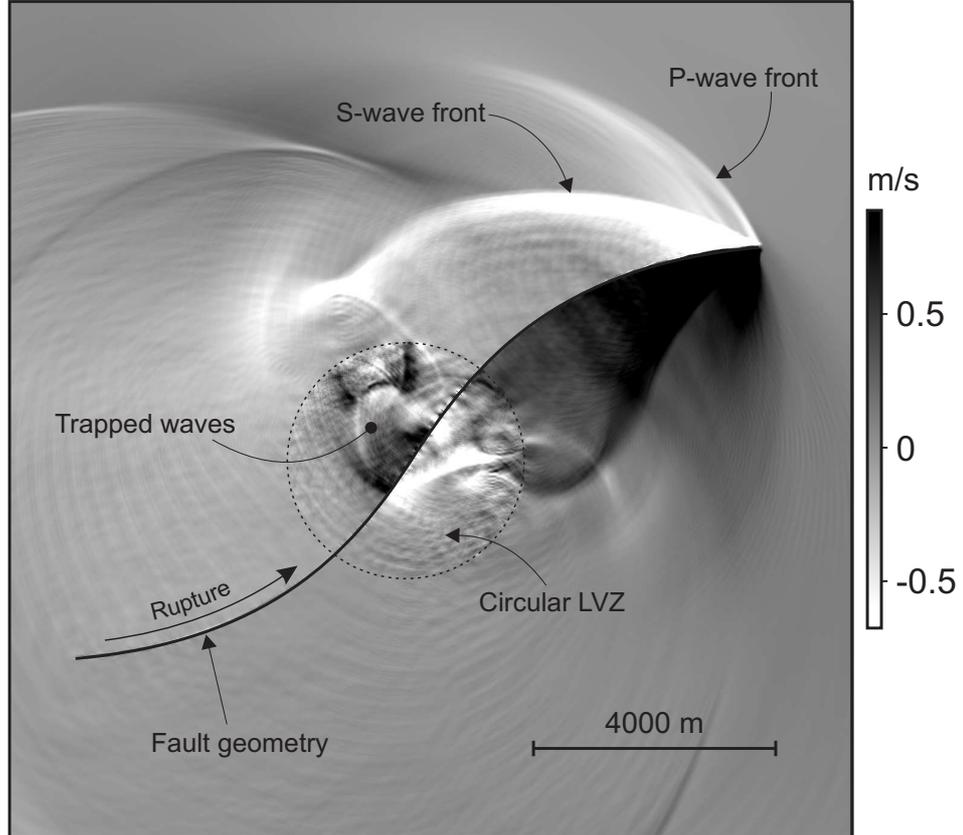


FIG. 3.15: Snapshot of the horizontal particle velocity v_x four seconds after rupture nucleation. The nonplanar fault (black curved line) crosses a circular Low Velocity Zone (LVZ, dotted line, see Table 3.1). Spontaneous rupture governed by the slip-weakening friction law (equation 3.10) propagates rightward in a super-shear regime.

The unilateral rupture propagates rightward on a super-shear regime given that $S = 0.45$ (see section 5.3). We can clearly appreciate how the shape of the body-wave fronts follow the curved source geometry (Fig. 3.15). Also as a consequence of such geometry, there exists a focalization of body-waves in the upper concave side of the fault, where the particle velocities are considerably greater than those observed on the other fault side (see the unbalance in the gray scale with respect to the zero value). The strongest amplitudes within the LVZ correspond to trapped waves generated during the passage of the rupture front : an energetic back-propagating pulse re-

flected in the interface between two media, as well as guided waves along the circular elastic boundary, among others. Fig. 3.16 shows the corresponding kinematical solutions over the rupture surface. The presence of the LVZ has strong implications. First, important velocity changes are exerted by the rupture front depending on the elastic properties of the medium. Second, strong slip (Fig. 3.16a) and slip-rate (Fig. 3.16b) concentrations are obtained within the circular low velocity anomaly. Reflected P - and S -waves on the interface between two media are well observed (arrows), especially inside the LVZ where the aforementioned back-propagating S -wave dominates the later particle motion (see Fig. 3.16b) provoking a belated sharp slip increment (Fig. 3.16a). Numerical oscillations can also clearly be seen due to the discrete stepwise advance of the rupture front across the numerical cells (Figs 3.15 and 3.16b). However, as we have shown in the last section, these oscillations do not perturb the rupture history.

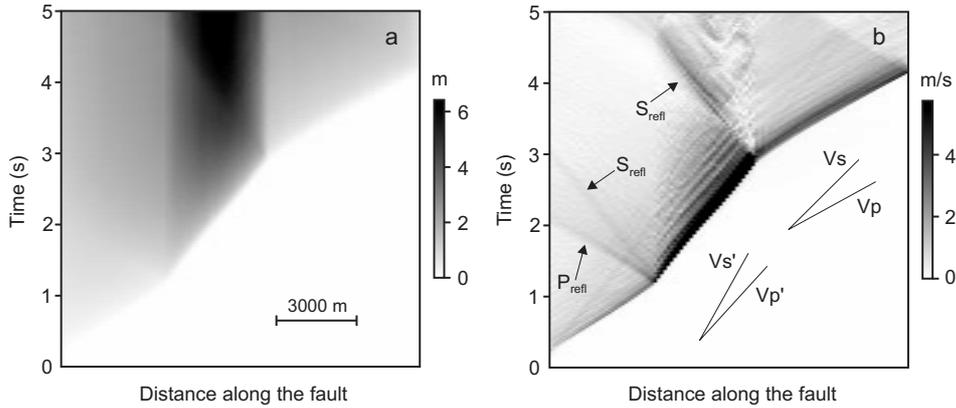


FIG. 3.16: a) Slip and b) slip-rate solutions for the simulation shown in Fig. 3.15 as functions of time and fault position. Straight lines indicate S - and P -wave velocities within the LVZ ($v_{s'}$ and $v_{p'}$) and within the surrounding media (v_s and v_p) (see Table 3.1). Arrows point out reflected phases in the interface between two media.

3.7 Discussion and Conclusions

In this study we introduce a new FD approach to model the dynamic rupture propagation of faults with intricate geometries, e.g., nonplanar faults.

A new definition of the crack boundary conditions represents the main root of our approach. Thanks to the spatial stencil we use to discretize the elastodynamic equations, all stress components are known at the same grid

nodes. By a simple rotation of the stress tensor, we impose the shear stress drop following the local crack orientation. For accurate slip estimation, we construct weight functions before performing simulations. These functions make the slip estimation independent of source orientation with respect to the numerical grid.

The numerical scaling that exists between the grid size, h_n , and the physical extent of the source, Ω , assures an infinity of different discrete representations for the same seismic source. The source discretization may be adapted according to the scale of the problem we need to solve. For instance, for the sake of computational efficiency, large scale numerical simulations may be performed with a few internal source points. Nevertheless, numerical oscillations depend on n , the number of stress-grid points per cell. There exists a strong reduction of noise when n is greater or equal to nine.

High frequency content in elastic fields near the crack tip is better solved as we decrease the grid size. Similarly, numerical oscillations decrease. However, interaction between internal source points is stronger and source discretization becomes critical. In order to achieve accurate estimation of kinematical parameters over the rupture surface and exited wave field, the grid size, h_n , related to a given set of numerical cells with n stress-grid points, must be greater than a lower bound value. We found that the greater the n , the smaller the h_n can be. Applying the accuracy criterion we have determined, suitable values for h_n and n can be found in order to keep numerical artifacts under control.

Finite sources usually have a fault length L much greater than the numerical fault thickness T . Thus, the aspect ratio between these two quantities may play an important role for saving memory resources. The overall features of numerical solution for several sources with length L and different T , will be the same if T in all cases is at least 30 times smaller than L . This means that static fault slip, mean waveform and true amplitude of seismograms are all satisfactorily similar. Because $T = h_n\sqrt{n}$, a minimum number of numerical cells is required to discretize a finite source without perturbing the aforesaid features of solution. In other words, a given finite source must contain at least 30 numerical cells to guarantee the critical aspect ratio. Of course, as we increase the number of cells, i.e., as we reduce the grid size h_n , high frequency content will be better solved and numerical oscillations tend to disappear.

Because finite difference approaches are essentially grid methods, from the viewpoint of boundary conditions simulation of nonplanar faults is as difficult as simulation of planar faults at an angle with the grid. Only numerical rules for the number of nodes we need to model accurately are essential,

and we have determined experimentally these rules. Hence, the comparison with analytical solutions for the self-similar case, as well as the spontaneous ruptures analysis for planar sources, validate our numerical approach for any kind of source geometry. Results we have obtained for an arbitrary nonplanar fault in heterogeneous media are in accordance with expectations about the presence of low velocity zones during the dynamic rupture of faults. Our methodology is robust even in hard conditions.

In order to study the rupture dynamics of real earthquakes, three-dimensional (3D) numerical models are essential. We think the path leading our rupture model to 3D space is well highlighted by the methodologies exposed in this article. On one hand, the 3D wave propagation kernel is possible (Saenger et al., 2000). On the other hand, the essential element to describe a 3D source would be the numerical cell translated into a volumetric entity (i.e., a cube). The strategy to evaluate the slip or the slip-rate in 3D sources should be carefully determined on the basis of the numerical properties of such an elementary cubic cell.

In conclusion, this study introduces a new FD approach to model the dynamic rupture propagation of faults with any pre-established geometry. We have assumed a linear slip-weakening friction law. However, the implementation of Coulomb type or slip-rate dependent constitutive relations is possible. Thus, our numerical model contributes to the investigation of more realistic scenarios using FD by considering arbitrary heterogeneous media, composite friction laws, and complex source geometries.

Chapitre 4

Rupture Dynamique 3D de Failles Planes et Non-Planaires

Sommaire

4.1	Modèles de Zones de Faille	208
4.1.1	Description Numérique d'une Zone de Faille	208
4.1.2	Propagation Spontanée de la Rupture	211
4.1.3	Représentation d'un Élément de Frontière	224
4.2	Nonplanar Dynamic Rupture Model	230
4.2.1	Introduction	230
4.2.2	Numerical Model	232
4.2.3	Fault Mechanics	239
4.2.4	Resolution and Convergence	244
4.2.5	Model Validation	258
4.2.6	Rupture Along a Nonplanar Loaded Fault	278
4.2.7	Discussion and Conclusions	291
4.3	Discussion, Conclusions et Perspectives	295
4.3.1	The 1992 Landers Earthquake ($M_W = 7.3$)	297

DANS ce chapitre j'aborde un sujet qui se trouve au cœur du débat actuel animé par les scientifiques se consacrant à l'étude de la dynamique de la rupture en trois dimensions (3D). Je discute la formulation et la précision de plusieurs modèles en différence finies (DF) dans lesquels la zone source possède une épaisseur donnée. Des résultats pour la rupture spontanée d'une faille plane issus de deux formulations différentes dans la grille partiellement en quinconce sont comparés avec ceux obtenus avec une méthode intégrale de frontière (BIE). L'importance de la discrétisation de la source est mise en évidence grâce à l'analyse de la structure numérique des éléments de frontière qui la discrétisent dans le maillage régulier proposé dans ce travail.

A partir de la structure optimale des éléments de frontière, j'introduis le modèle de rupture 3D permettant de simuler la propagation dynamique d'une faille avec une géométrie non-planaire. Pour cela, je présente les différents volets qui composent le modèle. Une analyse de convergence est réalisée en terme de résolution de la zone de cohésion dans le cadre du modèle d'affaiblissement linéairement dépendant du glissement de la faille. La validation du modèle est réalisée grâce à la comparaison de nos résultats avec ceux issus de la méthode DF *traction-at-slip-node* pour une faille plane, et des résultats de la méthode BIE pour des failles non-planaires. L'effet de la géométrie de la faille est prépondérant, comme le montrent des simulations non-planaires de chargement tectonique biaxial. L'analyse de la rupture du séisme de Landers en tenant compte de sa géométrie exacte illustrera les variations significatives de la rupture et de l'émission des ondes sismiques.

4.1 Modèles de Zones de Faille

Dans la littérature consacrée à la modélisation de la dynamique de la rupture par la méthode de différences finies, plusieurs manières de décrire les conditions de frontière ont été proposées (voir section 1.5.1.2), car c'est le point délicat dont dépend la précision de la solution. Dans ce chapitre, je me focaliserai exclusivement sur l'analyse des *modèles numériques de zones de faille*, c'est-à-dire des modèles pour lesquels la dislocation sur la surface de rupture (*i.e.* le glissement S_i ou sa dérivée) n'est pas évaluée à l'endroit exact où la rupture se produit. Si la chute des tractions $\Delta\tau$ a lieu dans le plan $z = 0$ (voir Figure 1.20, page 94), alors les déplacements cisailants de part et d'autre de ce plan, $u_i^{+\Delta}$ et $u_i^{-\Delta}$, sont quantifiés respectivement sur les plans $z = +\Delta$ et $z = -\Delta$, où Δ représente la moitié de l'épaisseur discrète de la zone de faille dans la grille DF. C'est pour cette raison que ces modèles sont ainsi nommés (Madariaga et al., 1998, Dalguer & Day, 2006). Pour estimer la « dislocation » dans une zone de faille il faudrait donc « corriger » le déplacement afin de le ramener à l'endroit où la chute de la contrainte a lieu.

4.1.1 Description Numérique d'une Zone de Faille

Les modèles numériques de zones de faille peuvent être classés en deux groupes : ceux dont la discontinuité des déplacements à travers la faille est quantifiée à partir des points de l'espace où le vecteur u_i est défini, et ceux dont la même discontinuité est quantifiée à partir de la densité de moment sismique dans la zone de faille (Backus & Mulcahy, 1976, appelé *stress-glut* dans la littérature anglo-saxonne). Un des tout premiers modèles de ce type a été proposé par Madariaga (1976). Dans son approche 3D, basée sur la grille en quinconce qu'il a construite (section 1.4.1, Figure 1.9), il se sert de la symétrie du problème pour établir les conditions de frontières mixtes d'une faille dynamique (équations 1.112, page 94) et ainsi étudier la propagation d'une faille circulaire dans un demi-espace. L'évaluation de la discontinuité des déplacements est faite au point de la grille décalé d'un demi-pas par rapport à l'endroit où la chute des contraintes a lieu (plan $z = 0$) (Figure 4.1 à gauche). En tirant toujours profit de la symétrie du problème, d'autres modèles, basés sur la même grille en quinconce, ont été proposés en considérant un plan fictif au-delà du plan $z = 0$ afin d'assurer la symétrie impaire de certaines composantes des champs autour de la surface de rupture (Virieux & Madariaga, 1982, Chouet, 1986). Ces modèles numériques de faille sont aussi décrits par une épaisseur égale à h , le pas de discrétisation spatial, puisque le déplacement éprouvé par la fracture est évaluée dans les plans $z = \pm h/2$

et $z = -h/2$ aux points où la vitesse est définie (Figure 4.1 à gauche). Des modifications de ce genre de modèles ainsi que des formulations alternatives ont été proposées au cours des années 80 (*e.g.*, Trifu & Radulian, 1985). L'épaississement de la zone de faille en ajoutant un plan supplémentaire de nœuds de contraintes a permis d'améliorer considérablement la précision des simulations (Madariaga et al., 1998), épaississement analogue à l'étalement du stencil de DF quand on monte en ordre de précision. L'épaisseur de la zone de faille, toujours donnée par la distance qui sépare les plans où l'évaluation des déplacements des blocs de la faille est réalisé, est ainsi égale à $2h$ (voir Madariaga et al., 1998, Figure 4). Les résultats sont de meilleure qualité que ceux de Virieux & Madariaga (1982) mais conservent une empreinte numérique. Cette approche a été utilisée pour modéliser les observations issues des séismes réels comme celui de Landers (*e.g.*, Olsen et al., 1997, Peyrat et al., 2001) ou bien celui de Tottori (Peyrat & Olsen, 2004).

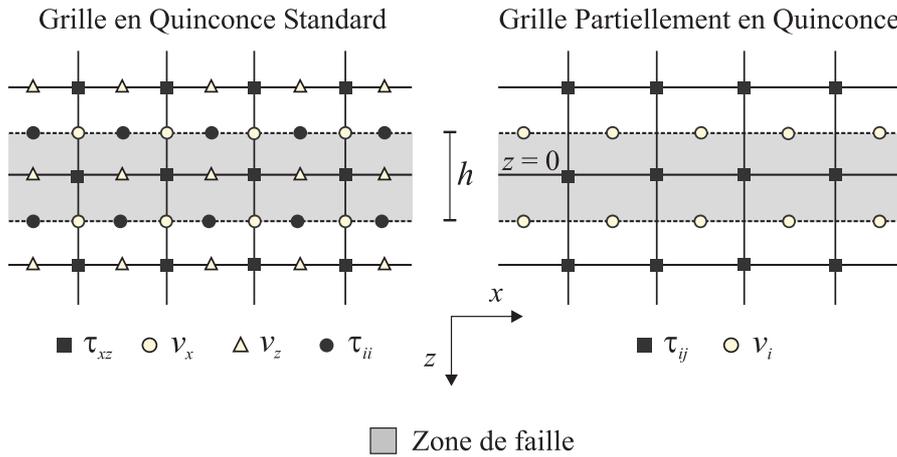


FIG. 4.1: Représentation bidimensionnelle d'une zone de faille (région grisée) d'épaisseur égale à h , dans la grille différences finies standard (à gauche) et dans la grille partiellement en quinconce (à droite) utilisée dans ce travail pour la formulation en trois dimensions du *stress-glut* introduit par Andrews (1999).

Une façon alternative d'évaluer la discontinuité des déplacements dans la zone de faille est fondée sur la densité de moment sismique associée à ce que Backus & Mulcahy (1976) ont appelé le « *stress-glut* ». Lorsque le volume décrit par la source éprouve une déformation inélastique, *i.e.* lorsque les tractions évoluent selon la loi constitutive de frottement et non plus selon les équations élastodynamiques, un incrément de moment sismique par unité

de volume se produit. Grâce à la grille en quinconce standard (Figure 1.9, page 54), Andrews (1999) a introduit une approche qui, à partir du *stress-glut* ayant lieu dans la zone de faille illustrée par la zone grise à gauche de la Figure 4.1, quantifie l'incrément de moment sismique, puis la vitesse du glissement \dot{S} sur la faille. Dans le cas de la grille partiellement en quinconce (Figure 1.10, page 55), cette méthode peut être plus facilement généralisée au frottement vectoriel puisque toutes les composantes du tenseur de contrainte sont connues aux mêmes points de l'espace. Dans ce cas, si la faille coïncide avec le plan $z = 0$ (Figure 4.1 à droite), l'incrément de moment sismique dans le même plan est donné par :

$$\Delta M = \underbrace{(\tau - \tau')}_{\text{stress-glut}} V \quad (4.1)$$

où $\tau = (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{1/2}$ représente la magnitude de la traction sur la surface de rupture associée à la réponse élastique du milieu (*i.e.* la valeur donnée par les équations élastodynamiques) et τ' représente la résistance au mouvement de la faille donnée par la loi constitutive de frottement. V est le volume de chaque élément cubique défini par les huit nœuds de vitesse autour de chaque nœud de contrainte placé dans le plan $z = 0$ (*i.e.* $V = h^3$, voir Figure 1.11 en page 57). Le *stress-glut* représente donc une prédiction de la déformation inélastique à l'intérieur de la zone de faille d'épaisseur égale à h . L'incrément de moment sismique peut être également représenté en terme d'un incrément de glissement, ΔS , comme :

$$\Delta M = \mu A(\Delta S) \quad (4.2)$$

où μ est le module de cisaillement et A la surface sur le plan $z = 0$ associée à un élément volumique de la zone inélastique (*i.e.* $A = h^2$). Par conséquent, les incréments de glissement et de vitesse de glissement sont respectivement donnés par

$$\Delta S = (\tau - \tau') \frac{h}{\mu} \quad (4.3a)$$

et

$$\Delta \dot{S} = (\tau - \tau') \frac{h}{\mu \Delta t} \quad (4.3b)$$

où Δt est l'incrément temporel du schéma numérique. Calculés de cette manière, ces deux paramètres cinématiques quantifient donc le mouvement de la faille le long d'une zone d'épaisseur égale à celle des modèles utilisés par Madariaga (1976) et par Virieux & Madariaga (1982) (*i.e.* égale à h).

Toutes les approches mentionnées sont restreintes à des surfaces de rupture planes alors qu'en réalité les failles ont des géométries beaucoup plus complexes (*e.g.*, Aochi & Fukuyama, 2002, Aochi & Madariaga, 2003, Aagaard et al., 2004, Cianetti et al., 2005). Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'il est possible de considérer des failles de géométrie quelconque à 2D en utilisant la méthode des différences finies (Cruz-Atienza & Virieux, 2004). Dans ce cas, la zone de faille est décrite par des éléments de frontière (cellules numériques) dont l'épaisseur est donnée par une loi d'échelle. Ainsi, pour simuler la rupture de failles non-planaires avec une bonne précision, le nombre de nœuds à l'intérieur des éléments est déterminé par le pas de discrétisation h (voir section 3.5.1). Comme on le verra par la suite, l'analyse tridimensionnelle de ce modèle a révélée que la géométrie des éléments constituant la source, ainsi que le critère de rupture, représentent deux facteurs clés à définir pour bien calibrer la méthode de simulation.

4.1.2 Propagation Spontanée de la Rupture

Dans cette section je compare deux formulations numériques d'une zone de faille et une formulation intégrale de frontière (BIE), dans le cas de la propagation spontanée d'une faille plane. Je compare tout d'abord deux représentations numériques différentes d'une zone de faille dans la grille DF partiellement en quinconce : celle basée sur le *stress-glut* (FDSG) proposée par Andrews (1999) dans la grille en quinconce standard (section 4.1.1) et une seconde qui utilise les éléments de frontières les plus simples possible (FDBE, *i.e.* des cubes composés de huit nœuds). Par la suite, je compare chacune des deux méthodes avec les résultats issus d'une approche semi-analytique indépendante (BIE).

La géométrie du problème est illustrée sur la Figure 4.2. La faille est initialement chargée par un champ de contraintes homogène $\tau_{xy}^0 = 33bar$. Au temps $t = 0$, une relaxation totale des contraintes a lieu à l'intérieur de la zone de nucléation (*i.e.* $\tau_{xy} = 0bar$). La rupture se propage spontanément selon la loi constitutive de frottement *slip-weakening* discutée dans les sections 2.3.2 et 3.5.3, avec un seuil de rupture $\tau_u = 48bar$, un frottement dynamique $\tau_s = 0bar$ et une distance d'affaiblissement critique $\delta_c = 40cm$. Toutes les simulations en différences finies ont été réalisées pour trois pas différents de discrétisation spatiale $h = [25m, 50m, 100m]$ alors que celle de référence BIE pour un pas unique $h = 300m$. Les comparaisons se sont basées sur la contrainte cisailante τ_{xy} et la vitesse du glissement au cours du temps observées en sept points, représentés sur la Figure 4.2, placés dans la

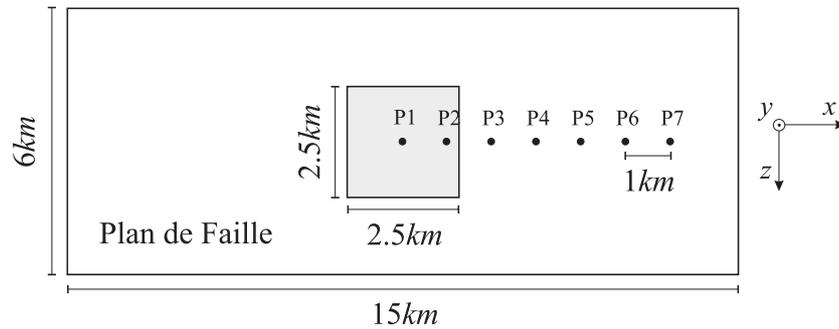


FIG. 4.2: Géométrie du plan de faille et de la zone de nucléation (carré gris), centrée par rapport aux deux dimensions de la faille. Les solutions dans le plan de faille sont comparées en sept points d’observations (points noirs).

direction de déformation purement *in-plane*.

4.1.2.1 FDBE vs Stress Glut

Dans cette première comparaison je décris les résultats issus des deux représentations d’une zone de faille mentionnées dans les paragraphes précédents : celle où l’on quantifie la densité de moment sismique associée à la déformation inélastique dans la zone de faille à partir du *stress-glut*, et celle dans laquelle la source est représentée par un ensemble d’éléments constitués de huit nœuds de contraintes. Cette dernière est une formulation qui est proche de celle introduite par Madariaga et al. (1998) puisque la faille est décrite par deux plans de nœuds de contraintes. Les deux différences principales résident dans la grille de différences finies et le critère de rupture. Dans le modèle utilisé, un élément casse lorsqu’un des huit points dépasse le seuil établi par τ_u . La valeur du glissement est tout simplement donnée par la valeur du champ de vitesse intégré entre les deux plans de nœuds de vitesse situés immédiatement au-dessus et au-dessous de la faille. Je n’applique pas de conditions de frontière mixtes sur le plan de faille, pour préserver l’extension possible vers des surfaces courbes.

La comparaison est illustrée sur les Figures 4.3, 4.4 et 4.5. Dans les deux modèles, les oscillations numériques disparaissent à mesure que le pas de discrétisation diminue. Pourtant, ces oscillations sont toujours beaucoup plus importantes dans la méthode FDSG. Globalement, les solutions des deux méthodes sont très similaires à l’intérieur de la zone de nucléation (deux premiers points d’observation) alors qu’aux points situés à l’extérieur, le front de rupture se propage plus rapidement avec la méthode FDBE quelle que soit

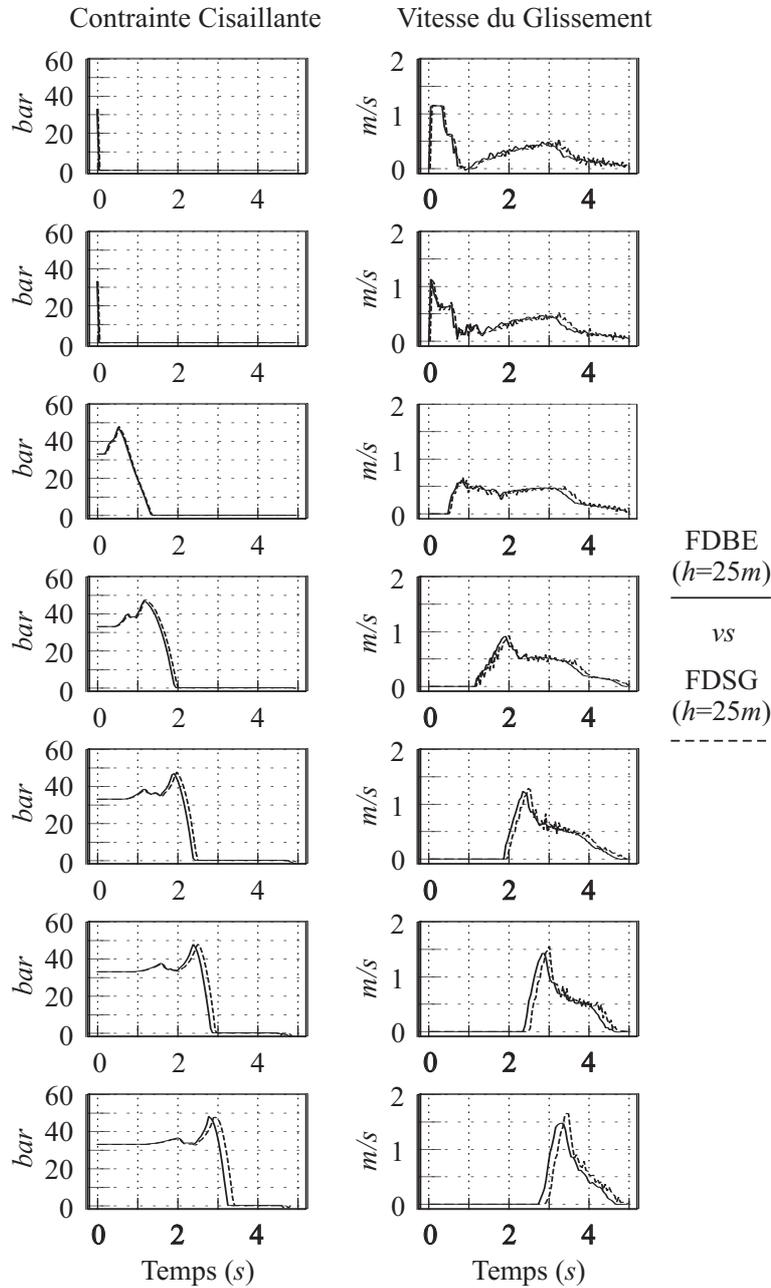


FIG. 4.3: Contrainte cisillante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) dans les sept points d'observation montrés dans la Figure 4.2. Formulations en éléments de frontière à huit points (FDBE) et en *stress-glut* (FDSG).

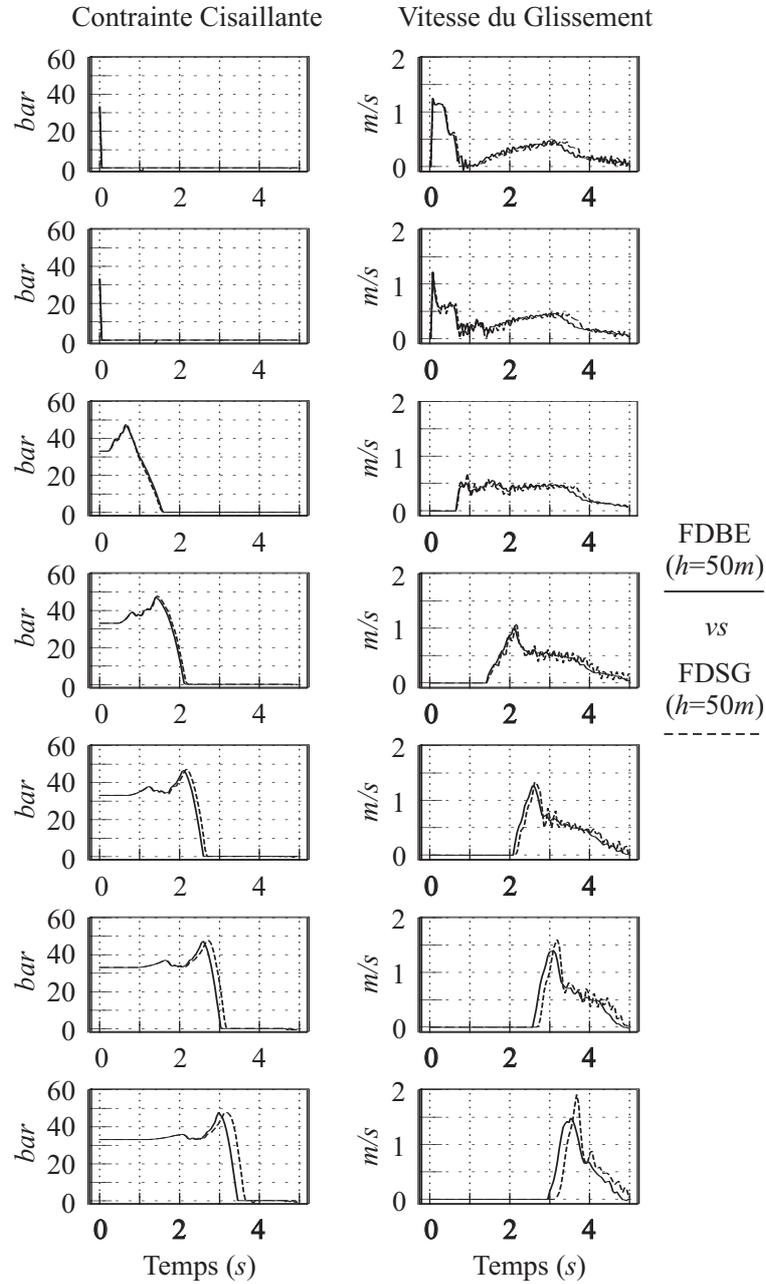


FIG. 4.4: Contrainte cisillante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) dans les sept points d'observation montrés dans la Figure 4.2. Formulations en éléments de frontière à huit points (FDBE) et en *stress-glut* (FDSG).

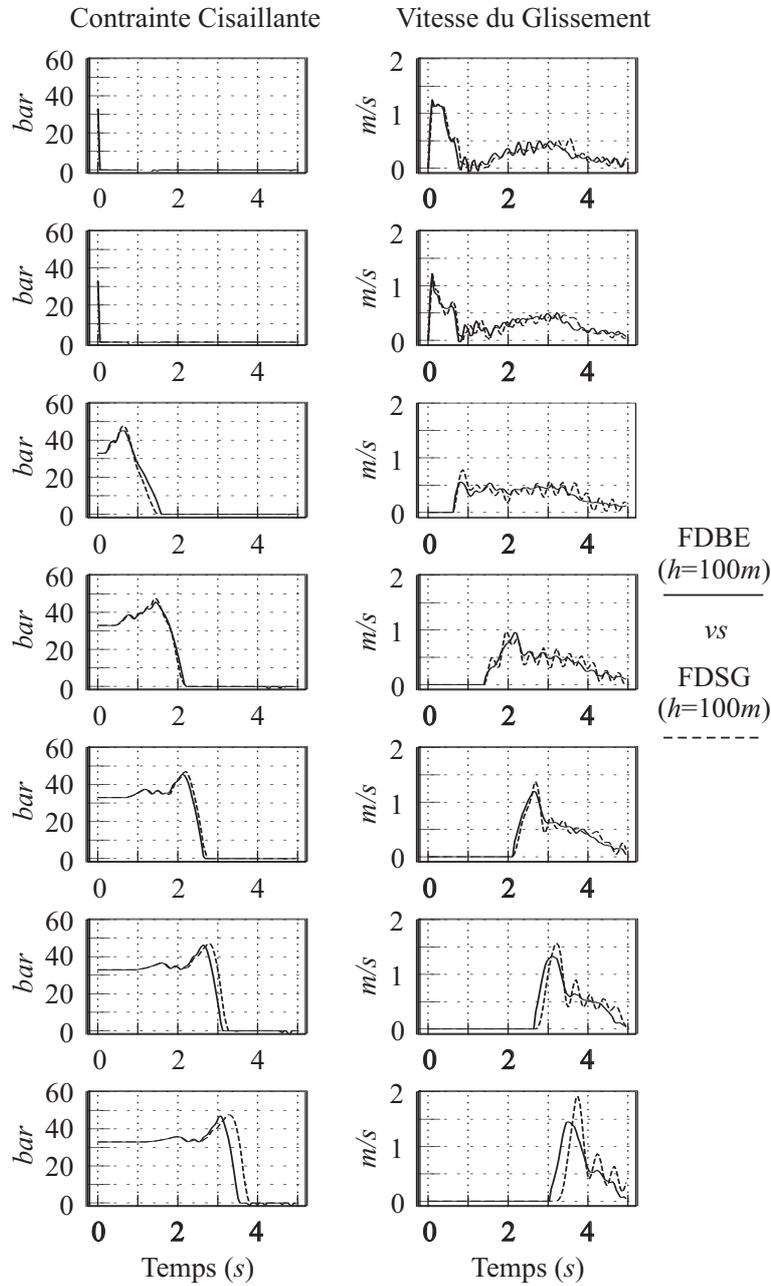


FIG. 4.5: Contrainte cisillante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) dans les sept points d'observation montrés dans la Figure 4.2. Formulations en éléments de frontière à huit points (FDBE) et en *stress-glut* (FDSG).

la grille testée. On peut donc conclure que, dans la grille DF partiellement en quinconce, la méthode par élément FDBE testée est plus performante que la méthode FDSG basée sur le *stress-glut*. Ces résultats contredisent donc les déductions issues de l'étude récemment faite par Dalguer & Day (2006), où la méthode *stress-glut* de Andrews (1999) produit des résultats considérablement meilleurs que celle de Madariaga et al., lorsque toutes les deux sont formulées dans la grille en quinconce standard.

4.1.2.2 Zone de Faille vs BIE

Les Figures 4.6 – 4.11 montrent la comparaison individuelle de chacun des deux modèles présentés dans la section précédente avec la méthode basée sur les équations intégrales de frontière (BIEM) introduite par Aochi et al. (2000b). Les solutions issues des modèles de rupture en différence finies pour les trois pas de discrétisation sont ainsi comparées avec la solution de référence BIEM calculée pour $h = 300m$. Les trois premières figures illustrent la méthode FDBE alors que les trois dernières la méthode FDSG. Les oscillations très haute fréquence dans la phase finale du mouvement de chaque point correspondent à la solution BIEM. En général, les solutions des deux méthodes convergent vers celles de référence à mesure que h diminue. Notamment dans le cas de la méthode par éléments (FDBE), la solution pour $h = 25m$ semble avoir quasiment convergé. Les singularités de contraintes dans ce cas (Figure 4.6), associées au passage de l'onde S puis du front de rupture sont bien modélisées. De même, les taux de variation des contraintes une fois la rupture initiée en chaque point sont très similaires. Les amplitudes, les formes d'onde et les durées (*i.e.* les temps de montée des signaux pour la vitesse de glissement) sont remarquablement bien reproduits. En revanche, la solution obtenue avec la méthode FDSG pour le pas le plus fin de la grille (Figure 4.9) subit un retard dans les temps de rupture ainsi qu'une surestimation de la vitesse de glissement. Ces problèmes s'accroissent dans les grilles plus grossières où les oscillations prennent de dimensions considérables (Figures 4.10 et 4.11). Les solutions correspondantes à ces mêmes pas de discrétisation avec la méthode FDBE (Figures 4.7 et 4.8) présentent aussi certains problèmes, principalement un retard dans les temps de rupture. Globalement, cette comparaison où deux représentations différentes d'une zone de faille ont été comparées avec une méthode semi-analytique indépendante met en évidence que la formulation par élément de frontière (FDBE) est plus performante que celle associée au *stress-glut*, toutes deux étant déterminées avec la grille de différences finies partiellement en quinconce.

Tous les modèles de rupture en différences finies présentés et discutés

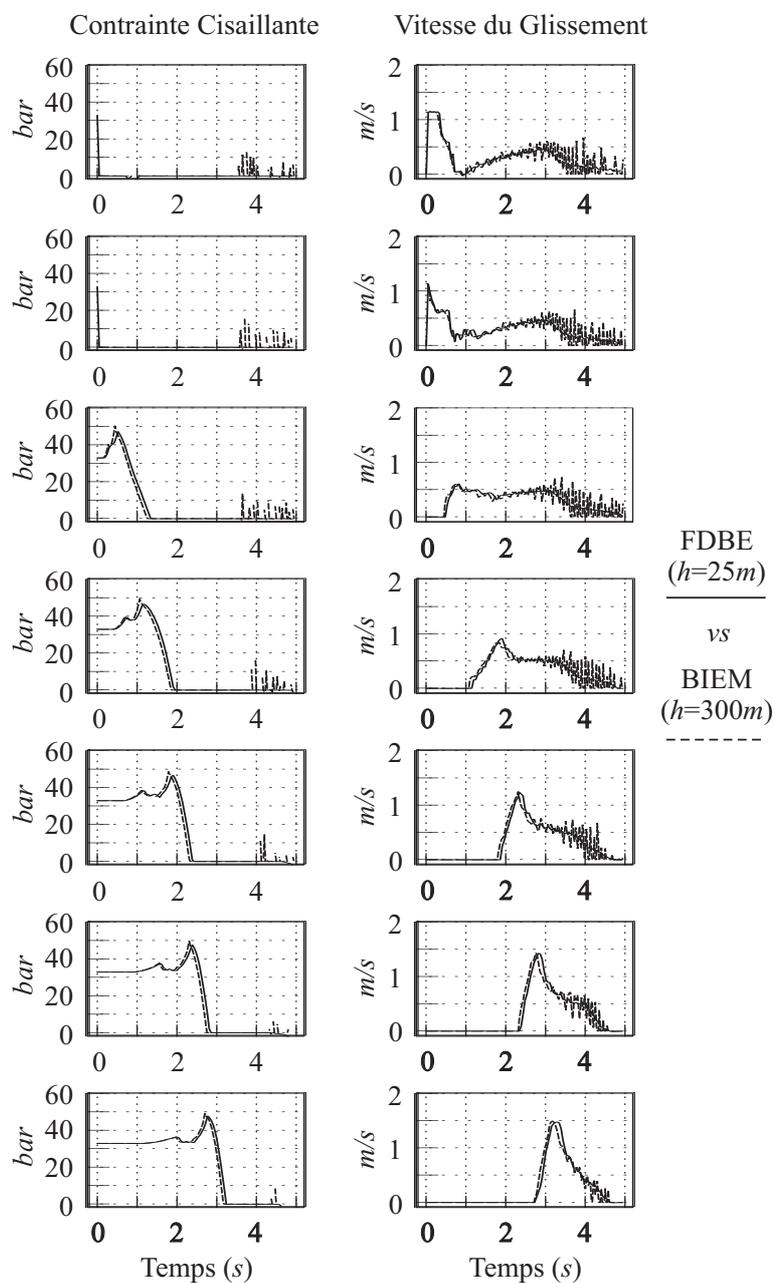


FIG. 4.6: Contrainte cisailante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) obtenues aux sept points d'observation représentés sur la Figure 4.2. Formulations en éléments de frontière à huit points (FDBE) et en équation intégrales (BIEM).

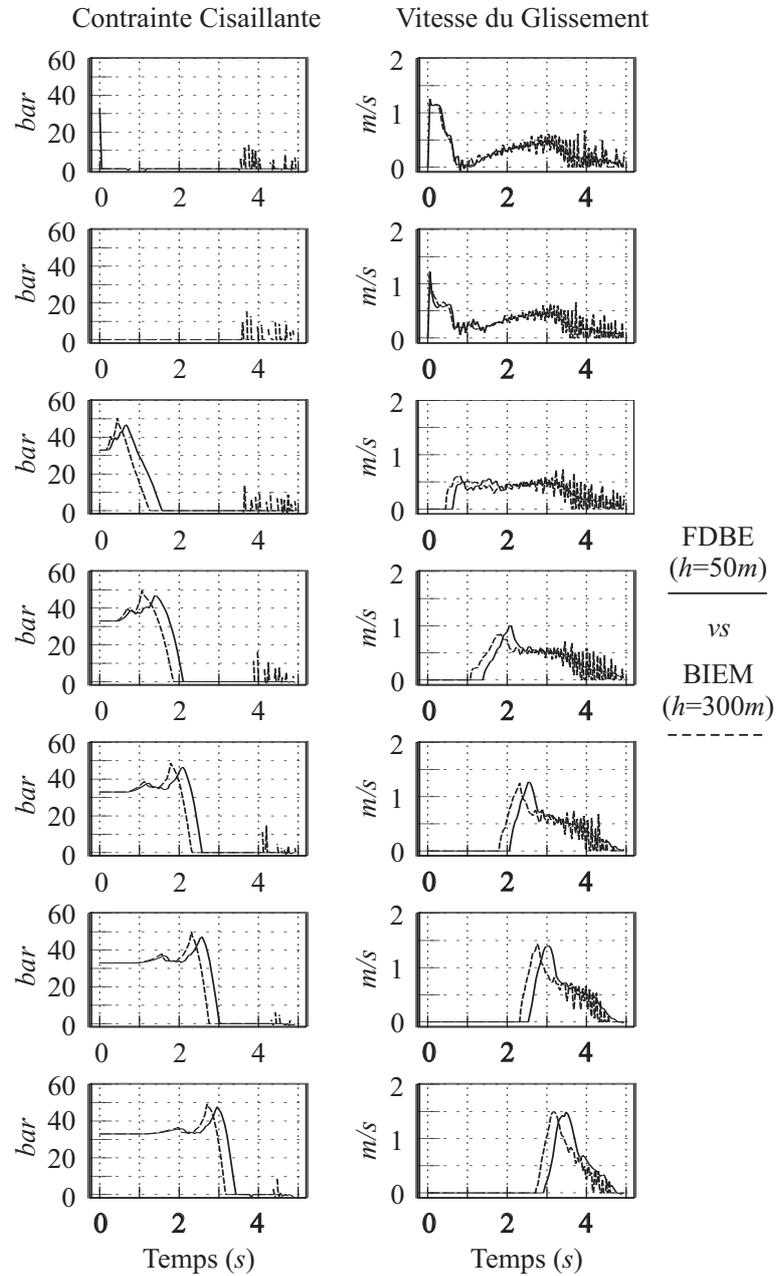


FIG. 4.7: Contrainte cisillante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) en sept points d'observation montrés dans la Figure 4.2. Formulations en éléments de frontière à huit points (FDBE) et en équation intégrales (BIEM).

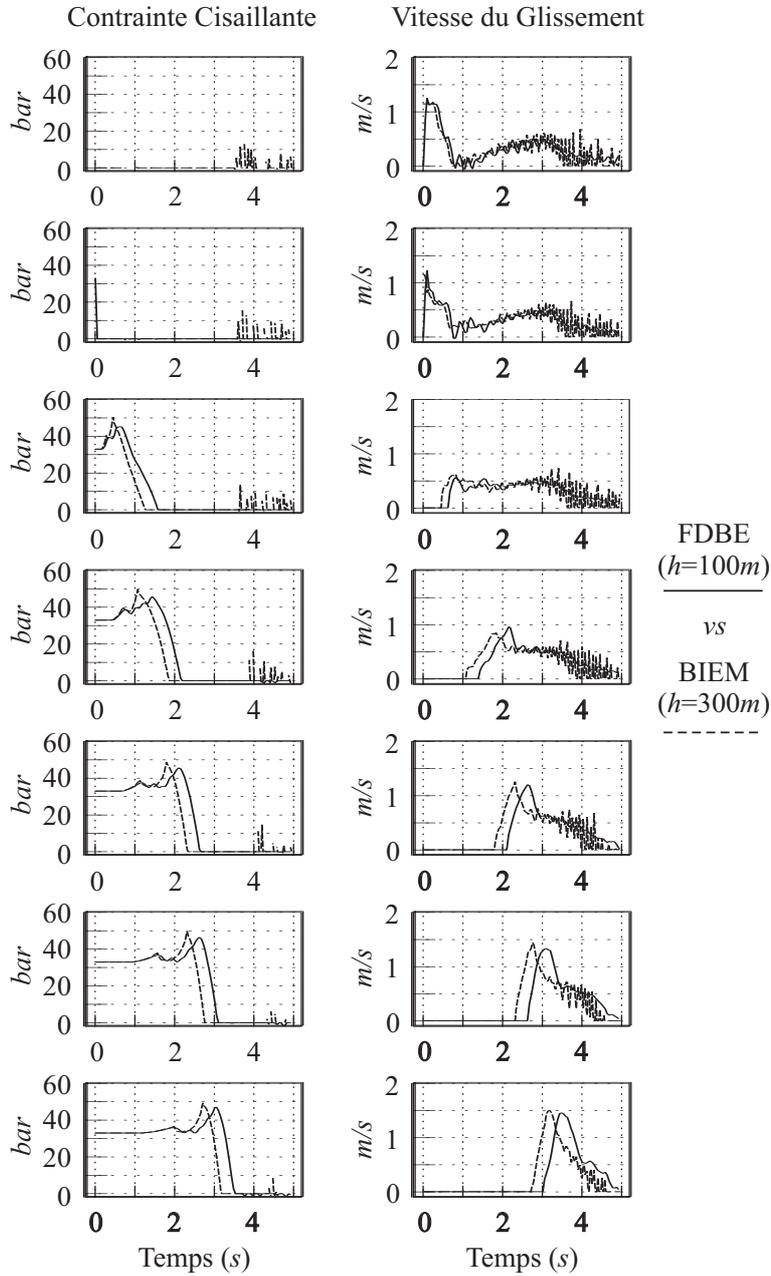


FIG. 4.8: Contrainte cisillante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) en sept points d'observation montrés dans la Figure 4.2. Formulations en éléments de frontière à huit points (FDBE) et en équation intégrales (BIEM).

le long de ce chapitre sont restreints à la description de failles de géométrie plane. Pourtant, dans le chapitre 3, on a montré que la formulation en différences finies par éléments de frontière peut décrire d'une façon discrète des géométries plus complexes. Bien sûr, les éléments doivent être « correctement » décrits. On verra dans les sections suivantes que le choix de la structure des éléments joue un rôle prépondérant dans la construction de la singularité de contraintes au voisinage de la faille.

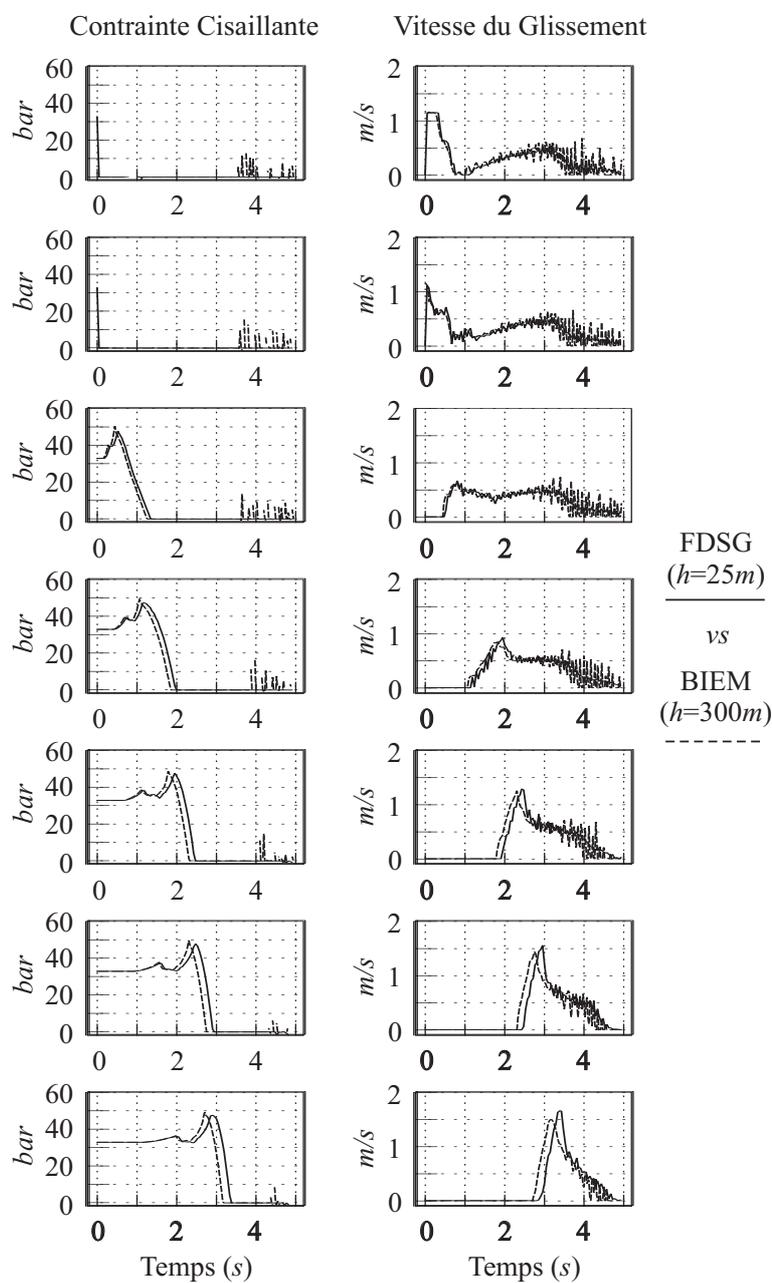


FIG. 4.9: Contrainte cisailante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) en sept points d'observation montrés dans la Figure 4.2. Formulations en *stress-glut* (FDSG) et en équation intégrales (BIEM).

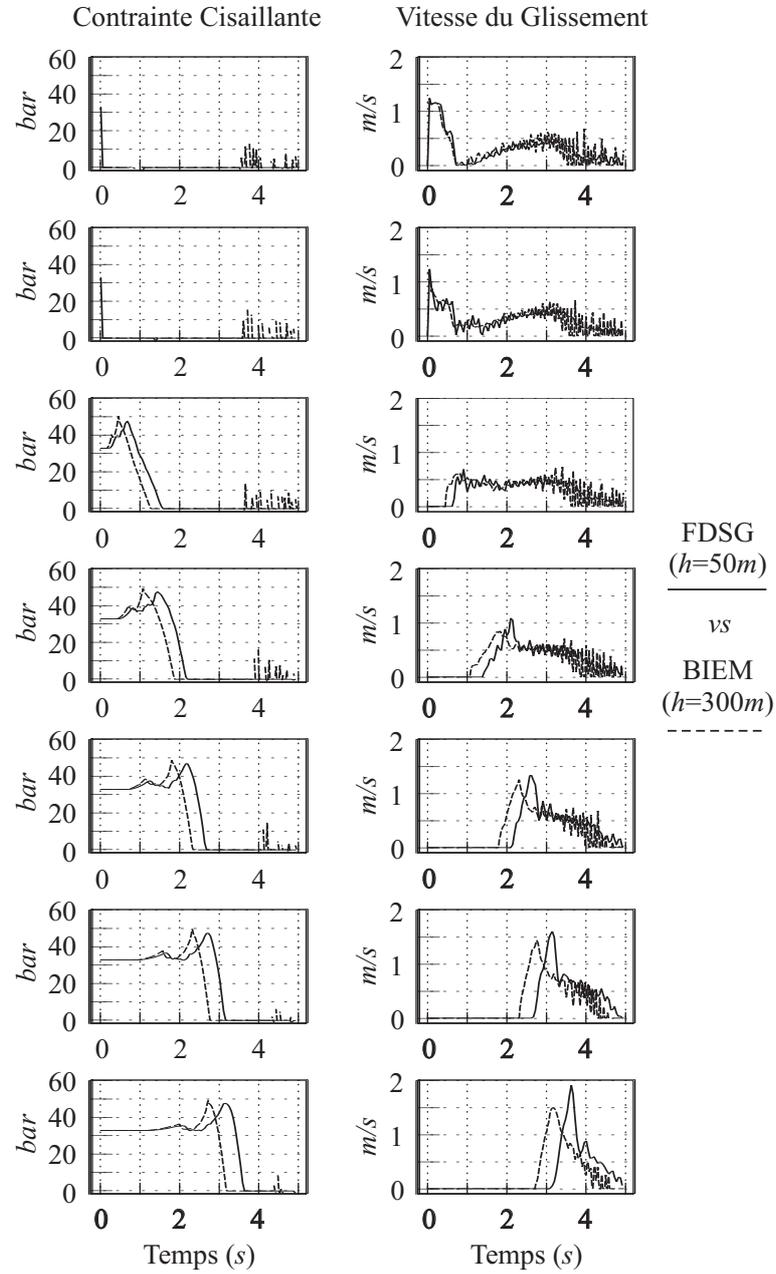


FIG. 4.10: Contrainte cisailante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) en sept points d'observation montrés dans la Figure 4.2. Formulations en *stress-glut* (FDSG) et en équation intégrales (BIEM).

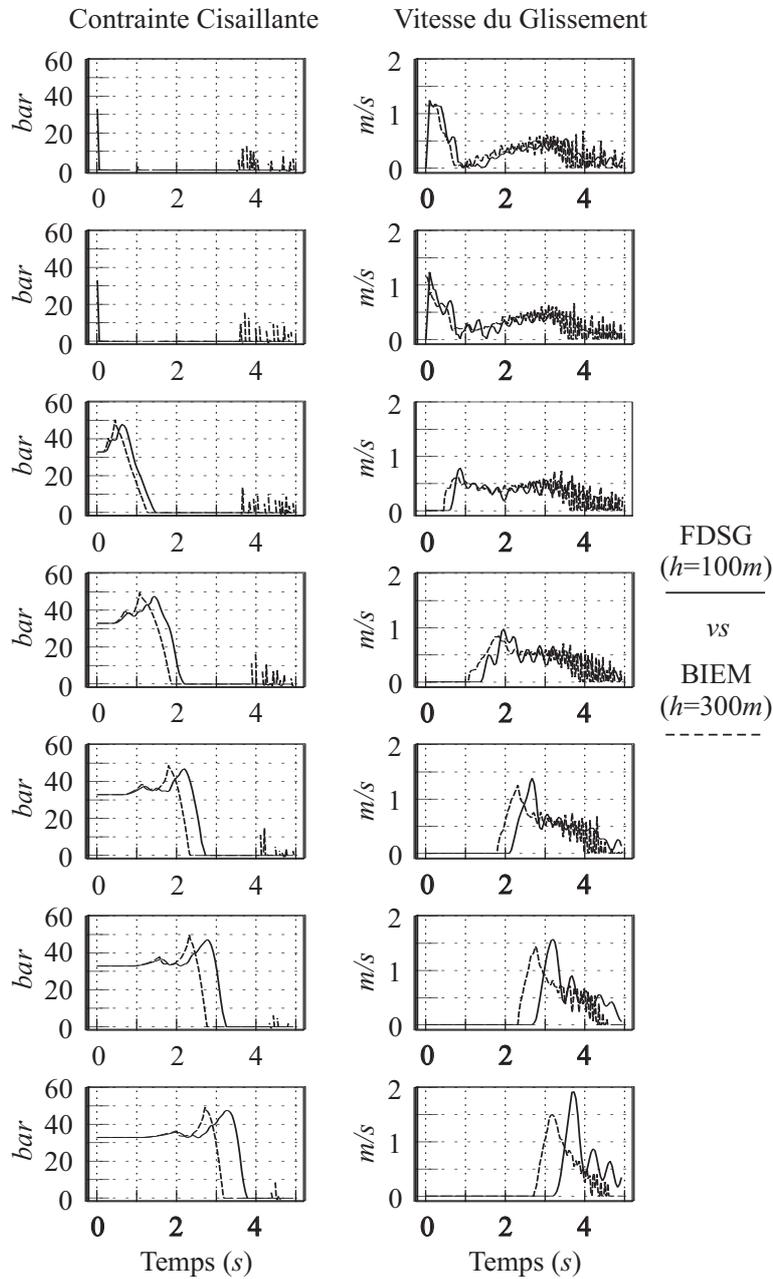


FIG. 4.11: Contrainte cisillante τ_{xy} (à gauche) et vitesse du glissement (à droite) en sept points d'observation montrés dans la Figure 4.2. Formulations en *stress-glut* (FDSG) et en équation intégrales (BIEM).

4.1.3 Représentation d'un Élément de Frontière

La propagation de la rupture d'une faille se produit lorsque le flux d'énergie élastique au voisinage du front de rupture est au moins aussi important que celui nécessaire pour apporter l'énergie créant une nouvelle portion de dislocation (*i.e.* énergie de fracturation). La simulation numérique de la propagation d'une rupture nécessite donc de s'assurer de la juste évaluation du bilan énergétique entre ces deux quantités qui s'opposent. L'énergie élastique est directement reliée à l'état de contraintes du milieu, τ_{ij} (équation 1.134) qui possède, à proximité d'une faille plane en absence de forces de cohésion, une forme asymptotique universelle donnée par (Freund, 1990, voir section 2.3 page 143)

$$\tau_{ij} \propto \frac{K}{\sqrt{x'}} \cdot H(x'), \quad (4.4)$$

où K est le facteur d'intensité de contraintes, $H(\cdot)$ est la fonction *heaviside* et $x' = x - v_r t$ (où v_r est la vitesse de propagation de la rupture, x est la coordonnée spatiale dans la direction de propagation et t est le temps). Dans le cas où le mouvement dans la faille éprouve une résistance due au frottement, la singularité de contraintes en $x' = 0$ (*i.e.* au front de rupture) dévient d'ordre inférieur (Ida, 1972, Andrews, 1976b, section 2.3.2). Étant donné qu'une faille est décrite par un ensemble d'éléments de frontière dans notre modèle de rupture, je me suis donc intéressé à l'état de contraintes autour des éléments isolés afin de préciser l'évaluation d'une telle singularité : la précision des contraintes dépend de la structure des éléments.

J'ai testé des nombreuses structures d'éléments de frontière. J'ai sélectionné trois d'entre elles, dont celle qui m'a permis de valider le modèle de rupture 3D non-planaire dans la section 4.2. Les deux autres sont représentatives d'une problématique essentielle. J'ai considéré dans les tests un état de contrainte cisailante homogène égale à 100bar dans le modèle. Au temps $t = 0$, une chute des contraintes a lieu à l'intérieur de l'élément. Cette chute est une fonction linéaire du temps, telle que la contrainte décroît à partir de sa valeur initiale jusqu'à zéro en 0.2s. Les pas de discrétisation de la grille numérique choisis, sont $h = 20m$ et $\Delta t = 0.002s$. Dans tous les cas, la cassure de l'élément produit des oscillations numériques stationnaires avec un nombre d'onde approximativement égal à $1/2h$. Afin d'éliminer cette composante haute fréquence induite par la discrétisation et ainsi de mieux mettre en valeur l'influence réelle et physique de chaque configuration des éléments sur le champ de contraintes, j'ai appliqué l'opérateur laplacien introduit dans la section 4.2.6.1 avec un facteur d'amortissement $\eta = 0.7$ (équation 4.19) autour des éléments. Des opérateurs de quatrième ordre dans l'espace ont

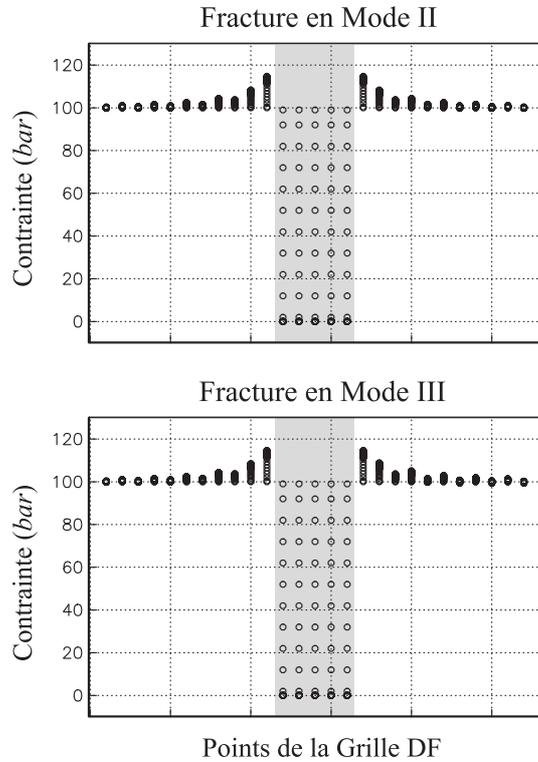


FIG. 4.12: Évolution de la contrainte cisailante au cours du temps (cercles) au voisinage d'un *élément de frontière* composé d'un *octaèdre* (zone grise), dont les axes principaux sont parallèles aux axes cartésiens. Valeurs calculées nœud par nœud le long de deux droites perpendiculaires passant par le centre de l'élément dans les directions de déformation in-plane (mode II) et anti-plane (mode III).

été utilisés (équations 1.101), donnant des résultats sensiblement similaires à ceux obtenus à l'ordre deux.

Les résultats obtenus dans les trois cas sont présentés sur les Figures 4.12, 4.13 et 4.14. Le premier élément testé décrit un octaèdre dont les trois axes majeurs (*i.e.* diagonales reliant ses sommets) sont parallèles aux axes cartésiens et contiennent cinq nœuds de contraintes. La figure correspondante (4.12) montre l'évolution de la contrainte cisailante nœud par nœud suivant deux lignes traversant l'élément (zone grise), correspondant aux directions de déformation in-plane et anti-plane. La singularité de contraintes est bien résolue de part et d'autre de l'élément dans les deux directions montrées. En revanche, l'état des contraintes autour d'un élément cubique dont

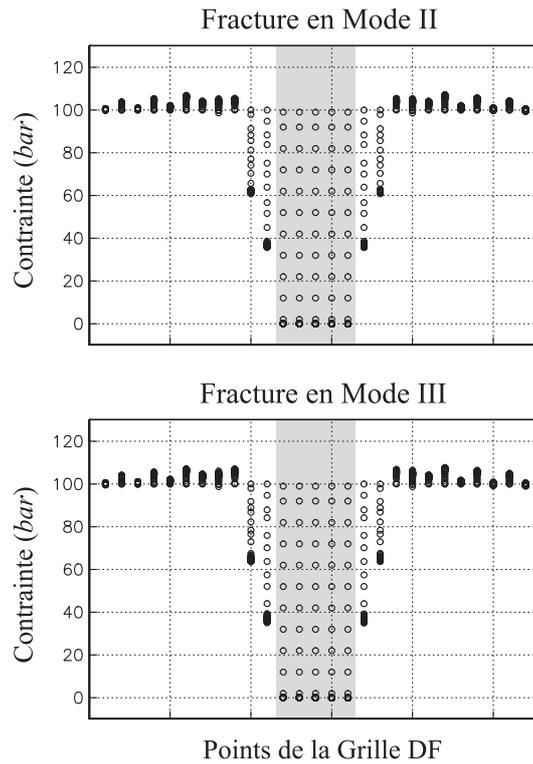


FIG. 4.13: Évolution de la contrainte cisailante au cours du temps (cercles) au voisinage d'un *élément de frontière* composé d'un *cube* (zone grise) dont les arêtes sont parallèles aux axes cartésiens. Valeurs calculées nœud par nœud le long de deux droites perpendiculaires passant par le centre de l'élément dans les directions de déformation in-plane (mode II) et anti-plane (mode III).

les arêtes parallèles aux axes cartésiens contiennent aussi cinq nœuds, subit l'influence de la discrétisation (Figure 4.13) : les valeurs calculées dans les deux nœuds les plus proches de l'élément sont entraînées vers des valeurs proche de la chute de contrainte. Cette différence provient de la discrétisation. L'évaluation des contraintes sera précise dans la mesure où les nœuds de vitesse nécessaires pour calculer les contraintes se trouvent à l'extérieur de l'élément. Autrement dit, dans la mesure où les bras du stencil dérivant le champ de vitesse ne pénètrent pas l'élément. Puisque le stencil réalise localement les dérivées spatiales suivant les quatre directions bissectrices aux axes cartésiens (voir Figure 1.11, page 57), la seule configuration qui remplit cette condition pour tous les nœuds se trouvant autour de l'élément est celle d'un octaèdre disposé de la manière décrite précédemment. A l'opposé, la configuration pour laquelle quatre des huit bras du stencil pénètrent l'élément est donnée par un cube similaire à celui dont les résultats ont été déjà décrits (Figure 4.13). Un très grand nombre de tests ont été réalisés à partir d'octaèdres ayant différentes tailles et dispositions pour résoudre le problème de comparaison proposé par Harris & Archuleta (2004), formulé et résolu dans la section 4.2.5.1. Bien que la forme du front de rupture de la solution de référence soit bien reproduite, un délai systématique des temps de rupture persiste, lors de nos essais numériques dont nous ne présentons pas ici les résultats. Ce problème est du à un autre facteur étroitement relié à la construction de la singularité de contraintes via la loi constitutive de frottement : une sous-estimation du glissement de la faille. Finalement, il existe une dernière limitation vis-à-vis de l'objectif ultime de ma recherche, raison pour laquelle cette voie a été abandonnée, qui est que discrétiser une surface non-planaire (ou bien un plan orienté arbitrairement) avec des octaèdres représente un problème topologiquement très difficile, si ce n'est impossible, à résoudre.

La structure des éléments de frontière qui fournit le meilleur compromis entre la précision du champ de contraintes et la flexibilité géométrique nécessaire pour décrire une source complexe est un parallélépipède tourné de 45° par rapport à l'un des axes cartésiens, comme celui de la Figure 4.15b. Les contraintes cisailantes autour d'un tel élément, toujours dans les deux mêmes directions, sont représentées sur la Figure 4.14. Bien que la singularité ne soit pas aussi bien reconstruite que dans le cas d'un octaèdre (Figure 4.12), le résultat est bien meilleur que celui associé à un cube (Figure 4.13), principalement dans la direction de déformation anti-plane. Malgré le manque de précision dans les nœuds les plus proches de l'élément, la propagation de la rupture avec cette structure d'éléments est bien modélisée puisque ces nœuds n'interviennent pas dans le critère de rupture comme nous le verrons dans la

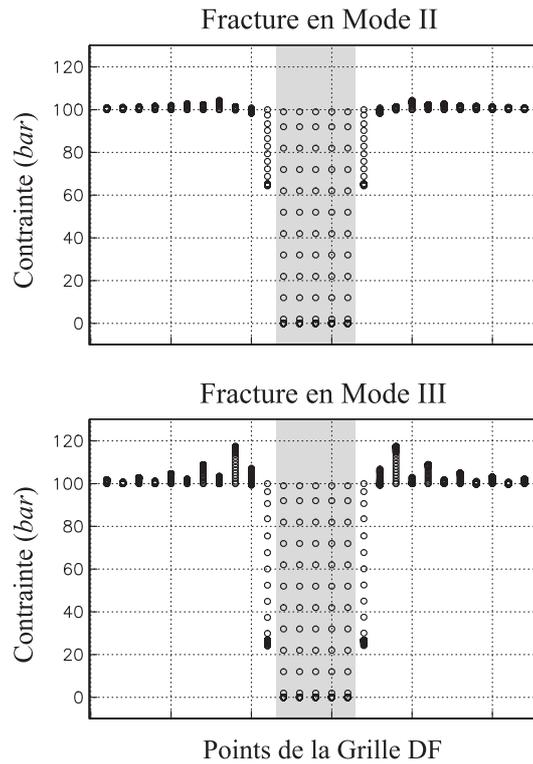


FIG. 4.14: Évolution de la contrainte cisailante au cours du temps (cercles) au voisinage d'un *élément de frontière* composé d'un *parallélépipède tourné de 45°* (zone grise, voir Figure 4.15). Valeurs calculées le long des deux droites perpendiculaires entre elles, également perpendiculaires à l'axe de rotation de l'élément. Ces lignes passent par le centre de l'élément dans les directions de déformation in-plane (mode II) et anti-plane (mode III).

section 4.2.3.1, où des fonctions de pondération similaires à celles mises en œuvre en 2D nous permettent de mieux contrôler ces artefacts numériques très localisés.

4.2 Nonplanar Dynamic Rupture Model

4.2.1 Introduction

As discussed in section 1.5.1.2 (page 92), the dynamic rupture along a planar fault embedded in an homogeneous space represents a mathematically symmetric problem. This means that simulating such an idealized phenomenon only requires knowledge about what happens on one of the two half-spaces separated by the fault plane. The only way to introduce some complexity in rupture propagation is by considering heterogeneities in the initial fault shear stress or the constitutive friction parameters (*e.g.*, Das & Aki, 1977a, Day, 1982b, Dunham et al., 2003). However, when modeling real earthquakes, symmetry may rapidly becomes an unacceptable hypothesis. Breaking the symmetry of the problem means that, depending on the rupture mode, different elastic field components which are odd functions around a planar fault become different to zero on the rupture surface. Among them we have the fault normal traction which may directly affect rupture propagation as a consequence of a Coulomb-like friction behavior.

There are many different ways to break the rupture symmetry. For instance, if rupture happens near the earth surface and the fault describes an angle not normal with it, the feedback interaction coming from reflected waves in the free surface may strongly affect rupture propagation and near-field strong motions (Nielsen, 1998, Oglesby et al., 1998, 2000). The interaction between different faults or fault segments may also cause static or dynamic normal stress perturbations which induce complex rupture patterns or faulting transfer (Harris & Day, 1993, Nielsen & Knopoff, 1998, Harris & Day, 1999, Aochi et al., 2000a, Kase & Kuge, 2001, Oglesby et al., 2003, Ando et al., 2004). An other different manner to make the rupture process an asymmetric problem is by considering an asymmetric structure surrounding the fault plane. Depending on the elastic contrast between the materials along the rupture interface, an anti-symmetric bilateral normal-stress perturbation will propagate from the initiation point producing fault perpendicular deformations which are translated into « wrinkle-like » asymmetric dislocation pulses (Harris & Day, 1997, Andrews & Ben-Zion, 1997, Weertman, 2002, Ben-Zion & Huang, 2002). This complex behavior which has been recently observed in laboratory experiments (Xia et al., 2005), should be close to that we would intuitively expect along nonplanar faults were antisymmetric normal stress changes are also produces. However, when some tectonic load is present, rupture propagation is mainly governed by the friction parameters, the rupture velocity and the orientation of fault branches which entirely determine the two « competing forces » : the fault strength and the

shear stresses ahead the rupture front. (Aochi et al., 2002, Poliakov et al., 2002, Kame et al., 2003, Cruz-Atienza et al., 2004a). In other words, the dynamic fault-normal stress changes translated into fault strength fluctuations are often negligible in realistic nonplanar rupture conditions. Consequently, rupture propagation under these conditions may be approximated neglecting the Coulomb normal-traction dynamic contribution (Aochi et al., 2000a, Aochi & Fukuyama, 2002). Rupture analysis along loaded nonplanar faults has been essentially done in locally kinked fault as a function of the angle between planar branches and a primary fault segment. Nevertheless, in real cases the fault geometry may present subsequent bends producing different initial conditions along the same rupture surface (Aochi & Fukuyama, 2002, Aochi & Madariaga, 2003). So in order to better understand and asses the effect of a continuously varying fault orientation on rupture propagation, we performed different simulations along three-dimensional parabolic-shaped surfaces with different eccentricities embedded in a biaxial regional load. As we shall see, important bilateral asymmetric fault ruptures are revealed.

Usually, the dynamic rupture propagation of earthquakes has been mainly modeled with three numerical approaches : the finite difference method (FDM) (*e.g.*, Madariaga, 1976, Andrews, 1976a, Mikumo & Miyatake, 1978, Day, 1982a, Virieux & Madariaga, 1982), the boundary integral equation method (BIEM) (*e.g.*, Burridge, 1969, Das & Aki, 1977b, Andrews, 1985, Das & Kostrov, 1987) and the finite element method (FEM) (*e.g.*, Day, 1977, Archuleta & Frazier, 1978, Andrews, 1999, Oglesby, 1999, Aagaard, 2000). Bearing in mind the current computational power, a great interest has emerged in the last few years to develop more sophisticated approaches. The discrete element method (DEM), introduced in the early 70s for studying the displacement of rock masses, has been recently used in seismology for simulating rupture dynamics and strong ground motions (Dalguer et al., 2001, 2002, 2003a). Nevertheless, the most recent models allow to handle nonplanar rupture surfaces. For example, we have the finite element methods (*e.g.*, Oglesby & Archuleta, 2003, Aagaard et al., 2004) from which the spectral element methods (SEM) are derived, combining the geometrical flexibility of the FEM with the accuracy of the pseudo-spectral techniques (Ampuero, 2002, Ampuero & Vilotte, 2002, Festa, 2004, Vilotte et al., 2005, Madariaga & Ampuero, 2005). Even more recent, a promising finite volume technique (FVM) for spontaneous rupture simulation has been proposed (Ben-Jemaa et al., 2006). This technique allows unstructured mesh refinement in potentially heterogeneous elasto-plastic or visco-plastic materials (Fryer et al., 1991). Well adapted to describe complex fault geometries in homogeneous media, the BIEM have represented an essential numerical tool in the last

decade (Fukuyama & Madariaga, 1995, Kame & Yamashita, 1999, Aochi et al., 2000b). The problem of fault branching and transfer discussed in last paragraph has been mostly tackled with this kind of methods. On the other hand, despite of their often regular Cartesian discretization, the FDM have proved to be able to handle similar geometrically complex problems (Cruz-Atienza & Virieux, 2004, chapter 3 of this document). With fourth-order spatial operators in a two-dimensional partly-staggered grid, this technique allows the interaction between fault rupture and high contrast heterogeneities in the surrounding medium (*e.g.* Figure 3.15 on page 200). An interesting and complete review of numerical modelling for rock mechanics including almost all mentioned methods and even others not considered has been done by Jing (2003).

The increasing amount of numerical techniques that solve the dynamic rupture problem requires a rigorous validation effort in order to achieve physical interpretations of these models without misinterpretation of numerical artefacts. For this reason, before discussing rupture examples along nonplanar faults, I firstly introduce the three-dimensional FD technique used for this purpose. After a convergence analysis in terms of the cohesive zone resolution, this new methodology is validated by comparing results for spontaneous slip-weakening ruptures along planar and nonplanar faults with those obtained with two independent approaches : a FD traction-at-slip-node model (Andrews, 1999, Day et al., 2005) and a BIE model (Aochi et al., 2000b). These comparisons show that our FD rupture model, based in a thick fault description, is accurate enough to perform these kind of complex simulations. Moreover it confirms that FD techniques still represent a viable and reliable way to model earthquake dynamics along nonplanar faults.

4.2.2 Numerical Model

The approach introduced in this section is basically an extension to three dimensions (3D) of the numerical model proposed by Cruz-Atienza & Virieux (2003, 2004) in two dimensions (2D) (chapter 3 of this document). In that work, Cruz-Atienza & Virieux have shown that finite difference approaches in a regular grid are able to model the dynamic rupture of faults having nonplanar (curvilinear) geometries. A key element of that approach is the way rupture boundary conditions are implemented. The bidimensional analysis has shown that the scaling between the grid size and the number of grid nodes within the source (equation 3.4, page 180) makes possible to discretize the same source in many equivalent ways by reducing the spatial grid step and increasing the amount of stress-grid points. The numerical accuracy of this

model is controlled by both the grid size and the amount of stress points par boundary element¹ : the greater the number of points the smaller the spatial grid step may be without generating destructive interactions between the elements (see Figure 3.9). When modeling huge 3D rupture scenarios, computational resources prevent the use of extremely fine meshes so low order boundary elements (*i.e.* elements with small number of stress points) are suitable if they achieve good numerical accuracy. On that account, after trying different boundary elements configurations (section 4.1.3), one has been selected owing to a good compromise between its size and the spontaneous rupture accuracy. As we shall see in section 4.2.4, others parameters exist that play an important role in numerical convergence. However, before starting the analysis of such a dynamic rupture model, let first state the problem equations and the way they were numerically approximated.

Consider a linearly elastic three-dimensional homogeneous and isotropic medium : it is fully described by λ and μ , the Lamé coefficients, and ρ , the density. Following Madariaga (1976), in absence of body forces the elastodynamic equations governing the P and S wave propagation in such a medium may be expressed in terms of the velocity vector, v_i , and the stress tensor, τ_{ij} , as :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \tau_{ij,j} \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (4.5b)$$

(see section 1.3.3.1 for details, page 49). System (4.5) contains nine PDE which may be discretized in a partly-staggered finite-differences grid where velocities and stresses are known in two separated regular lattices (Saenger et al., 2000), as shown in Figure 1.10 (page 55). The spatial differential operators associated with this fields discretization were mathematically deduced in section 1.4.2. They are simply defined as the linear combination of four others operators (D) applied along the bisector directions of the Cartesian frame of reference, \hat{d}_i , illustrated in Figure 1.11 (page 57). In a regular grid with spatial step h , the Cartesian differential operators contained in equation 4.5 are thus given by :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\approx \frac{1}{4h} \left(D_{\hat{d}_1} + D_{\hat{d}_2} + D_{\hat{d}_3} + D_{\hat{d}_4} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &\approx \frac{1}{4h} \left(D_{\hat{d}_1} + D_{\hat{d}_2} - D_{\hat{d}_3} - D_{\hat{d}_4} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

¹In the 2D model, the « boundary elements » were called « numerical cells ».

$$\frac{\partial}{\partial z} \approx \frac{1}{4h} \left(D_{\hat{d}_1} - D_{\hat{d}_2} + D_{\hat{d}_3} - D_{\hat{d}_4} \right).$$

Note that the current leap-frog staggered approach retains the efficiency and the accuracy of the standard finite-difference staggered-grid introduced by Madariaga (1976) (section 1.4.1.1) : one must estimate stress derivatives at velocity grid points and, conversely, velocity derivatives at stress locations. Figure 1.11 shows the stencil of the second order spatial operators applied to the velocity field (red spheres) to compute a stress point value (blue cube). In the present work, I have applied both the second-order and the fourth-order accurate operators in space increment given respectively by expressions 1.99 and 1.101. However, for the sake of computational efficiency, time derivatives were always performed with second-order accurate central operators. Once these spatial and temporal operators are substituted into the system 4.5, we obtain the partly-staggered finite-difference formulations with accuracies $O[(\Delta t)^2, h^2]$ and $O[(\Delta t)^2, h^4]$ given explicitly by expressions 1.104 (page 66) and B.1 (page 319).

Two main advantages of the partly-staggered finite-difference approach with respect to the standard one should be pointed out : 1) the stress and the velocity fields are defined in different nodes. Each field has all its components discretized at the same node ; and, 2), The stability condition is less restrictive. As we shall see in section 4.2.2.2, the first advantage leads us to one fundamental root of our nonplanar rupture model since it allows the stress tensor transformation needed to apply the dynamic rupture boundary conditions. Concerning the second one, a von Neumann stability analysis shows that the magic time step given by $\Delta t \leq h/v_{max}$ satisfies the stability condition if second order spatial operators are applied (Saenger et al., 2000, see section 1.4.4.1 of this document). In contrast with the standard staggered grid, the stability condition does not depend on the problem dimension (compare inequation 1.67 for the standard staggered grid with inequation 1.68 for the partly staggered grid, page 42). Moreover, if using fourth-order spatial operators in their stability limit, the time step on the partly staggered grid is 1.7 times higher than that of the standard grid. This translates into 40% less of iterations to achieve the same simulation problem. Of course these are theoretical values computed for planar waves propagating in homogeneous unbounded spaces. Imposing dynamic rupture boundary conditions always makes more restrictive the stability criteria of numerical methods. Values for the Courant number up to $S = v_{max}\Delta t/h = 0.66$ yield stable solutions when simulating the spontaneous rupture in the partly-staggered grid with the numerical model introduced in next sections, which is at least 1.5 times greater than those reported in previous FD rupture models (*e.g.*, Virieux

& Madariaga, 1982, Madariaga et al., 1998). Even if high order schemes are expected to verify more restrictive stability conditions than those of low order (section 1.2.5), this Courant value is valid when applying both operators as mentioned in last paragraph.

In order to simulate an unbounded space without loss of numerical accuracy, I have implemented the Perfectly Matched Layer (PML) absorbing boundary conditions in every external domain of the 3D computational domain (see section 1.5.2). Numerical tests in heterogeneous media have shown an effective energy absorption greater than 99% (see Figure 1.28 in page 116 and Figures 1.33 to 1.35 from page 124). So, before analyzing the numerical properties of the proposed numerical model, let first introduce the way source boundary elements are discretized and how rupture boundary conditions are applied along an arbitrary shaped 3D surface.

4.2.2.1 Source Discretization

Similarly to our 2D model (chapter 3), a given 3D finite rupture surface will be numerically represented by a set of neighboring boundary elements placed alongside this surface. A source boundary element is a well-structured set of stress-grid points which acts as an elementary source unity : local boundary conditions are applied on it according to the fault normal vector direction in the element. As discussed in section 4.1.3, the optimal configuration for these boundary elements is such that no « leg » of the numerical stencil needed to compute stresses outside the source in the coplanar fault direction goes inside the element. I call optimal configuration that element structure which provides the best resolution of the shear stress growth immediately ahead the rupture front. Given that in the partly staggered grid the stencil performs spatial derivatives along the four Cartesian bisectors (Figure 1.11, page 57), the only way to verify this condition is by taking a regular octahedron as the element geometry and orient it such that its mayor axes are parallel to the reference Cartesian ones. Unfortunately, to discretize an arbitrarily shaped surface with this element structure becomes a topologically impossible problem. On the other hand, from the optimal configuration viewpoint, the square boundary elements used in the 2D rupture model (Figure 3.8) translated into 3D entities (*i.e.* cubes with edges parallel to the Cartesian axes) are not a good choice. Numerous tests have revealed that, in that case, the stress concentration immediately ahead the rupture front is blunted (see section 4.1.3), as pointed out by Dalguer & Day (2004, 2006) in the case of the FD model introduced by Madariaga et al. (1998) which can be seen as the simplest case of our model family if we take the boundary

elements as cubes containing the minimal number of stress-grid points (*i.e.* 8 points).

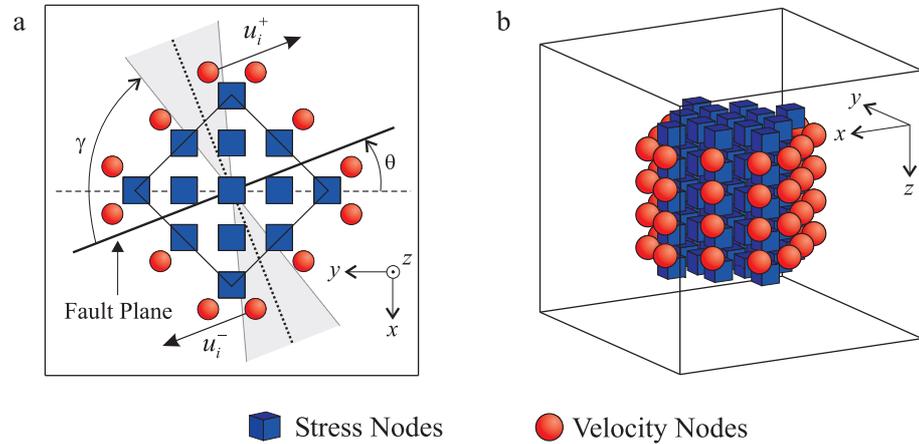


FIG. 4.15: (a) Upper view of one boundary element. In this example the translation invariant axis is parallel to the z Cartesian axis. The angle θ gives the fault plane orientation with respect to that axis (see also Figure 4.16). The angle γ determines the spacial sector (gray region) around the fault normal direction (dotted line) used to compute the slip and the slip-rate (see section 4.2.3.2). (b) Three-dimensional perspective view of one individual boundary element.

After trying many different possibilities, the boundary element structure which achieves the best compromise between stress field resolution and geometrical flexibility is a 45° rotated parallelepiped, as the one shown in Figure 4.15 (blue cubes). Note that the number of stress-grid points along the diagonals parallels to the x and y axes is the same that the stress-grid layers perpendicular to the z axis. In this case the element rotation is with respect to the z axis. However, for symmetry reasons, it may be with respect to any of the three Cartesian axes. Note also that this element configuration makes that only two of its faces (*i.e.* the upper and bottom faces in Figure 4.15) are parallel to one of the Cartesian planes. Consequently, the way to discretize nonplanar fault surfaces is by forcing the source geometry to have a translation invariant direction parallel to the boundary elements rotation axis. In our example such a translation invariant direction is the z axis. The discretization of a finite source may be then performed in two stages. Firstly, the nonplanar source geometry is mapped over the $x - y$ Cartesian plane by a succession of boundary elements placed beside each other in a similar way as our 2D model does (see Figure 3.8, page 187). Secondly, the discretized

2D geometry is then simply extended along the translation invariant direction (*i.e.* the z axis) by superposing boundary elements over their horizontal faces without shearing any stress-grid point.

As pointed out in the analysis of our 2D rupture model (section 3.5.1, Figure 3.9 on page 188), the numerical accuracy of rupture boundary conditions depends on both the grid size and the number of stress-grid points inside each boundary element. The smaller the grid size the greater this number must be in order to improve the accuracy. However, limitations of computational resources prevent the use of extremely fine 3D meshes. Thus, low order boundary elements (*i.e.* elements with small number of stress points) are suitable to achieve a good enough results. On that account, owing to a good compromise between its size and the spontaneous rupture accuracy, I found the boundary element shown in Figure 4.15 with only 65 stress-grid points be a good choice for possible grid size ranging from to . Higher order elements in relatively coarse meshes would affect rupture solutions because of the big distances between their central stress points (see section 4.2.3.1). So before analysing the rupture criterion consider in every boundary element, let first introduce the way rupture boundary conditions are applied along the fault surface.

4.2.2.2 Rupture Boundary Conditions

One of the main features of our rupture model is the way rupture boundary conditions are applied. Because the ultimate purpose is to simulate the dynamic rupture of nonplanar faults embedded in arbitrarily heterogeneous media, no symmetry considerations with respect to the fault surface may be taken into a count. In other words, no mixed boundary conditions, as those discussed in section 1.5.1.2 (equations 1.112, page 94), are applicable to our problem. On the contrary, only the stress drop associated with the material dislocation may be considered as boundary condition along the rupture surface.

When modeling the dynamic rupture in fracture modes II and III (*i.e.* in-plane and anti-plane modes, see sections 1.5.1.2 and 2.3) the stress drop takes place in the tangential fault direction. In our rupture model, every source boundary element acts as an independent unity inside which the same boundary condition is applied. Depending on the local fault orientation in a given element, the same shear stress drop $\Delta\tau$ is imposed along the entire set of stress-grid points contained in that element (cubes in Figure 4.15b). So, following the procedure introduced in the 2D rupture model formulation (section 3.3), let us consider a local Cartesian reference frame, $x'y'z'$, which

matches the fault orientation in such an element. As we can see in Figure 4.16, if one of the new axis always points toward the fault strike direction, the local reference frame is uniquely determined by the fault normal vector. Under these conditions we can transform the stress tensor, $\boldsymbol{\tau}$, from the original Cartesian system xyz to the fault local one, by mean of two successive rotations performed along the Euler angles θ and ϕ . Thus, the direct and inverse transformation of that tensor are respectively written as

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau}\tilde{\mathbf{A}} \quad (4.7a)$$

and

$$\boldsymbol{\tau} = \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\tau}'\mathbf{A}, \quad (4.7b)$$

where the 3 by 3 orthogonal matrix \mathbf{A} is defined by the product of two rotation matrices, \mathbf{B} and \mathbf{C} , which simply depend on the fault dip and fault strike (*i.e.* angles ϕ and θ in Figure 4.16). The symbol $\tilde{\mathbf{A}}$ represents the transposed matrix of \mathbf{A} . Hence, as shown in Figure 4.16, the normal and shear traction components to the fault surface are given respectively by

$$\sigma = \tau'_{zz} \quad \text{and} \quad \tau = \sqrt{\tau'^2_{xz} + \tau'^2_{yz}}. \quad (4.8)$$

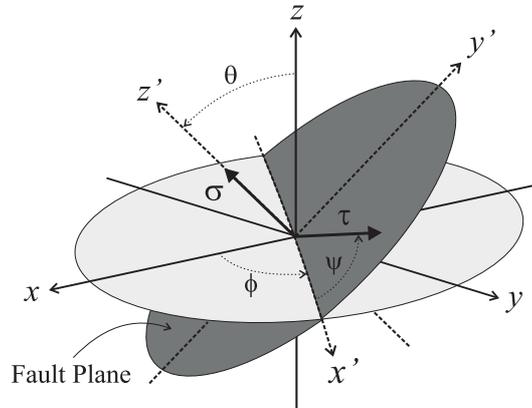


FIG. 4.16: Local reference frame, $x'y'z'$, matching the fault orientation in a give source boundary element. σ is the fault normal stress and Ψ is the orientation angle of the fault shear stress (τ) over the fault surface measured from the x' axis.

The Coulomb friction law (section 2.2) states that rupture begins in a given fault point when the ratio between τ and σ equals the static friction

coefficient. Once this condition is verified, a material dislocation starts developing due to a progressive drop of fault strength. This lack of resistance brings an ongoing stress relaxation (*i.e.* shear stress drop $\Delta\tau$) until the dynamic friction level is reached. So, to determine rupture initiation and then to impose the shear stress values associated with that relaxation we should monitor the fault tractions continuously over the entire source as the time goes by. On that account, for every time step we compute τ' in every boundary element via equation 4.7a to determine the local fault status : if $\tau' > \tau_u$, the static yield stress, the fault breaks and tractions equal from then on the strength given by a constitutive friction law (*e.g.*, the slip-weakening law, equations 4.14). Once the entire fault is examined, we bring back to the global Cartesian reference frame the stress tensor via equation 4.7b to perform the time integrations required to solve system 4.5b. The specific criterion used to determine rupture initiation in a given element is explained in next section.

4.2.3 Fault Mechanics

4.2.3.1 Rupture Criterion

Rupture propagation may be understood merely as a thermodynamical system in equilibrium. In other words, as a system in which the balance between the energy release rate and the fracture energy is conserved. That is what the Griffith's (1920) criterion states (for details see section 2.4.1 on page 155). However, because no real material may resist infinite stress concentrations, one alternative way to determine if rupture should keep advancing is by looking at the stress field around the rupture front and comparing it with the material resistance value. Irwin (1957) has introduced the concept of *stress intensity factor*, K , as the physical parameter characterizing the instantaneous state of stress in the neighborhood of the rupture front (see section 2.3). He has also identified the material resistance as a physical property he called the *critical stress intensity factor*, K_c , in such a way that rupture propagates only if K reaches this critical value. It can be shown that Irwin's rupture criterion is equivalent to that proposed by Griffith in the static case for which the stress intensity factor is univocally related to the energy release rate (Irwin, 1957, 1960). A numerical comparison of these two rupture criteria for a mode III spontaneous fracture was carried out by Das & Aki (1977b). Globally they conclude that rupture propagates faster when only energetic considerations are made (*i.e.* when applying the Griffith criterion). More recent investigations have confirmed this result and shown that the Irwin's criterion is always at least as restrictive as the Griffith's one.

Unfortunately, neither criteria discussed in last paragraph may be directly implemented in a discrete solver. For that reason, the methodology introduced by Hamano (1974) has been widely used for simulating numerically the dynamic rupture of earthquakes. In this methodology the rupture surface is discretized in regular segments of length d (see Figure 2.9 on page 159). So, as discussed in section 2.4.1, the rupture criterion proposed by Hamano states that rupture will propagate to the next fault segment if the mean stress value along that segment, given by equation 2.32 (page 158), overtakes the static fault strength. Thus, in order to make possible its discrete implementation, Hamano supposed that such a mean value is equal to the stress valued at the middle point of the segment. Despite its simplicity, it may be shown theoretically that this criterion is nearly equivalent to the Irwin's one (see section 2.4.1). Das & Aki (1977b) have implemented the proposed methodology in a boundary integral formulation and compared their results with the analytical solution for the Irwin criterion. They found both data be quite similar. In section 4.2.4 I will discuss the importance of cohesive forces in the numerical convergence when applying this rupture criterion.

In our model we use the Hamano's rupture criterion. On that account, to determine when a boundary element should break, stresses are monitored not only in the central point of the element but within a small neighborhood surrounding it given by the six stress-grid points lying at one spatial step from the central point. Thus, when determining the actual element state of stress, the algorithm always takes the maximum stress value within this neighborhood. This procedure is performed because in nonplanar discrete surfaces we actually never know exactly where the continuous fault geometry passes. The only thing we know is that, except for planar cases perpendicular to the Cartesian axis, it rarely passes through the element center (see Figure 3.8 on page 187). Consequently, by considering this small region around the element center we favor a more fair stress value for the whole element. Once the element shear stress determined in that way overtakes the fault yield strength, the boundary condition described in last section is then applied in all stress-grid points contained in the element.

4.2.3.2 Kinematics

Accurate quantification of rupture kinematical parameters is essential since these parameters are directly related with the stress relaxation process via the constitutive friction law. However, rupture propagation induces inelastic effects around the sliding surface due to secondary microfracturing, mass creeping or even thermal pressurization due to the presence of fluids

in the fault zone (*e.g.*, Andrews, 1976b, Ben-Zion & Sammis, 2003, Dalguer et al., 2003b, Andrews, 2005, Rice et al., 2005, Wibberley & Shimamoto, 2005, see sections 2.2 and 2.3 of this document). A realistic estimate of fault slip and slip-rate seems then to be a non trivial problem. Theoretical simplifications may of course be done in order to discriminate different effects and then to assess the influence more or less important of each one of them in rupture propagation.

A strong assumption usually done when modeling rupture dynamics is to discriminate the damage fault zone mentioned in last paragraph. In other terms, we suppose a linearly elastic response of the entire medium except over the sliding surface in which deformations and stresses are related through a friction law. In this case, the fault kinematical parameters and the stress drop are suppose to take place along such a surface. In the finite-difference literature devoted to model the dynamic rupture of earthquakes we essentially find two main branches. The difference between them lies in the way the fault is numerically represented. In one case the fault is infinitely thin (*i.e.* it is represented by a surface) and in the other the fault presents a finite thickness (sections 1.5.1.2 and 4.1). In the first one the displacement discontinuity associated with rupture is explicitly incorporated in velocity nodes and is called the *traction-at-split-node* (TSN) method (see Andrews, 1999, Day et al., 2005). On the other hand, as discussed in section 4.1, there are at least two different models belonging to the second branch. The main common feature of these *fault-zone* (FZ) models is the spatial mismatch between the points in which the stress drop take place and the points in which the fault kinematical parameters are evaluated. Therefore these are models in which the physical fault thickness directly depends on the spatial grid step. Strictly speaking this means that, if the same rupture simulation is performed with two different spatial grid steps, both results will always correspond to two physically different phenomena. Note that the fault zone associated with this kind of source discretization will then experience inelastic deformations without energy dissipation since only the friction law acts through it. In other words, these numerical FZ models should not be understood as an attempt to represent the damage fault zone mentioned in the last paragraph. Our numerical model belongs to the branch of fault zones. However, as it will be shown in later sections, the approach presented here to evaluate the fault kinematics makes our *thick-fault* model to achieve a good accuracy with respect to the TSN in a planar fault and with respect to the boundary integral method (BIE) in nonplanar parabolic faults.

The slip and slip-rate estimate in our 3D rupture model follows the same strategy detailed in section 3.4.2 for the two-dimensional case. The main dif-

ference is that in the three-dimensional case the fault surface always presents a translation invariant direction which is parallel to one Cartesian axis (*e.g.*, the z axis in Figure 4.15b). This means that the procedure for evaluating the fault kinematical parameters should be performed accordingly to the boundary elements orientation. In this procedure we then always suppose one of the two local reference axis contained in the fault plane (*i.e.* x' or y') to be parallel to such an invariant direction. So let the displacement discontinuity function S on the fault plane be the relative displacement between the positive (D^+) and the negative (D^-) fault blocks as assumed in the following equation (repeated) :

$$S(t, \Phi) = D^+(t, \Phi) - D^-(t, \Phi), \quad (4.9)$$

where the time is denoted by t and the constitutive friction law by the local set of parameters Φ . As shown in Figure 4.15a, the fault plane passes through the center of the boundary element. Thus, velocity-grid points i around the cell (red spheres) belong either to the positive or the negative fault block. So to compute the positive fault block displacement D^+ , we average the n points displacements u_i^+ parallels to the rupture surface which lie within a small sector (gray zone) around the fault normal plane (dotted line). Omitting the constitutive parameters, this procedure is expressed in the following formula :

$$D^+(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^+(t, \theta, \Psi) \cdot \mathcal{H}_i(\theta, \Psi), \quad (4.10)$$

where the weight functions \mathcal{H}_i have already been introduced in section 3.4.2. The only difference is that in 3D geometry these functions also depend on Ψ , the direction in which the shear stress acts over the fault plane (Figure 4.16). For symmetry reason with respect to fault normal axis (z'), the weight functions may be then simply defined as the following linear combination :

$$\mathcal{H}_i(\theta, \Psi) = |\cos \Psi| \cdot \mathcal{H}_i(\theta, \Psi = 0^\circ) + |\sin \Psi| \cdot \mathcal{H}_i(\theta, \Psi = 90^\circ). \quad (4.11)$$

In other words, the functions $\mathcal{H}_i(\theta, \Psi)$ are obtained from those computed via equation 3.8 (page 183) for two specific Ψ angles : 0° and 90° . We shall see that this procedure makes the fault block displacement (equation 4.10) be independent of source orientation.

As discussed in the two-dimensional finite-source accuracy section 3.5.1, considering the velocity-grid points within the element sector mentioned above avoids undesirable effects due to inter-element destructive interferences. In the specific element structure selected all along this work the angle γ (Figure 4.15), which defines such a region, is equal to 56° . This value

makes that, whatever the fault orientation is with respect to the translation invariant axis, at least four and maximum eight velocity-grid points lie in that sector per fault block. For instance in Figure 4.15 we have $n = 4$. Once the negative fault block displacement D^- is performed in a similar way, we can compute the boundary element slip functions by a simple substitution of these values in equation 4.9. The slip-rate function in a given boundary element is determined exactly in the same way but without integrating the velocity field in the velocity-grid nodes.

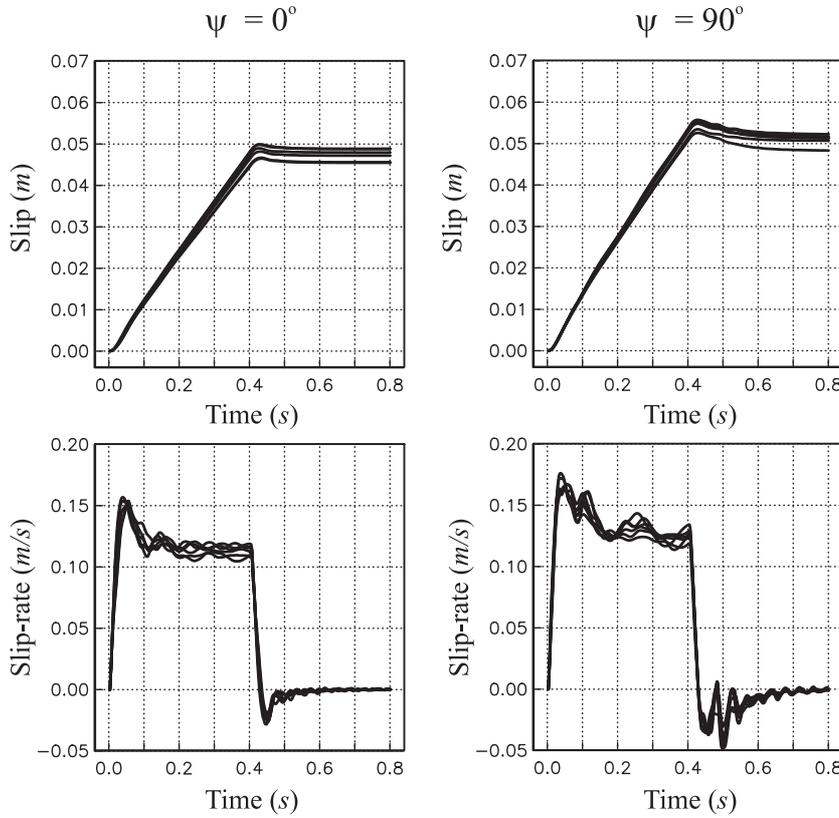


FIG. 4.17: Time functions computed in a point source represented by one boundary element (Figure 4.15b). Results were obtained for dip angles $\phi = 0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ, 36^\circ, 45^\circ$ (see Figure 4.16) and then superimposed in each panel. The left column corresponds to a shear stress drop $\Delta\tau$ parallel to the x' axis (*i.e.* $\Psi = 0^\circ$, Figure 4.16) and the right column for a $\Delta\tau$ perpendicular to the x' axis (*i.e.* $\Psi = 90^\circ$).

Figure 4.17 shows the slip and the slip-rate functions computed on a

boundary element like the one shown in Figure 4.15 for different fault orientations. These simulations were performed considering a simple linear time-weakening friction (Andrews, 2004) with characteristic weakening time equal to $0.4s$. This means that shear tractions shoot down from the initial stress level ($\tau_0 = 30bar$) to the dynamic level. Because the translation invariant direction is parallel to the z axis then $\theta = 90^\circ$ in all simulation. The left column shows slip and slip-rate functions computed for six different fault orientation angles $\phi = 0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ, 36^\circ, 45^\circ$ and for a shear stress drop $\Delta\tau$ perpendicular to the translation invariant direction ($\Psi = 0^\circ$). The right column shows similar results but for $\Delta\tau$ parallel to the translation invariant direction ($\Psi = 90^\circ$). As a whole, when no dependence on fault orientation ϕ is observed, we see some dependence on the stress drop orientation angle Ψ . One thing may be pointed out : a small overestimation of the amplitude smaller than 10% is observed for $\Psi = 90^\circ$.

4.2.4 Resolution and Convergence

One of the most important aspects that must be analyzed when using numerical methods to approximate a problem solution is the convergence of those methods. The only way to generate information about physical phenomena from their own numerical simulation is being confident of the independence between the output solution and the input numerical parameters. The input parameters may control the stability and accuracy of the methods and are often related to the spatial discretization of the physical domain or the time increment in evolutionary problems (see sections 1.2 and 1.4). In wave propagation modeling, to obtain a good accuracy at a given frequency, the wavefield must be discretized by a minimum number of grid elements (points). This condition depends on the numerical formulation of the method (see sections 1.2.1.3, 1.2.4 and 1.4.4.2). However, when dealing with the dynamic rupture simulation the criterion for convergence toward the physical solution is not as clear as that since the source boundary conditions depend on the frequency and wavenumber content of the solution. In other words, there is a strong interdependence between source evolution and the excited wavefield. If the physical solution is singular near the rupture front as in the self-similar case with abrupt stress drop (see sections 2.3.1 and 3.5.2), very high frequencies are generated and only a « continuum approximation » may converge to that solution. So, one likely way to make possible a discrete approximation of that phenomenon is to introduce some regularization parameter which brings in a problem scale liable to the spatial or temporal numerical grid increments.

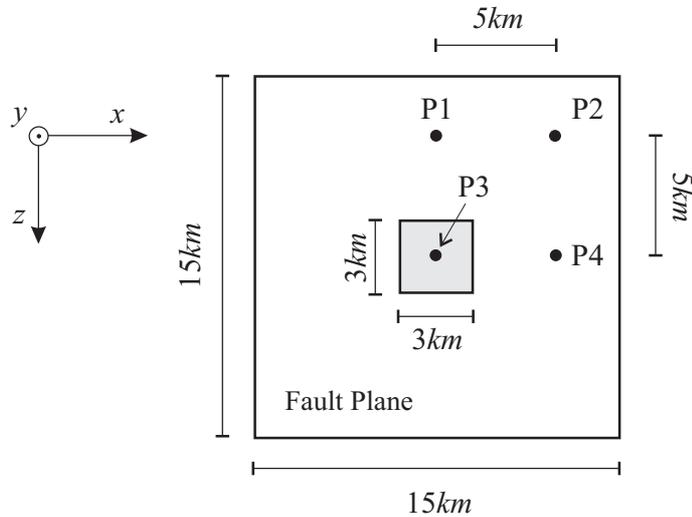


FIG. 4.18: Resolution test problem geometry. The nucleation patch (gray square) is centered in both the along-strike and along-dip fault directions. Fault solutions at the four observational points P1, P2, P3 and P4 (black points) are used for error estimation of the slip and slip-rate functions.

Introduced by Barenblatt (1959a,b), the concept of cohesive force during the rupture process plays a fundamental role (see section 2.3.2). Cohesive forces have a direct incidence in the nature of the excited wavefield, specially in the neighborhood of the rupture front where the highest frequencies are concentrated. When dependent on fault slip, these forces remove the stress singularity and make the slip function derivable at the crack tip (Ida, 1972, Palmer & Rice, 1973, Andrews, 1976a) (see Figures 2.6 and 2.7 on page 150). Their evolution as a function of slip then control the frequency content of the physical solution but also the width of the so-called cohesive zone (Λ_c , Figure 2.6) behind the rupture front. This zone is defined as the fault region inside which the breakdown process takes place, that is to say the broken region where the shear stress has not yet reached the dynamic friction level. As a consequence, the stress drop in every fault point happens along a slip-weakening critical distance, δ_c , which will then simultaneously control Λ_c and the way stresses concentrates ahead the rupture front.

In a discrete formulation of the dynamic rupture problem where the Hamano's (1974) rupture criterion is used (section 4.2.3.1), the main assumption lies in that the average shear stress along a boundary element is equal to the stress value at the center of such an element. In order to make possible the numerical convergence of the spontaneous rupture problem this hypothesis

must be respected. As shown by Das & Aki (1977b) (section 2.4.1 equation 2.32), the average boundary-element stress value is strongly dependent on the element size when no cohesion forces are considered (*i.e.* singular case). However, once the stress singularity removed via the slip-weakening mechanism we find that Hamano's hypothesis becomes true as δ_c increases. For this reason, the cohesive zone width Λ_c represents a physical length measured over the rupture surface in which the stress evolution must be well resolved during rupture simulation. Since δ_c directly controls Λ_c , this constitutive parameter acts as a regularization parameter which should also control numerical convergence through a cohesive zone resolution parameter that, following Day et al. (2005), may be simply defined as

$$N_c = \frac{\Lambda_c}{H}. \quad (4.12)$$

This number represents the amount of boundary elements of length H inside the cohesive zone along the perpendicular direction to the rupture front. Since the boundary elements have 5 stress-grid points along the diagonals in our numerical approach (Figure 4.15), from now on I will always suppose $H = 5h$, where h is the grid size. Thus, we may expect a minimum necessary and sufficient value of N_c for getting reliable simulation results. From Ida's (1972) results, Andrews (1976a, 2004) has derived a theoretical expression for the cohesive zone length. His approximation shows that if the stress-drop and δ_c are constant over the fault, Λ_c suffers a contraction inversely proportional to the rupture propagation distance (equation 2.17 on page 152). Detailed energy balance considerations lead Day et al. (2005) to show that the cohesive zone contraction depends not only in rupture propagation distance but also on rupture mode and rupture velocity, v_r , such that $\Lambda_c \rightarrow 0$ as $v_r \rightarrow v_R$ (the Rayleigh wave velocity) for in-plane fractures (mode II) and as $v_r \rightarrow v_s$ for anti-plane fractures (mode III). Consequently, the cohesive zone resolution evolves with time and is not a simulation requirement that could be insured *a-priori*. However, from the analysis of the SCEC code-comparison Version 3 exercise (see next section), Day et al. (2005) have identified N_c as a suitable convergence parameter for their finite-difference and boundary integral rupture models and determined a required N_c average value greater or equal to 4.4 for both methods. Other numerical approaches as the FD model introduced by Madariaga et al. (1998) yield stable and reproducible results if $N_c \geq 6.44$ or the recently introduced finite volume approach by Ben-Jemaa et al. (2006) for which $N_c \geq 10$.

According to the rupture model formulation, the numerical convergence may also depends more or less on other parameters. Solutions by FD techniques always exhibit oscillations caused by the stepwise advance of the crack

tip across the discrete lattice (Knopoff & Ni, 2001). Resonances of these oscillations may affect the rupture energy balance so as an important portion of the available energy may be emitted away from the fault decreasing the energy release rate needed for rupture to propagate (Parisi & Ball, 2002). Moreover, as it has been show by Dalguer and Day (2004, 2006), the physical thickness of the numerical fault zone in models like ours can also considerably affect rupture evolution. So, in order to better understand which factor presides convergence of our FD rupture model, in this section I firs analyze the dependence of N_c on the grid size, h , but also on the slip-weakening critical distance, δ_c , trough a spontaneous-rupture parametric study.

Problem Formulation

Since δ_c is directly related to the rupture energy budget (Day, 1982b, Madariaga & Olsen, 2000) (see equations 2.28 and 2.35), the fairest way to carry out such a parametric study in which this constitutive parameter varies would be by initiating every rupture case from its critical initial patch. In other words, from the balance between the available and the absorbed surface energy at time $t = 0$. If we suppose constant the relative upper yield point parameter $S = (\tau_u - \tau_0) / (\tau_0 - \tau_s)$ over the fault (see page 156) then the critical patch radius is directly proportional to δ_c . Given that the other varying parameter is the grid size, computer memory limitations constrain me to consider a relatively small fault preventing large variations of the nucleation patch size. Other possible way to respect the same energy balance condition for different values of δ_c is by keeping constant the nucleation patch size and then varying the value of S . Nonetheless, in that case the governing relation in not linear making S to grow asymptotically as δ_c decrease. Unrealistic high values of strength excess $(\tau_u - \tau_0)$ relative to the stress drop $(\tau_0 - \tau_s)$ must be then considered when $\delta_c \rightarrow 0$. So, what I did is to keep the same nucleation patch size, the same yield stress τ_u and the same dynamic friction τ_s whatever the value of δ_c , and change the initial stress τ_0 such that S ranges linearly from 0.2 for δ_c^{max} to 1.0 for δ_c^{min} . These limiting values make rupture along the in-plane direction to propagate, for all δ_c cases, at sub-shear speeds when rupture is simulated with the coarsest FD grid.

The problem geometry in the current parametric study is shown in Figure 4.18. Formulation of the different rupture cases presented in this section is inspired in the SCEC code-comparison exercise tackled in next section. So rupture takes place along a vertical right-lateral strike-slip planar fault embedded in the same linearly elastic three-dimensional homogeneous and isotropic medium considered in that exercise. The material properties are shown in Table 4.3. The fault plane is completely surrounded by strength

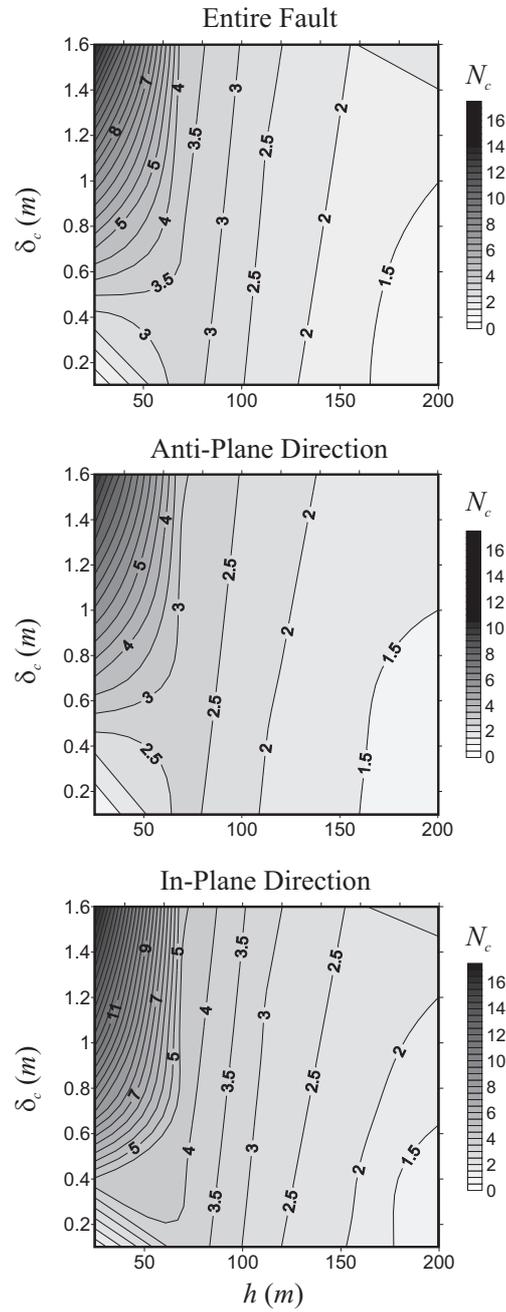


FIG. 4.19: Average estimate of the cohesive zone resolution parameter (N_c , equation 4.12) as a function of the spatial grid increment (h) and the slip-weakening critical distance (δ_c). See Figure 4.18 for problem geometry.

barriers preventing rupture to propagate further and friction on that plane is governed by the same Coulomb slip-weakening constitutive law introduced in next section (equations 4.14 and 4.15) with the static (μ_s) and dynamic (μ_d) friction coefficients, and the initial normal fault stress (σ_0) given in Table 4.4. The fault shear prestress (τ_0) is horizontal (*i.e.* parallel to the x reference axis). The only difference with the SCEC rupture problem is the fault size in the along-strike direction ($15km$ instead of $30km$) and the initial shear stresses values inside and outside the nucleation patch. Rupture initiation mechanism was identical in all rupture simulations. At time $t = 0$, shear stress inside the nucleation patch overtakes τ_u , the static yield stress (equation 4.14b), and suddenly a stress drop equal to $\tau_u - \tau_0$ happens in that region. In all cases $\tau_0 = 1.2\tau_u$ inside the nucleation patch. As it was mentioned in the last paragraph, initial shear stress outside the nucleation zone has been chosen accordingly with the current δ_c value. The tested slip-weakening distances are $\delta_c = [0.1m, 0.2m, 0.4m, 0.8m, 1.2m, 1.6m]$. Given the nature of the boundary elements describing the source in our rupture model (section 4.2.2.1) it is impossible to discretize with the exact dimensions both, the nucleation patch and the fault plane. I have chosen the following spatial grid steps, $h = [24.2m, 46.9m, 88.2m, 157.9m, 214.3m]$, which allow the exact representation of the nucleation patch. Hence, fault length overestimations ranges from $100m$ for h_{min} to $800m$ for h_{max} . In the following, I always take account of this geometrical mismatch when estimating uncertainties in the error of fault solutions. All numerical simulations were performed by solving the 3D system of difference equations 1.104 (page 66) which was deduced by applying the second order in time and space difference operators given in section 1.4.2 (equations 1.99).

Resolution and Convergence Results

Figure 4.19 shows average value estimates of the resolution parameter N_c as a function of both varying parameters : h , the spatial grid increment and δ_c , the slip-weakening critical distance. These values were computed over the entire fault plane. To approximate the cohesive zone width Λ_c along the rupture front I measured the distance from the center of each boundary element at its rupture time to the nearest one in which the shear stress has already reached the dynamic friction level. According to equation 4.12, N_c is then approximated by dividing such a distance by $H = 5h$.

Computed average values for N_c were separated in three groups : Those over the entire fault (upper panel) and those along two lines passing through the fault center, one parallel to the z axis (*i.e.* pure anti-plane direction, middle panel) and the other parallel to the x axis (*i.e.* pure in-plane direc-

in-plane		anti-plane	
δ_c	Λ_c	δ_c	Λ_c
0.1m	135 ± 39m	0.1m	≤ 121m
1.6m	2031 ± 792m	1.6m	1209 ± 325m

TAB. 4.1: Average cohesive zone width estimates (Λ_c) along the purely in-plane and anti-plane fault directions for the minimum and maximum values of the slip-weakening critical distance (δ_c). Interval values are not error measurement but the standard deviation of Λ_c along each fault direction. Results obtained with the finest grid (*i.e.* $h = 24.2m$).

tion, bottom panel). At first glance, results are in accordance with general expectations. In all panels the minimum values of N_c correspond simultaneously with the smallest δ_c and the biggest h ($N_c \leq 1.0$, right bottom panel corners). Hence, in this parameter domain region the cohesive zone is poorly resolved. On the contrary, it is well resolved in the region corresponding to the biggest δ_c and the smallest h where we found the maximum N_c values ($N_c \in [10, 16.8]$, left upper panel corners). The standard deviation for N_c estimates in both opposite domain regions are ± 5.3 , ± 2.7 and ± 6.6 respectively for the entire-fault, anti-plane and in-plane panels on the best resolution region and equal to zero in the three cases on the worst resolution domain region. N_c exhibit the same tendency in the three panels, being essentially sensitive to the grid size over the range $h \in [70m, 200m]$ (gradient parallel to the h axis) and then becoming also dependent on δ_c for $h \lesssim 70m$ (gradient pointing toward the bottom right corner). It is surprising the way the N_c gradient magnitude becomes abruptly higher for grid sizes $h \lesssim 70m$. In other words, the cohesive zone sampling rate grows rapidly for grid sizes below $\sim 70m$ and for slip-weakening distance values above $\sim 0.4m$.

As predicted by the theoretical and numerical results of Day et al. (2005), the average N_c values obtained along the purely in-plane fault direction are systematically greater than those obtained in the perpendicular anti-plane direction (compare middle and bottom panels of Figure 4.19). The cohesive zone dependence on rupture mode can be better visualized from results over the entire fault plane given in Figure 4.21 (right). Estimates of Λ_c for the minimum and maximum values of δ_c are reported in Table 4.1. The anti-plane value associated with the smallest slip-weakening distance is not reliable since Λ_c in this case was smaller than H (121m) during the whole rupture making its estimate impossible. The only thing one can say is that such a width is smaller or equal than H . However, note the huge range of cohesive zone sizes explored in the parametric analysis (variations of one order of magnitude).

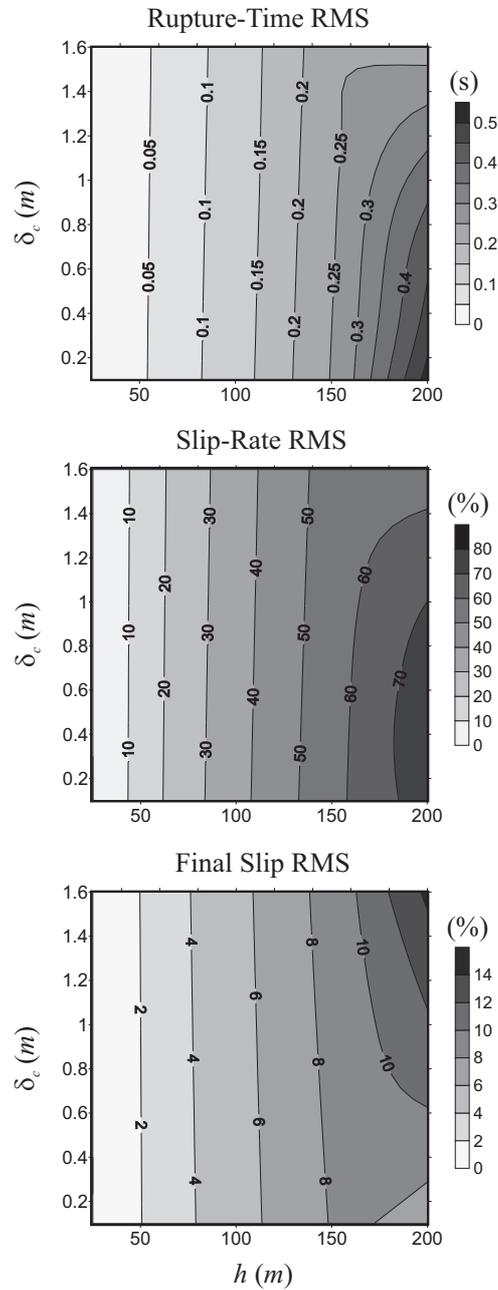


FIG. 4.20: Rupture times (all over the fault) and the slip and slip-rate time functions (in four fault points, Figure 4.18) RMS error estimates computed with respect to the finest grid solutions ($h = 24.2m$) as a function of the slip-weakening critical distance (δ_c) and the grid size (h).

The standard deviation values let us see the variation range of cohesive zone sizes during the rupture process being almost 2.5 times larger along the in-plane direction. As we shall see in the following, rupture front along this direction suffers the super-shear rupture speed transition when small enough grid sizes are considered.

For the purpose of understanding the numerical convergence of our rupture model, I have computed relative errors of fault solutions with respect to the finest grid case ($h = 24.2m$) for every δ_c considered in the parametric study. Even if these error estimates will not reveal if the numerical solutions tend toward the physical ones, at least they let us to establish, if possible, the so far hypothetical relationship which should exist between the numerical accuracy and the cohesive zone resolution parameter. Comparisons with solutions yielded by independent numerical methods are presented in the next section for planar and nonplanar faults.

Error was computed for three different fault solution parameters : rupture times and final slip over the entire fault plane and the slip-rate time functions in four observational points (Figure 4.18). The error function was the absolute root mean square (RMS) for rupture times, and the relative RMS for final slip and slip-rate time series. Due to the nature of our source boundary elements, solutions over the fault plane for different grid increments may not be computed in the same points of the space and time. So, to make the error estimates possible I performed both, a spatial and temporal interpolations of all simulation results supposing that the whole information contained over the discrete surfaces corresponds exactly to the fault problem geometry. This implies a maximum geometrical mismatch (near the fault edges) due to the spatial interpolation about 2.5% of the total fault length corresponding to the coarsest grid case. Such a mismatch decreases with the grid size and has a value of 0.3% in the finest grid. Because rupture times are proportional to the rupture propagation distance, I expect the same maximum percentages of uncertainty in the error estimate for the three observed fault parameters.

Time interpolation of the slip and slip-rate functions for different numerical discretizations was linear. On the other hand, spatial interpolation over the rupture surface was carried out in a regular grid with spatial increment of 100m. Interpolation values (f_{int}) of fault solutions fields (u_i) were computed simply as

$$f_{int} = \sum_{i=1,n} \frac{u_i}{a_i} \quad \text{where} \quad a_i = \sum_{j=1,n} \left(\frac{d_i}{d_j} \right)^m. \quad (4.13)$$

In this equation, a_i are weighting factors which multiply the n fault point solutions lying inside spherical supports of radius r centered at the interpo-

lated values f_{int} , and d_i are the distances from f_{int} to each one of these fault solution points. I have always took $m = 0.5$ in this work and $r = 1000m$ in the current section. This value of r was the same for all grid sizes and corresponds to the minimum necessary for having at least one fault point inside the spherical interpolation support.

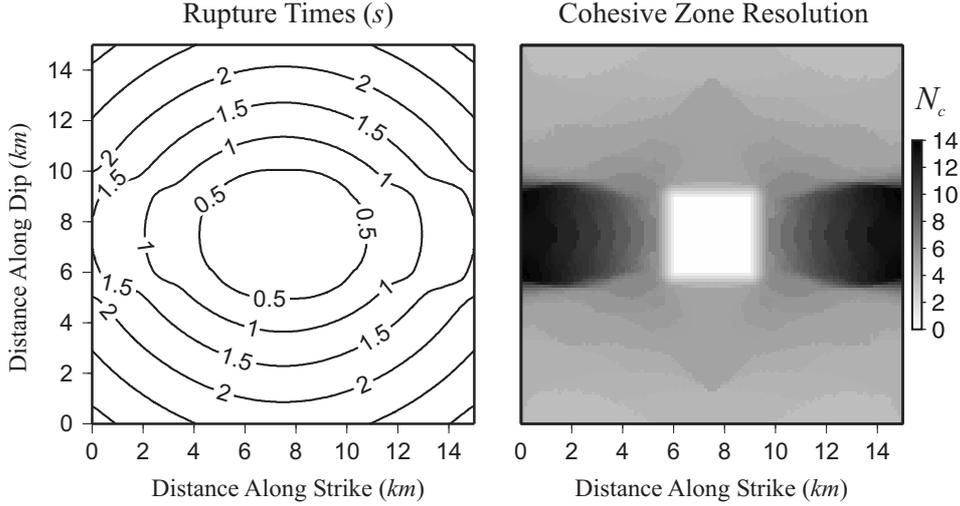


FIG. 4.21: Rupture time contours at 0.5s intervals and cohesive zone resolution parameter N_c over the entire fault plane for $\delta_c = 0.8m$ and $h = 24.2m$ (reference case).

Figure 4.20 shows error estimate results for the three selected fault parameters as a function of the the grid size (h) and the slip-weakening critical distance (δ_c). Following the SCEC benchmark tests convention, the rupture time of one fault point is defined as the time at which the slip-rate exceeds $0.01m/s$ first at that point. Final slip was measured over the entire fault at the end of each simulation always with 5s of duration. Slip-rate functions errors correspond to the average RMS of the four observational fault points show in Figure 4.18. Except for the coarsest simulations ($h \gtrsim 150m$), almost no error dependence on δ_c is found in all cases. The biggest rupture time and slip-rate errors are found around the bottom right corner, *i.e.* the parameter domain where N_c has the smallest values (see Figure 4.19). The error in three parameters decreases with the spatial grid step. The convergence rate of rupture times diminishes as $h \rightarrow h_{min}$ evoking the power-law convergence rate observed in the FD split-node and the BIE methods (Day et al., 2005). In the other two parameters it remains more or less constant. If one compares Figures 4.19 and 4.20 we figure out a good correlation between the

cohesive zone resolution parameter N_c and the error estimates for grid sizes $h \gtrsim 70m$. The smaller the N_c , the greater is the error. However, we find a lack of correlation for finer grids. This lack of correlation may reveal two different things : 1) that there exist an upper value of N_c (~ 4) from which there is an oversampling of the cohesive zone making N_c to have no more influence in numerical convergence or 2) that the influence of N_c on this convergence is always negligible with respect to other first order effects related to the mesh refinement (*e.g.*, reduction of numerical oscillations). The second hypothesis is supported by the rather small errors found in the bottom left regions of the parameter domain where we expect bigger values given the poor resolution of the cohesive zone. All this ambiguous interpretation may be simply a consequence of a lack in precision of the error estimate due to the smoothing associated with the spatial interpolation.

Rupture times and cohesive zone resolution over the fault plane for a slip-weakening critical distance $\delta_c = 0.8m$ are shown in Figure 4.21. This solution is a reference one. It was calculated with the smallest spatial grid step. The rupture time contours reveal that $\sim 0.5s$ after initiation rupture in the along-strike direction (in-plane rupture mode) starts developing the super-shear transition. During the acceleration phase toward the super-shear regime we find a progressive increase in the N_c resolution parameter that, near the fault edges, exceeds several times those values found outside the transitional fault region. These results may be easily interpreted in a physical way since N_c is proportional to the cohesive zone width Λ_c . Because $h = 24.2m$ and through equation 4.12 we have that $\Lambda_c = 121N_c$. So, while the cohesive zone width presents the theoretically predicted contraction along the most rupture directions, as in the anti-plane one (along-dip direction) with average values of about $550m$ (see Figure 4.19, middle panel), Λ_c increases very rapidly in the along-strike direction as the rupture front speed increases, reaching values of about $1700m$.

Several comparisons of the selected reference solution (*i.e.* for $\delta_c = 0.8m$) with those obtained on coarser grids are presented in Figures 4.22, 4.23 and 4.24. Rupture times degradation with increments of the spatial grid step are in accordance with the progressive drop on cohesive zone resolution over the entire fault plane (Figure 4.22). Judging from these examples we may think that the resolution parameter N_c plays a determinant role in numerical convergence. Slip-rate numerical oscillations induce local variations in rupture times that can be observed for $h \leq 157.9m$ as small spikes in the rupture time contours. We can also appreciate how rupture speed in the coarsest grid case remains smaller than the shear-wave velocity since no transitional lobes are present along the in-plane rupture mode direction. As can be red in

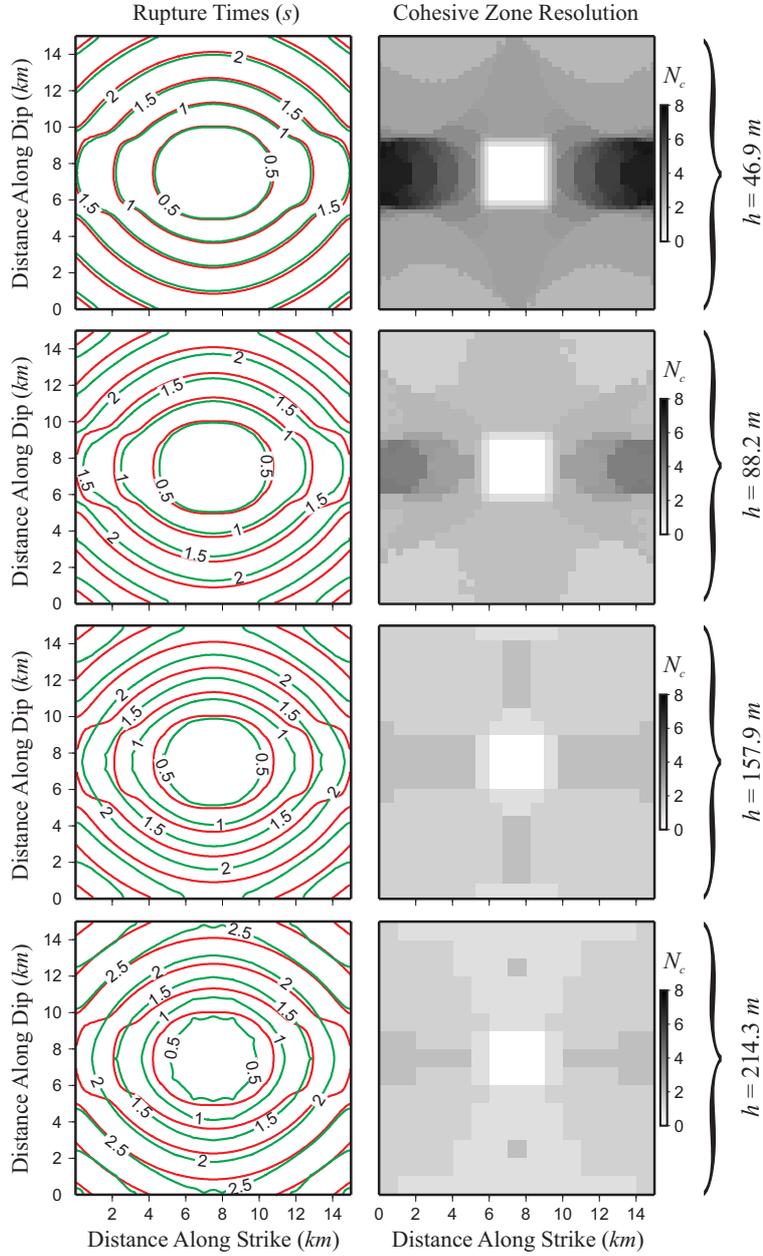


FIG. 4.22: Rupture times for the reference case (red contours) and for coarser grid simulations (green contours) at 0.5s intervals ($\delta_c = 0.8\text{m}$). Right panels show values of N_c for solutions presented in the left panels as green contours.

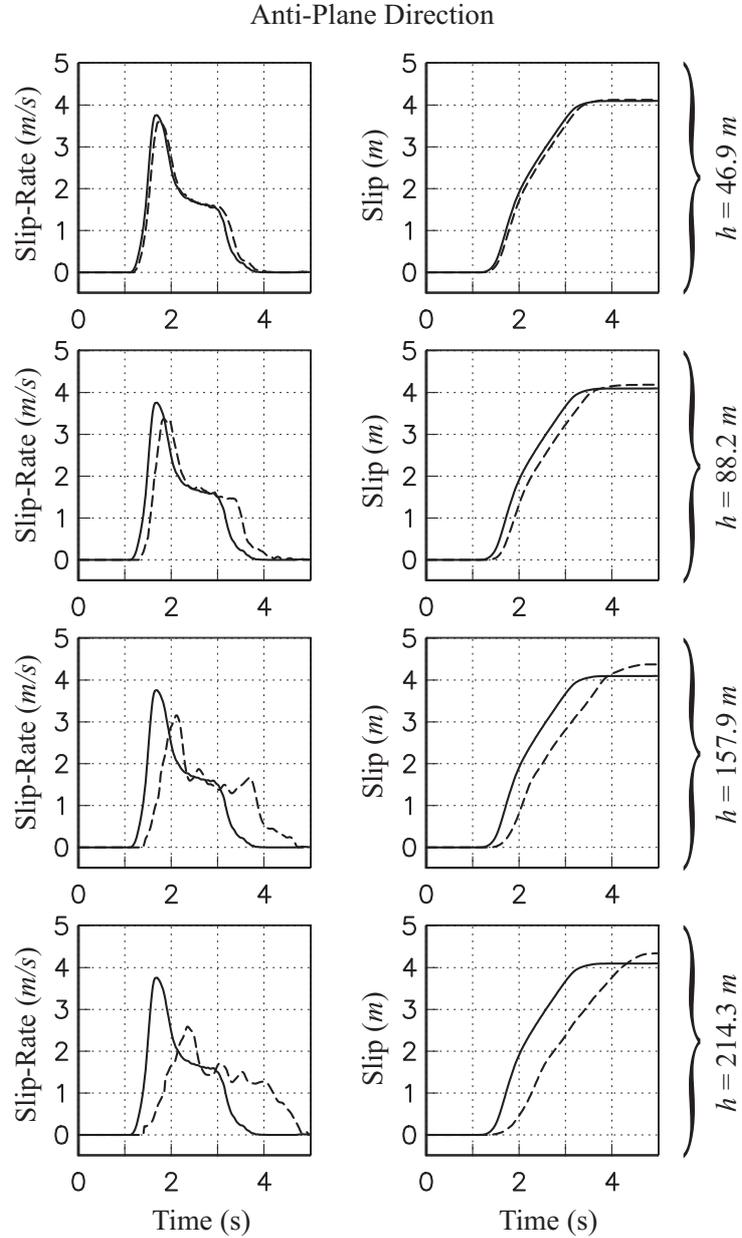


FIG. 4.23: slip and slip-rate functions computed in the purely anti-plane observational point P1 (Figure 4.18) for different spatial grid steps (dashed lines) compared with those of the reference case (solid lines).

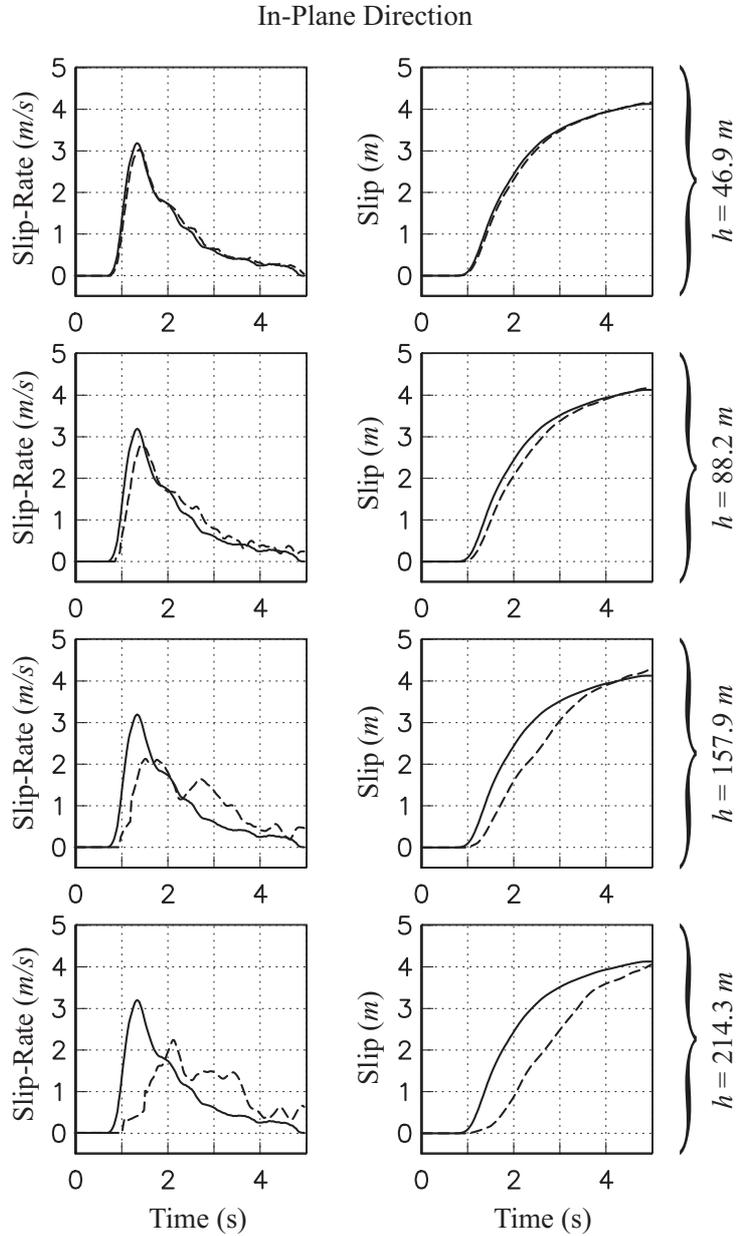


FIG. 4.24: slip and slip-rate functions computed in the purely in-plane observational point P4 (Figure 4.18) for different spatial grid steps (dashed lines) compared with those of the reference case (solid lines).

Figure 4.20, rupture times RMS errors for these examples are $0.04s$, $0.11s$, $0.28s$ and $0.41s$ respectively for solution from top to bottom. Finally, the corresponding comparison of the slip and slip-rate functions in the observational points P1 (purely anti-plane signals) and P4 (purely in-plane signals, see Figure 4.18) are respectively presented in Figures 4.23 and 4.24. Globally, in both rupture directions we see the same main features : solutions are delayed and more noisy with increments in the grid size. However, good fits in both fault parameters and both rupture modes are found for $h \leq 88.2m$ (see Table 4.2 for errors in slip-rate functions). The rise-time in the anti-plane direction is shorter ($\sim 2.5s$) than in the perpendicular direction ($\sim 4s$) where the super-shear transition takes place. Relative RMS errors for final slip over the entire fault range from 2.7% for $h = 46.9m$ to 11.2% for $h = 214.3m$ (see Figure 4.20). Error in final slip for the coarsest grid only represents a mismatch in moment magnitude M_w about 2%.

h	anti-plane	in-plane
46.9m	15.9%	8.9%
88.2m	38.7%	24.8%
157.9m	62.9%	50.2%
214.3m	75.1%	75.7%

TAB. 4.2: Relative RMS error of slip-rate functions for different grid sizes (h) with respect to the reference solution (*i.e.* $h = 24.2m$). Values corresponding to time series shown in Figures 4.23 and 4.24.

4.2.5 Model Validation

Consistency between solutions yielded by different numerical approaches is essential since it is the only way to have confidence in these kinds of complex 3D simulations for which no theoretical solutions are available. Several exercises are proposed in order to test the accuracy of our 3D numerical approach when modeling the dynamic rupture propagation of planar and nonplanar faults. Comparisons of our *finite-difference boundary-element* (FDBE) method with the *traction-at-split-node* (TSN) and the *boundary integral equation* (BIE) methods are presented.

4.2.5.1 The SCEC Benchmark : FDBE vs TSN

In the last almost two years, numerous modelers of the spontaneous rupture problem have tackled the challenge of comparing their numerical approaches through the SCEC benchmark promoted by Harris & Archuleta

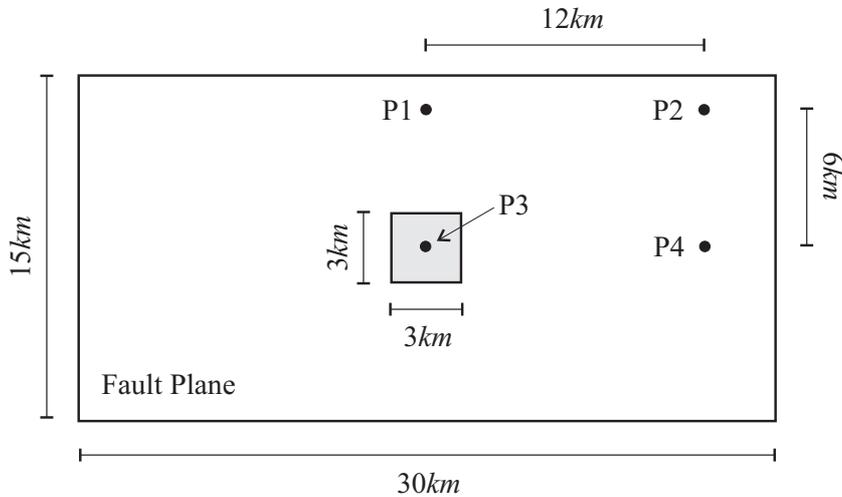


FIG. 4.25: SCEC code-comparison Version 3 problem geometry. The nucleation patch (gray square) is centered in both the along-strike and along-dip fault directions. Fault solutions are compared in the four observational points P1, P2, P3 and P4 (black points).

(2004). Essentially, this code-comparison exercise have revealed the strong dependence of numerical results on the way rupture boundary conditions are applied. Finite-difference fault-zone models constitute one family from which rupture solutions for the proposed problem are considerably grid-size dependents (Dalguer & Day, 2004, 2006). The rupture model introduced in section 4.2.2 belongs to this family so one expect solutions to exhibit such an undesired behavior. Recently, Day et al. (2005) have investigated the convergence and precision of two independent approaches, a FD split-node method (see section 1.5.1.2) and a boundary integral method, to The Problem Version 3 of the SCEC benchmark. In that work, numerical convergence was related to the cohesive zone resolution parameter N_c . Their results suggest that both methods converge asymptotically toward the continuum solution as the spatial discretization diminishes. They concluded that convergence between both methods is reached if $N_c \geq 5$ and $N_c \geq 3$ respectively for the TSN and BIE approaches. On the other hand, the numerical analysis performed in section 4.2.4 of this work indicates that N_c is not the most important parameter controlling convergence of our FDBE method. However, small enough errors were always obtained when N_c is of the same order, about 4. As we shall see, to verify this condition in the present problem and then obtain rather good results the grid size should be quite small.

$v_s(m/s)$	$v_p(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$
3464	6000	2670

TAB. 4.3: Material properties of the 3D full space considered in the SCEC code-comparison exercise. In this table v_p and v_s are, respectively, the S - and the P -wave velocities, and ρ the density.

So, in this section I solve The Problem Version 3 of the SCEC code-comparison benchmark with the FDBE approach proposed in this study and compare solutions with those computed by Dalguer (2005) using the FD TSN approach of Day (1982b) detailed in Day et al. (2005). The goal of this comparison is just to determine how fine should be the FD grid to reach satisfactorily good results, keeping in mind that our rupture model has been created with the purpose of simulating rupture of nonplanar faults and not to obtain an extremely accurate solution in geometrically simple problems. The introduction of boundary elements to describe the rupture surface with limitations in computational power has a price : a loss of accuracy. A scaling relation similar to that determine for 2D geometries in section 3.4.1 and discussed latter in section 3.5.1 should exist for the 3D formulation. This means that the accuracy of our 3D rupture model is determined by the calculation limits. The specific rupture model introduced in previous sections has been chosen because of the good compromise between numerical accuracy and our current computational feasibility.

Problem Formulation

The problem geometry is shown in Figure 4.25. Rupture happens along a vertical right-lateral strike-slip planar fault embedded in a linearly elastic three-dimensional homogeneous and isotropic medium. The material properties are given in Table 4.3. The fault plane is completely surrounded by strength barriers preventing rupture to propagate further. Friction resistance is governed by a cohesionless Coulomb slip-weakening constitutive law (Ida, 1972) that can be expressed as

$$\tau(\sigma, S) = \tau_s + (\tau_u - \tau_s)(1 - S/\delta_c)H(1 - S/\delta_c) \quad (4.14a)$$

where

$$\tau_u = \sigma\mu_s \quad \text{and} \quad \tau_s = \sigma\mu_d. \quad (4.14b)$$

In these equations, σ is the fault normal stress, S is the fault slip and $H(\cdot)$ is the heaviside step function. The constitutive parameters of this linear

Parameter	Nucleation	Outside Nucleation
τ_0	81.6 MPa	70 MPa
σ_0	120 MPa	120 MPa
μ_s	0.677	0.677
μ_d	0.525	0.525
δ_c	0.4 m	0.4 m

TAB. 4.4: Initial stress conditions and constitutive friction parameters used in the Problem Version 3 of the SCEC exercise. In this table τ_0 is the initial fault shear stress, σ_0 the initial fault normal stress, μ_s the static friction coefficient, μ_d the dynamic friction coefficient and δ_c the critical slip-weakening distance.

equation are the static friction coefficient, μ_s , the dynamic friction coefficient, μ_d , and the slip-weakening critical distance, δ_c (see section 2.3.2 on page 148). Both, the initial fault stress conditions and the constitutive friction parameters are listed in Table 4.4. The shear prestress field τ_0 is everywhere horizontal and parallel to the fault plane. Equation 4.14a may be simply rewritten as

$$\tau(\sigma, S) = \sigma \left[\mu_d + (\mu_s - \mu_d)(1 - S/\delta_c)H(1 - S/\delta_c) \right] \quad (4.15)$$

making easy to see that friction is equal to the normal fault stress times a factor which evolves with slip once rupture begins. From Table 4.4 and using equation 4.15 before rupture nucleation, we see that the static yield stress (*i.e.* for $S = 0$) and the dynamic fault strength (*i.e.* for $S \geq \delta_c$) are respectively $\tau_u = 81.24$ MPa and $\tau_s = 63$ MPa. These two values along with the initial shear stress τ_0 outside the nucleation patch give an upper yield point parameter $S = (\tau_u - \tau_0)/(\tau_0 - \tau_s) = 1.63$ (see section 2.4). This value corresponds to the theoretical one predicted by Burridge (1973) for rupture propagation without surface energy and identified by Andrews (1976b) as the upper boundary beyond which spontaneous rupture with slip-weakening cohesion forces may not propagate in a supershear regime (see text around Figure 2.12, page 164).

At time $t = 0$, the shear stress inside the nucleation patch exceed the yield stress on that zone producing an instantaneous stress drop $\Delta\tau_0 = \tau_0 - \tau_u$. Once this initial stress drop happens, rupture propagates spontaneously away from the nucleation zone governed by the linear slip-weakening Coulomb failure criterion given by equations 4.14.

Problem Results

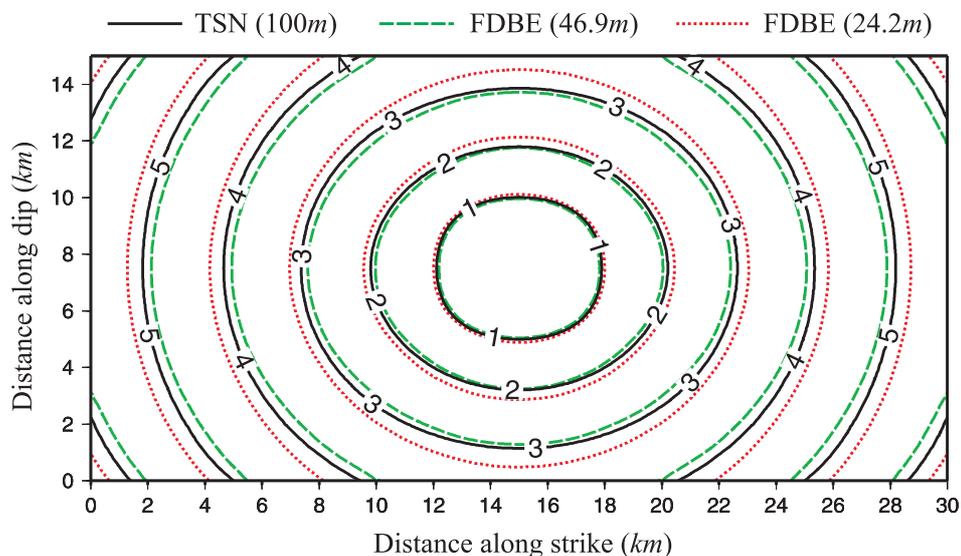


FIG. 4.26: SCEC rupture times contours at 1s intervals computed with our (2,4) *finite-difference boundary-element* (FDBE) method and with the *traction-at-split-node* (TSN, after Day et al., 2005) finite-difference method.

Simulations were carried out for three different grid spatial steps, $h = 24.2m$, $h = 46.9m$ and $h = 88.2m$ with both, second order accuracy in time and space (2,2) (discrete system 1.104, page 66) and second order in time four order in space accuracy (2,4) (discrete system B.1, page 317) difference operators. I took these grid sizes in order to match exactly the nucleation zone dimensions. Nevertheless, as discussed in last section, the boundary element structure prevent me to discretize the fault plane with exactly the problem dimensions. This causes a progressive overestimation from about 103m per side for the finest grid to about 340m for the coarsest grid. Results were compared in terms of rupture times over the entire fault plane, and in terms of the slip, slip-rate and shear stress time functions in four observational fault points (Figure 4.25). In order to make possible these comparisons, solution were spatially interpolated following the procedure described in section 4.2.4 with spherical supports of $r = 120m$, $240m$ and $440m$ (equation 4.13) respectively for the finest, intermediate and coarsest grids.

Figure 4.26 shows a rupture-time contour-map at one second intervals where solutions obtained with our FDBE (2,4) model for $h = 24.2m$ and $h = 46.9m$ are compared with that yielded by the TSN approach for $h = 100m$. The absolute RMS error with respect to the reference TSN solution

are respectively $0.2s$ and $0.13s$ (see Table 4.5). Even if these errors are quite small, we can distinguish slight dissimilarities in the shape of the rupture front. Moreover, when rupture front propagates slower than the reference case for $h = 46.9m$, it goes faster for $h = 24.2m$. If we consider the RMS error of $1.37s$ associated with the coarsest grid case ($h = 88.2m$, Table 4.5) we see that FDBE solutions converge rapidly to the reference one for smaller grid sizes. However, we also see that such convergence is not asymptotic since rupture propagates slightly faster than the reference case in the finest grid. Computational power limitations prevent me to try smaller grids in order to see if the convergence is oscillatory.

Dalguer & Day (2006) have solved the same problem by mean of two different fault zone models in the standard velocity-stress staggered-grid of Madariaga (1976, section 1.4.1.1) : a) the one proposed by Madariaga et al. (1998) they called the thick-fault (TF) model and b) the method introduced by Andrews (1999) knew as the stress-glut (SG) method (section 4.1.1). On one hand, their results show that solutions obtained with the TF model for $h = 50m$ fails to reproduce the qualitatively features of their TSN references solution. In terms of rupture-times they found an RMS error about 30% which means a delay of about $1s$ at the fault edges in both in-plane and anti-plane directions. On the other hand, they also show for the same grid size that the SG method yield qualitatively better results with smaller rupture time delays which are similar to those I have obtained with our FDBE method (*i.e.* $\sim 0.1s$, Figure 4.26).

Parameter	$h = 24.2m$		$h = 46.9m$		$h = 88.2m$	
	(2, 2)	(2, 4)	(2, 2)	(2, 4)	(2, 2)	(2, 4)
rupture times	$0.17s$	$0.2s$	$0.22s$	$0.13s$	$1.64s$	$1.37s$
shear stress	16.0%	23.2%	40.2%	37.1%	84.6%	83.5%
slip-rate	38.2%	47.5%	78.5%	76.6%	119.6%	115.6%
slip	27.2%	25.8%	26.6%	24.9%	36.6%	32.7%

TABLE 4.5: Absolute (rupture times) and relative (the others three parameters) RMS errors of our FDBE method obtained for the SCEC benchmark Version 3 with respect to solution by the TSN FD method for a grid size equal to $100m$ (Day et al., 2005). Result are reported for second order accuracy in time and space (2, 2) and for second order in time four order in space accuracy (2, 4) difference operators for three different spatial grid steps h .

Figure 4.27 presents the cohesive zone resolution parameter N_c over the entire fault plane for the three different grid sizes. As a whole we find a decrease of resolution with distance from the nucleation patch which is in

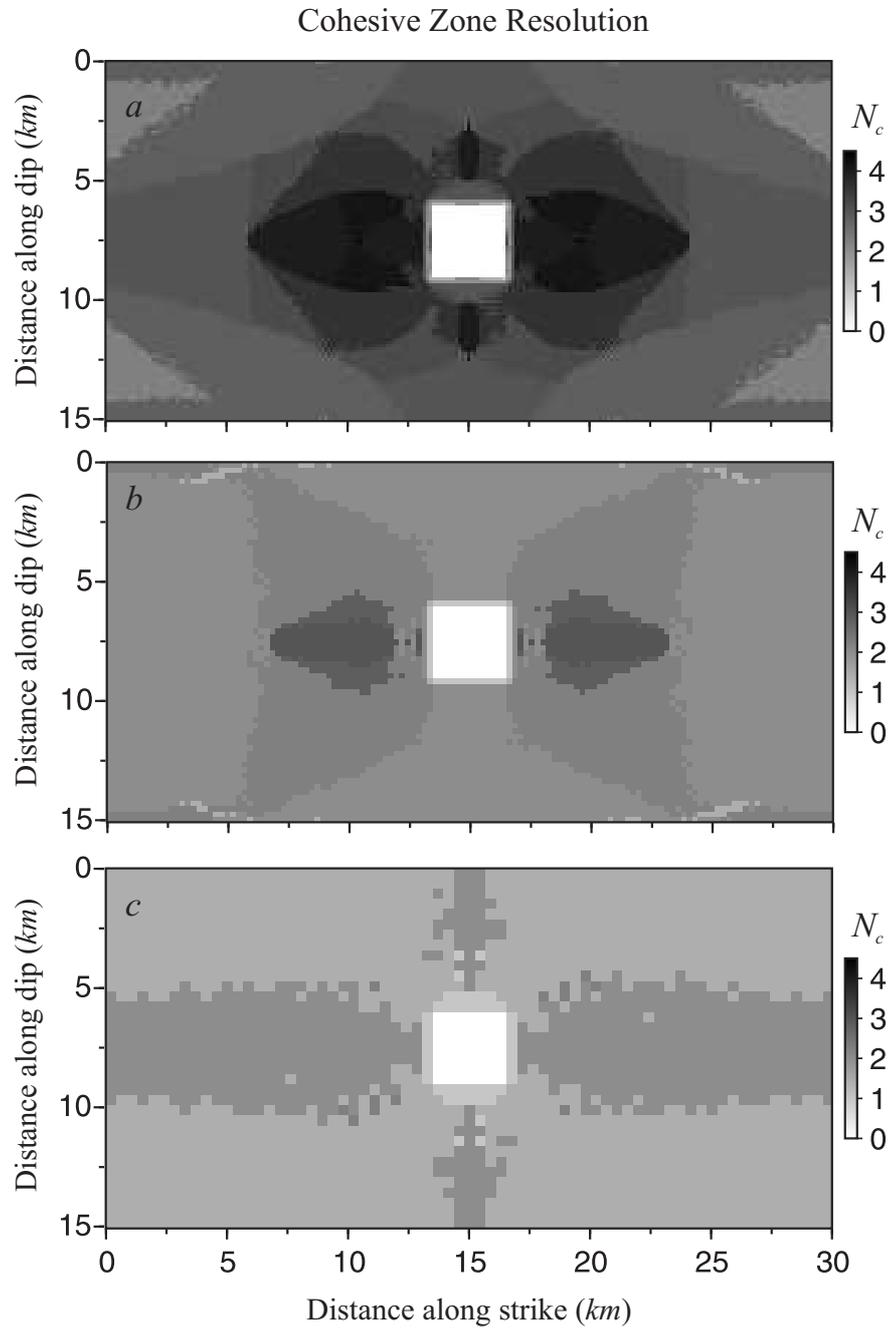


FIG. 4.27: Cohesive zone resolution parameter (N_c) over the fault plane for (a) $h = 24.2m$, (b) $h = 46.9m$ and (c) $h = 88.2m$.

accordance with the theoretically predicted cohesive zone contraction (equation 2.17 page 152). However, the great variability of this parameter along the rupture surface found for $h = 24.2m$ (Figure 4.27a) disappears in the two coarser grids (Figures 4.27b,c) revealing a lack of resolution. The analysis carried out in section 4.2.4 showed that good accuracy results were obtained when $N_c \gtrsim 4$. However we see that this condition is not verified in most parts of the fault plane. This is mainly a consequence of the small slip-weakening critical distance ($\delta_c = 40cm$) with respect to the size of each element. An other problem related to the choice of this constitutive parameter is the excitation of high frequency oscillations on the discrete lattice which may strongly perturb rupture velocity (*e.g.*, Knopoff & Ni, 2001, Parisi & Ball, 2002).

Figures 4.28, 4.29 and 4.30 show the slip-rate functions on the four observational points (Figure 4.25) respectively for the finest, intermediate and coarsest grids (dashed lines) compared with the reference TSN solutions (solid lines). All signals are low-pass filtered with a 2-poles Butterworth filter (2-passes), and a corner frequency at $5.0Hz$. Two main observations should be done. On one hand, the amplitude of the slip-rate functions decrease with an increase in the spatial step. This is an undesirable effect characterizing all FZ models since there is always a spatial mismatch between the stress- and the velocity-grid points which is proportional to the grid size. On the other hand, since the resonance frequency of the discrete lattice is inversely proportional to the spatial grid step, the spurious oscillations within this frequency range are mainly visible in the two coarsest grids (point *P3*, Figures 4.29 and 4.30). When results for $h \leq 46.9m$ are quite similar to the reference ones an important drop in accuracy is found for $h = 88.2m$. Relative RMS average values of these times series for each case are given in Table 4.5. These values are considerable high since small shifts in rupture times induce big square differences between signals because of the big slip-rate gradients just after initiation. Despite both the geometrical mismatch of the discrete fault planes and the spatial interpolation, the pulses wide which are related to the arrival of the stopping phases are pretty similar in the two first cases. The evolution of the shear stresses in both in-plane and anti-plane directions are satisfactorily well reproduced except for the coarsest grid for which rupture delays about $1.5s$. In all cases once rupture begins, the negative slopes of the stress functions are parallel to the TSN ones revealing a good slip-weakening friction implementation. If we compare the average RMS errors for the slip functions (Table 4.5) we notice that they do not increase with an increase in the spatial grid step as much as those for the slip-rate. This is expected because of the lower high frequency content in the displacement field.

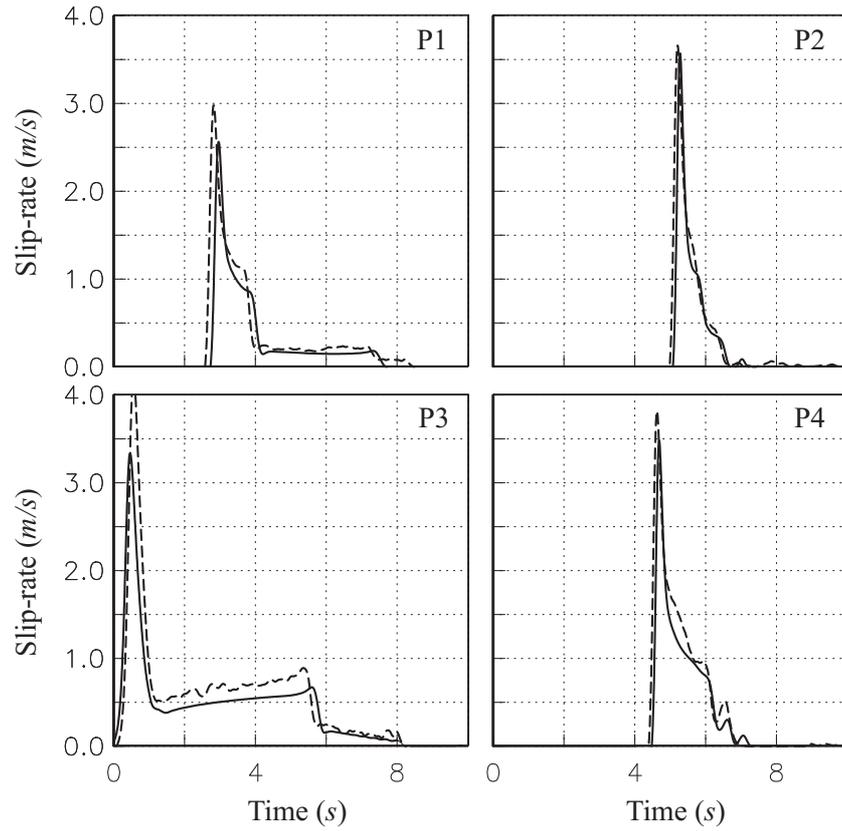


FIG. 4.28: Comparison of slip-rate functions for the Problem Version 3 of the SCEC benchmark in the four observational fault points shown in Figure 4.25. The dashed lines correspond to our (2,4) FDBE for a grid size $h = 24.2m$ while the solid lines correspond to the TSN reference solution. All results are low-pass filtered for $\omega \leq 1.5Hz$.

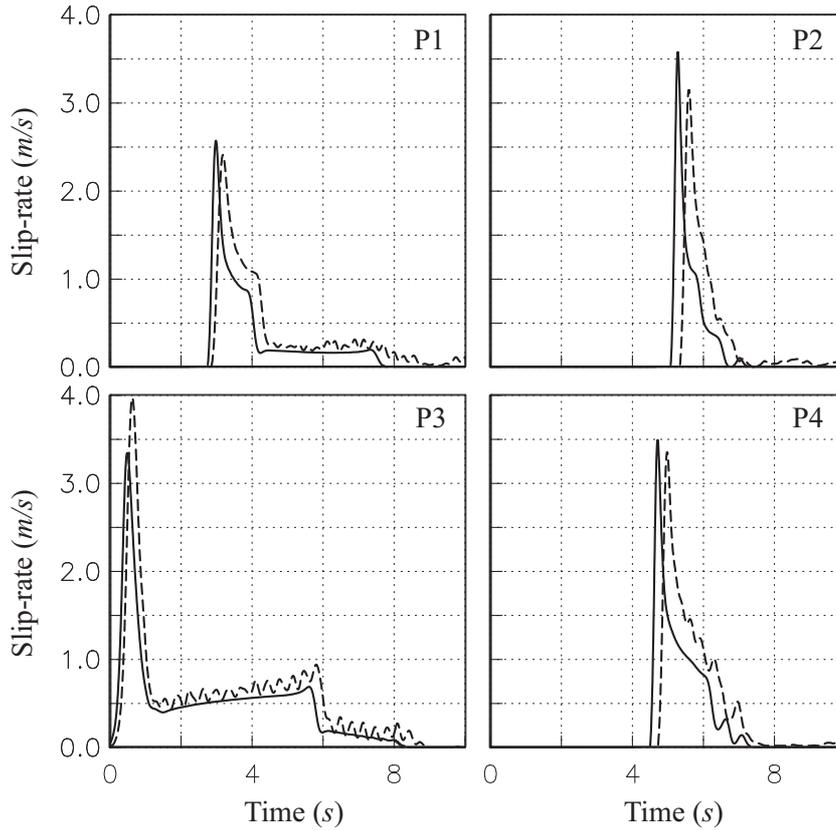


FIG. 4.29: Comparison of slip-rate functions for the Problem Version 3 of the SCEC benchmark in the four observational fault points shown in Figure 4.25. The dashed lines correspond to our (2,4) FDBE for a grid size $h = 46.9m$ while the solid lines correspond to the TSN reference solution. All results are low-pass filtered for $\omega \leq 1.5Hz$.

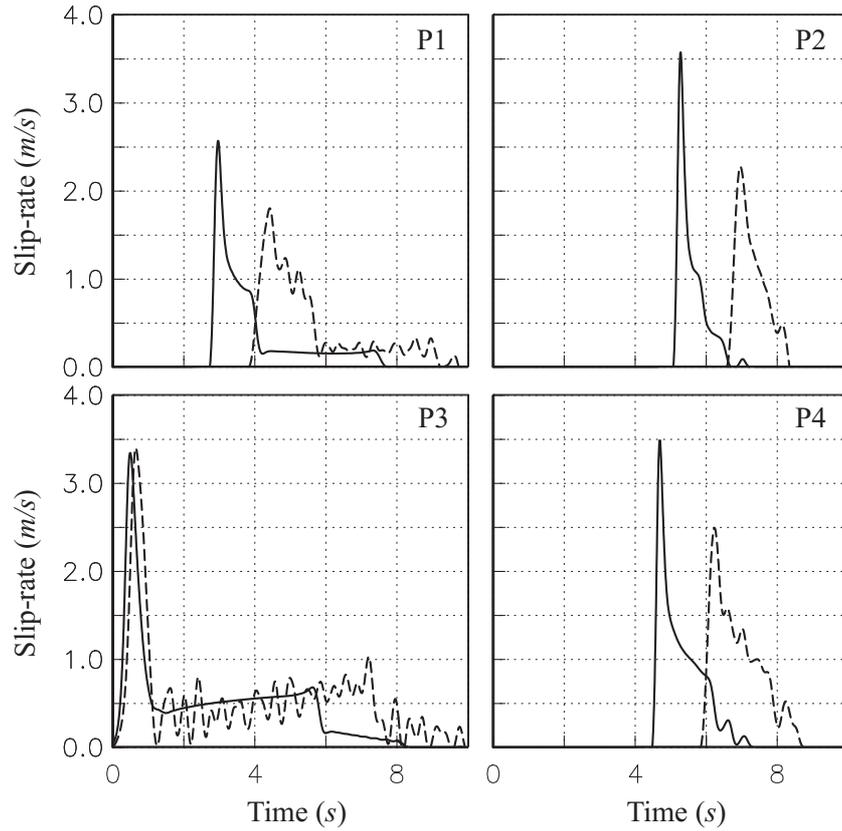


FIG. 4.30: Comparison of slip-rate functions for the Problem Version 3 of the SCEC benchmark in the four observational fault points shown in Figure 4.25. The dashed lines correspond to our (2,4) FDBE for a grid size $h = 88.2m$ while the solid lines correspond to the TSN reference solution. All results are low-pass filtered for $\omega \leq 1.5Hz$.

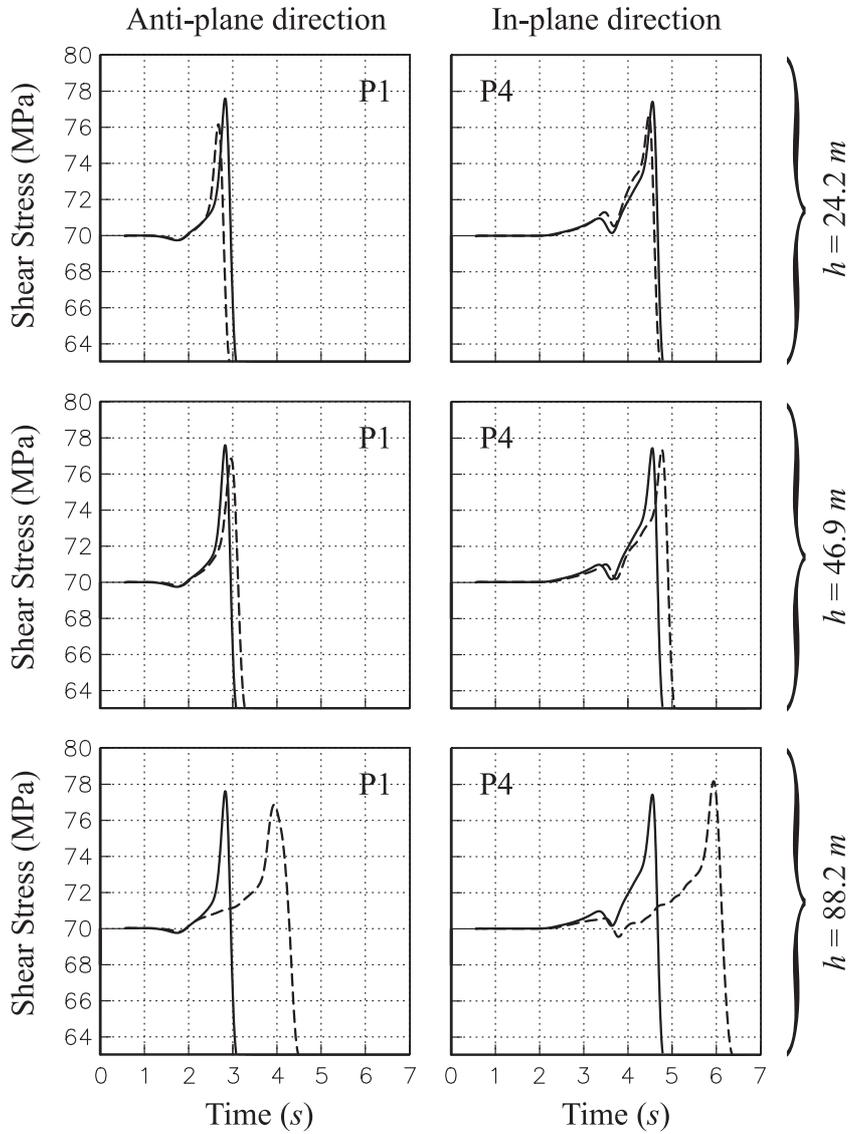


FIG. 4.31: Comparison of shear stresses for the Problem Version 3 of the SCEC benchmark in the P1 (purely anti-plane) and P4 (purely in-plane) fault points shown in Figure 4.25. The dashed lines correspond to our (2,4) FDBE while the solid lines correspond to the TSN reference solution. All results are low-pass filtered for $\omega \leq 1.5Hz$.

4.2.5.2 Nonplanar Rupture : FDBE vs BIE

In last section I concluded that the FDBE model may solve the SCEC code-comparison exercise in a rather satisfactorily way provided that a small enough spatial grid discretization is considered. The most interesting feature of this model is not its numerical accuracy but its capacity of going beyond the planar fault geometry. In this section I then perform an other spontaneous rupture comparison, this time along several nonplanar rupture surfaces. On that account I use solutions computed with a boundary integral equation method (BIE, Aochi et al., 2000b), adapted by Aochi (2004) for the proposed model geometry as a reference. As we shall see, despite the oscillations and overestimation of the peak slip-rate, quite good results are obtained in terms of rupture times, slip-rate waveforms and final slip with respect to those obtained with the BIE model.

Problem Formulation

Rupture happens along different strike-slip left-lateral faults embedded within the same linearly elastic three-dimensional homogeneous and isotropic medium considered in the SCEC comparison exercise (Table 4.3). The 3D rupture surfaces follow the equation of a parabola in the X-Y plane. The only parameter that varies between the different comparison cases is the eccentricity of the conical. The geometry of the faults is then given by a relation of the form

$$f[x, y(x)] \quad \text{where} \quad y(x) = y_0 \pm \sqrt{4a(x - x_0)}. \quad (4.16)$$

In this equation x_0 and y_0 correspond to the coordinates of the vertex V of a parabola on the X-Y plane with focus at b (Figure 4.32). The coordinate z of all surfaces is translation invariant. The value of a , the distance between V and b , controls the eccentricity of the conical. The smaller a the higher the curvature of the rupture surface. At the limit, when $a \rightarrow \infty$, the fault becomes planar. In this manner we are able to go from the standard planar case toward a more and more curbed fault just by changing such a parameter. I then choose four different geometries. Those having values for a equal to ∞ , 18, 10 and 5km, as shown in Figure 4.32 respectively for curves $F1$, $F2$, $F3$, and $F4$. All these faults are 30km long in the strike direction and 6km deep (vertical direction). Figure 4.33 shows a 3D view of one among them.

Let say that the vertex V lies at the center of the surfaces, site that I call from now on the source origin. The nucleation patch is a « square region » centered in the source origin with sides-length of 2km (red patch, Figure 4.33). In order to compare fault solutions, I took four equidistant

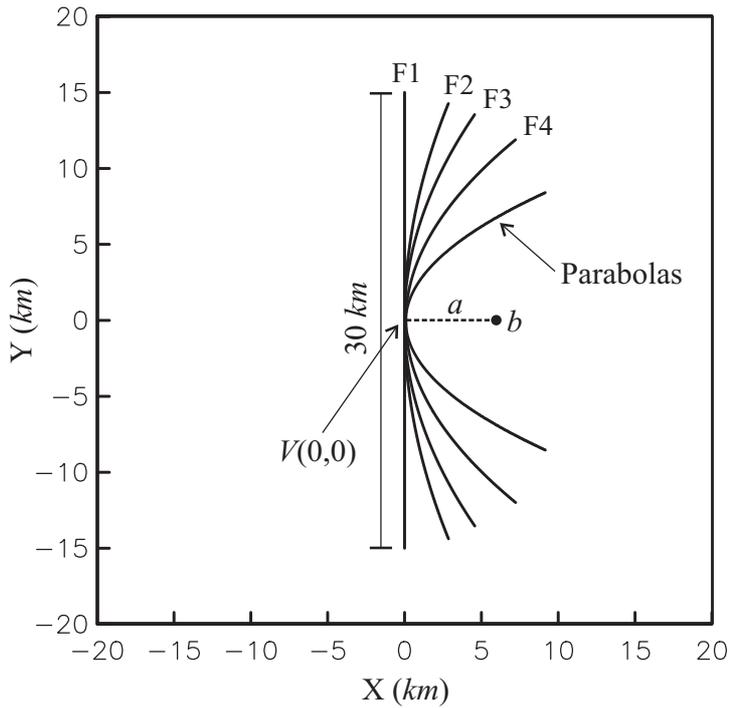


FIG. 4.32: Projection into the X-Y plane of the 3D nonplanar fault geometries considered in the comparison exercise. These are parabolas given by the equation 4.16, where $V(x_0, y_0)$ is the vertex of the conicals, b is the focus and a is the distance between these two points controlling the eccentricity. The four selected geometries $F1$, $F2$, $F3$, and $F4$ are all 30km long and have, respectively, the following values of a : ∞ , 18 , 10 and 5km .

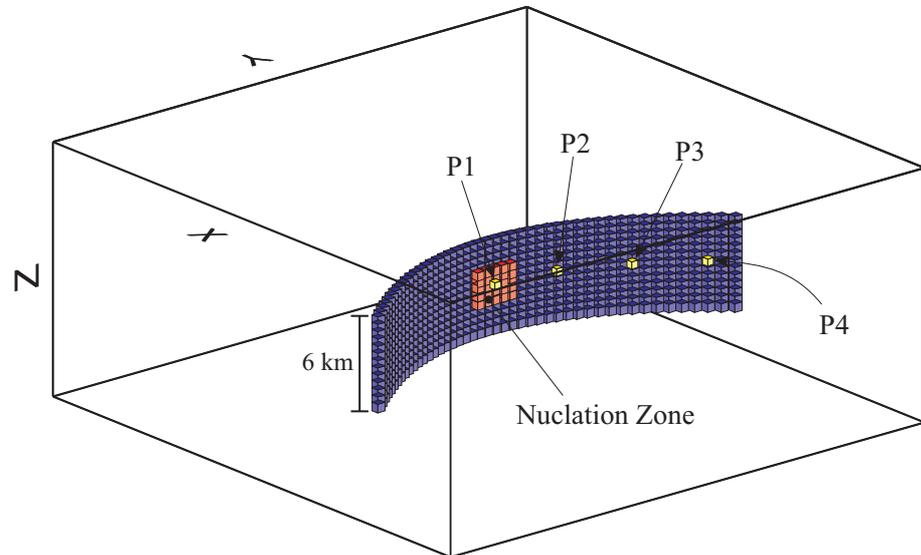


FIG. 4.33: 3D view of one nonplanar rupture surfaces used in the comparison exercise. The « square » nucleation patch (red region) is centered in both the along-strike and along-dip directions and has a side-length of $2km$. The four observational fault points (yellow cubes) are separated by $4km$ measured over the fault surface from its center.

points placed along a horizontal line passing through V (yellow cubes). The first observational point, $P1$, coincides with the source origin and the others three (points $P2$, $P3$ and $P4$) are separated each other by $4km$ measured over the surface. The external fault boundaries are delimited by strength barrier forbidding rupture to propagate beyond them.

In all cases, the initial normal stress is constant over the entire rupture surfaces. Only the initial shear stress changes between the nucleation patch and the spontaneous rupture region. I made these unrealistic assumptions just to avoid unnecessary complications that would make the numerical comparison more difficult. Constant tractions along a nonplanar surface may suppose an extremely heterogeneous surrounding stress field. Physical considerations should evolve in future exercises as it has been the case for the planar fault through the SCEC benchmarking code-comparison, by introducing simple-shaped barriers and asperities for instance. The only parameter that changes between the four comparison cases is the geometrical parameter a , *i.e.* the fault curvature.

Rupture process follows the same Coulomb slip-weakening friction law used in last section. Equation 4.15 clearly shows that friction resistance is

equal to product of the normal fault stress, σ , and a factor which evolves linearly with slip once rupture begins. During rupture, normal fault stress is the resultant of the initial normal stress, σ_0 , and the dynamic normal stress change, $\Delta\sigma$ (*i.e.* $\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma$). For this comparison I have assumed that $\Delta\sigma = 0$ for every time. This means that both, the static (τ_u) and the dynamic (τ_s) fault strengths only depends on the initial static tractions during the whole rupture process. The initial fault stress conditions and the constitutive friction parameters are listed in Table 4.6. The shear prestress field τ_0 is everywhere parallel to the X-Y plane producing a potential strike-slip left-lateral fault dislocation. Beside the fault geometry, there are only two differences with respect to the SCEC planar exercise : the values of the initial shear stresses and the slip-weakening critical distance. From values given in Table 4.6 and equation 4.15 before rupture nucleation we get the same static and dynamic fault strengths than in the SCEC exercise (respectively $\tau_u = 81.24$ MPa and $\tau_s = 63$ MPa). These two values along with the initial shear stress τ_0 outside the nucleation patch give a smaller upper yield point parameter $S = 0.7$ than that obtained in the previous section. So this value is smaller than 1.63. As pointed out for the first time by Andrews (1976b), one possible consequence is that rupture propagation undergoes the supersonic transition (see Figure 2.12 in page 164). However, we shall see that given the choice of the slip-weakening distance and the manner rupture nucleates, rupture should propagate a larger distance in order to reach the energetic condition leading to such a phenomenon bifurcation.

Rupture initiates because the same reason than in the planar fault comparison. At time $t = 0$, the shear stress in the nucleation patch overtakes the yield stress on that zone producing an instantaneous stress drop $\Delta\tau_0 = \tau_0 - \tau_u$. This initial « flick » is equal to $0.2\tau_u$ in the current exercise. It is bigger than that considered in the precedent comparison test in order to allow rupture to initiate propagating given the smaller size of the nucleation patch. Once this initial stress drop happens, rupture propagates spontaneously following the linear slip-weakening Coulomb failure criterion discussed earlier.

The uniform BIE grid interval was fixed to $\Delta s = 0.25km$ so as the faults surfaces were discretized by 120×24 square planes in such a way that those boundaries of these planes parallels to the translation invariant fault axis, are contained within the analytic 3D parabolic function. In other words, the centers of the squares are slightly shifted from the continuous geometry. The corresponding time step was $\Delta t = 0.0208s$. Results with this numerical parameters for the SCEC planar fault problem yielded a rupture times RMS error about $0.1s$ with respect to the $100m$ grid-size traction-at-slip-node finite-difference (DFM) solution obtained by Day et al. (2005). Moreover,

Parameter	Nucleation	Outside Nucleation
τ_0	97.49 MPa	73.73 MPa
σ_0	120 MPa	120 MPa
μ_s	0.677	0.677
μ_d	0.525	0.525
δ_c	0.8 m	0.8 m

TAB. 4.6: Initial stress conditions and constitutive friction parameters used in the spontaneous nonplanar comparison. In this table τ_0 is the initial fault shear stress, σ_0 the initial fault normal stress, μ_s the static friction coefficient, μ_d the dynamic friction coefficient and δ_c the critical slip-weakening distance.

nonplanar faults discretization with our FDBE model is not as simple as that since rupture surfaces are numerically represented by cubic boundary elements in a regular volumetric grid. As a consequence the distance between the center of these elements depends on the orientation of the fault within the grid. As describes in section 4.2.2.1, source boundary elements are placed one beside the other as close as possible to the analytic source geometry (Figure 4.33) so as the number of boundary element in the along-strike direction changes with fault curvature (*i.e.* with the value of a). In order to discretize the nucleation patch with exactly the stated dimensions, I took the spatial grid interval $h = 45.45m$ and a corresponding time step $\Delta t = 0.005s$. Thus, the amount of boundary elements along the fault strike ranges from 133 in the planar case (surface $F1$, Figure 4.32) to 175 in the most curved fault (surface $F4$). On the contrary, it remains constant in the along-dip direction (translation invariant axis) independently of a and equal to 27. A simple calculation shows us that the current fault dimensions in the planar case are slightly different of those stated in our problem geometry ($6km \times 30km$). The greatest discrepancy is found in the along-dip direction being just 1.5% of the corresponding total fault length. Similar percentages are found in the nonplanar geometries even in the along-strike direction.

Unfortunately, as discussed in section 4.2.4, the nature of the source boundary elements prevent the exact discretization of both the nucleation patch and the entire fault size. So, in order to make the comparison of fault solutions possible, I then performed a spatial interpolation (see section 4.2.4) of results yielded by both methods supposing that all information contained along the discrete surfaces corresponds exactly to the fault problem geometry. Consequently, estimations of rupture times and location of the observational points have an uncertainty of the same order, that is it about 1.5%. The regular spatial interpolation increment was $100m$ with a spherical support

$r = 600m$ (equation 4.13).

The rupture-time contours computed with the FDBE (dashed lines) for the planar and nonplanar surfaces are shown in Figure 4.34 and compared with those yielded by the BIE approach (solid lines). Extremely good results are obtained in all rupture surfaces. In the planar case (surface F1) rupture propagates slightly faster than the reference solutions. However the rupture time differences remain constant during almost the entire rupture, revealing that the same energy budget is preserved in both simulations. In the nonplanar cases (surfaces F2, F3 and F4), even if rupture times are close to the reference ones, we see that rupture propagates faster as the orientation of the fault surface approaches 45° with respect to the Cartesian reference frame (surface F4, Figure 4.32). Despite this anisotropic effect the average RMS error for all cases is quite small (*i.e.* smaller than $0.1s$, Table 4.7).

Fault Geometry	rupture times	slip-rate	final slip
Planar (F1)	$0.05s$	33.0%	19.6%
Nonplanar (F2)	$0.06s$	30.2%	13.0%
Nonplanar (F3)	$0.02s$	27.5%	16.2%
Nonplanar (F4)	$0.08s$	30.5%	21.1%

TAB. 4.7: Absolute (rupture times) and relative (slip-rate and final fault slip) RMS errors of our FDBE method with respect to the BIE reference solutions ($dx = 250m$). FD results were obtained with second order in time and fourth order in space accuracy operators (2, 4) in a discrete lattice with a spatial and time steps of $h = 45.45m$ and $\Delta t = 0.005s$ respectively.

Figure 4.35 shows the slip-rate time series computed in four observational fault points (Figure 4.33) with both the FDBE (dashed lines) and the BIE (solid lines) methods. Signal are not filtered. Spurious oscillations are considerable reduced thanks to the smaller stress drop rates associated with the choice of the slip-weakening critical distance $\delta_c = 0.8m$ (*i.e.* two times larger than its value in last section). As a whole, the reference slip-rate BIE waveforms are well reproduced by the FDBE approach. This validates our rupture boundary conditions as well as the adopted failure criterion. The slip-weakening spontaneous rupture problem along nonplanar (curvilinear) fault surfaces has been successfully solved by a finite-difference method in a regular Cartesian grid. An overestimation of the slip-rate functions is observed. The relative RMS errors of the final slip along the fault surfaces show that this overestimation ranges from 10 to 20% (Table 4.7) which are negligible if we consider the uncertainties on seismic moment when determined via the widely used kinematical source inversions.

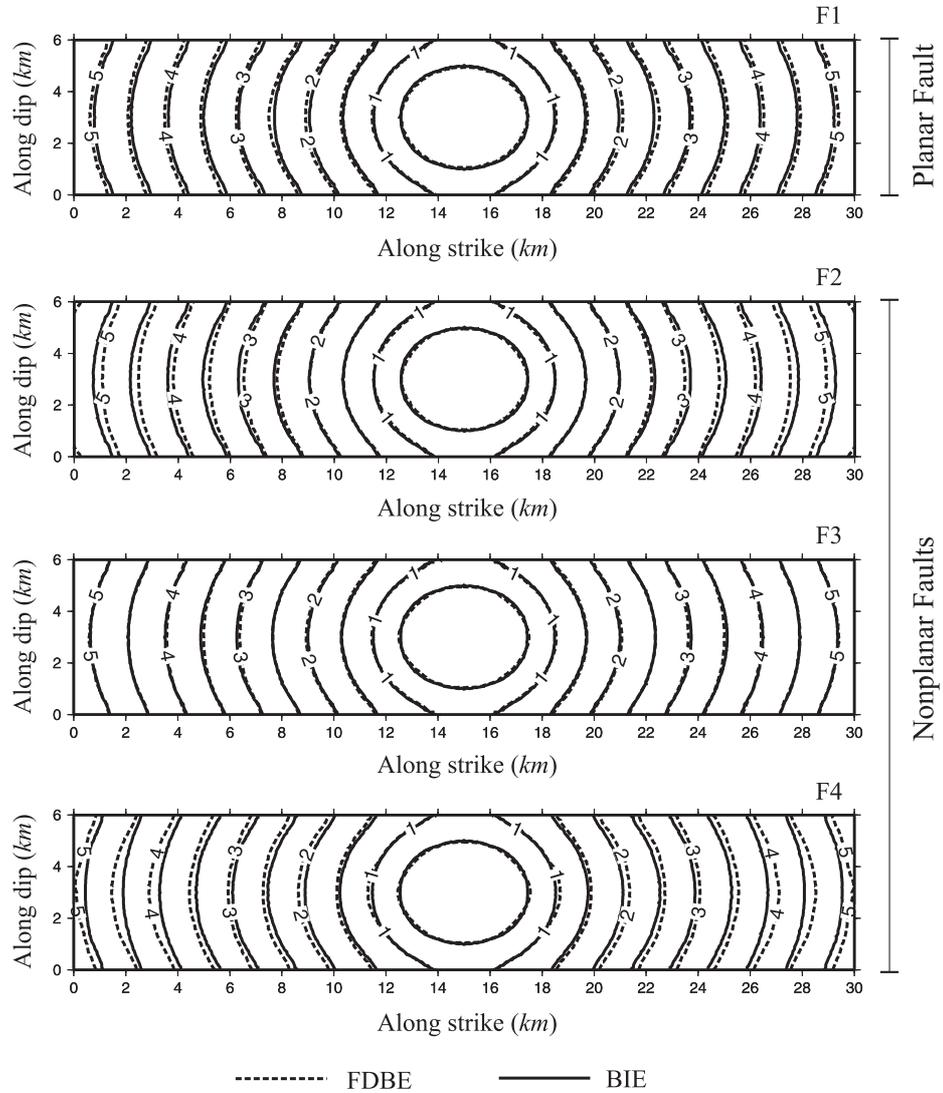


FIG. 4.34: Rupture front contours at 0.5s interval computed with our finite-difference boundary-element method (FDBE, dashed lines) and with the boundary integral equation method (BIE, solid lines). Comparisons along a planar fault (F1) and along three parabolic surfaces F2, F3 and F4 (see Figure 4.32).

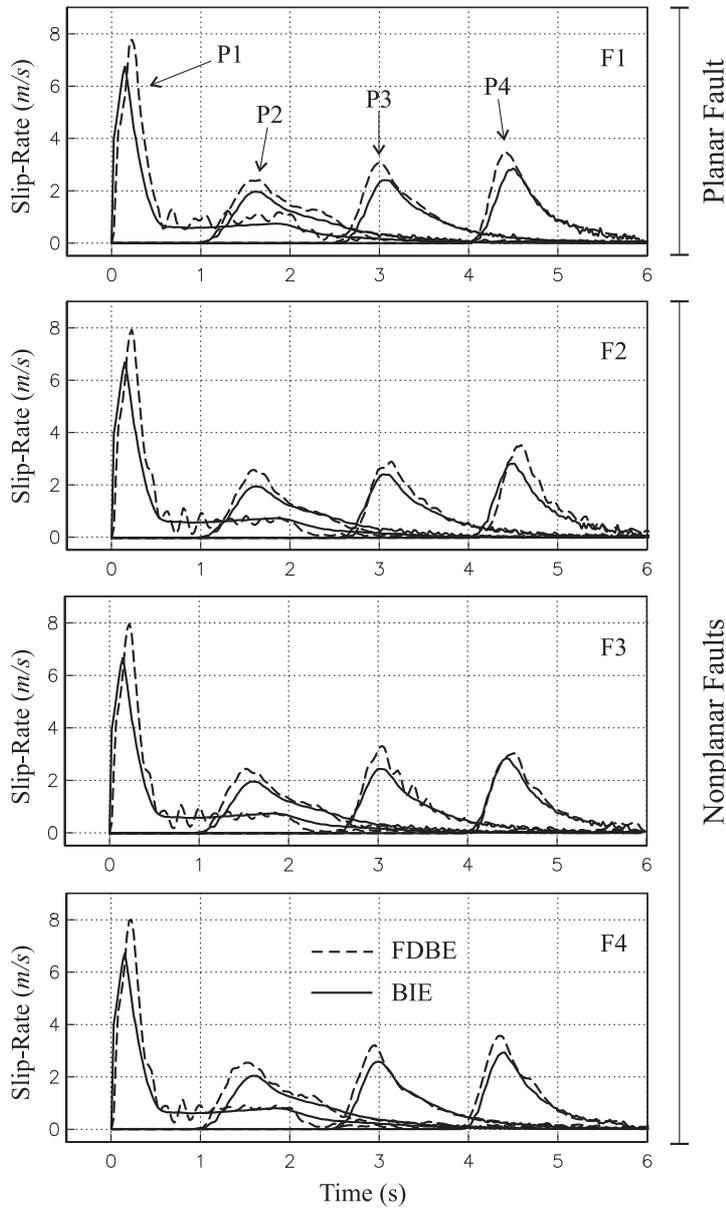


FIG. 4.35: Slip-rate functions computed in four observational fault points (see Figure 4.33) with our finite-difference boundary-element method (FDBE, dashed lines) and with the boundary integral equation reference method (BIE, solid lines). Comparisons along a planar fault (F1) and along three parabolic surfaces F2, F3 and F4 (see Figure 4.32). Signals are not filtered.

$v_s(m/s)$	$v_p(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$
2300	4000	2500

TAB. 4.8: Material properties of the 3D homogeneous space loaded with the biaxial tectonic field illustrates in Figure 4.36. In this table v_p and v_s are, respectively, the S - and the P -wave velocities, and ρ the density.

4.2.6 Rupture Along a Nonplanar Loaded Fault

4.2.6.1 Biaxial Tectonic Pre-stress

When modeling the spontaneous rupture of earthquakes, the initial stress conditions along the fault are essential (*e.g.*, Peyrat et al., 2001, Aagaard et al., 2001, Aochi & Madariaga, 2003, Cianetti et al., 2005). The prestress field in the rupture region $\boldsymbol{\tau}_0$ may be understood as the resultant tensor of the regional tectonic load ($\boldsymbol{\tau}_t$) plus the residual stress field ($\boldsymbol{\tau}_r$) due to local stress changes associated with past seismic events. In that account, the initial traction vector \boldsymbol{T} in a given fault point with unitary normal vector \boldsymbol{n} is given by (section 1.3.1) :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{n} (\boldsymbol{\tau}_t + \boldsymbol{\tau}_r). \quad (4.17)$$

The absolute prestress level may only be known from ground motions under specific conditions (Spudich, 1992, Spudich et al., 1998). Otherwise, in situ hydraulic fracturing measurements may be realized (Yamashita et al., 2004). Unfortunately these conditions are rather unusual in most real scenarios. On the other hand, kinematic waveform modeling in the resolvable frequency bandwidth prevent us to eliminate the trade-off between the prestress and the constitutive friction parameters (*e.g.*, Guatteri & Spudich, 2000, Peyrat et al., 2004). This means that different mechanically well-posed rupture models can explain the same observed waveforms. Nevertheless, the determination of stress changes associated with final slip or ground motions is possible and have become a powerful widely used procedure to constraint the analysis of earthquakes physics (Miyatake, 1992, Mikumo, 1994, Olsen et al., 1997, Bouchon, 1997, Mikumo et al., 2000, Ripperger & Mai, 2004, Peyrat & Olsen, 2004). Complementary methodologies have allowed a better understanding of fundamental aspects of rupture phenomenology as rupture velocity or the energy budget by mean of dynamic models (*e.g.*, Mikumo & Miyatake, 1995, Peyrat et al., 2001, Dalguer et al., 2002, Zhang et al., 2003, Miyatake et al., 2004, Tinti et al., 2005a).

Dynamic rupture propagation along bent faults has been studied by several authors (Aochi et al., 2002, Poliakov et al., 2002, Kame et al., 2003)

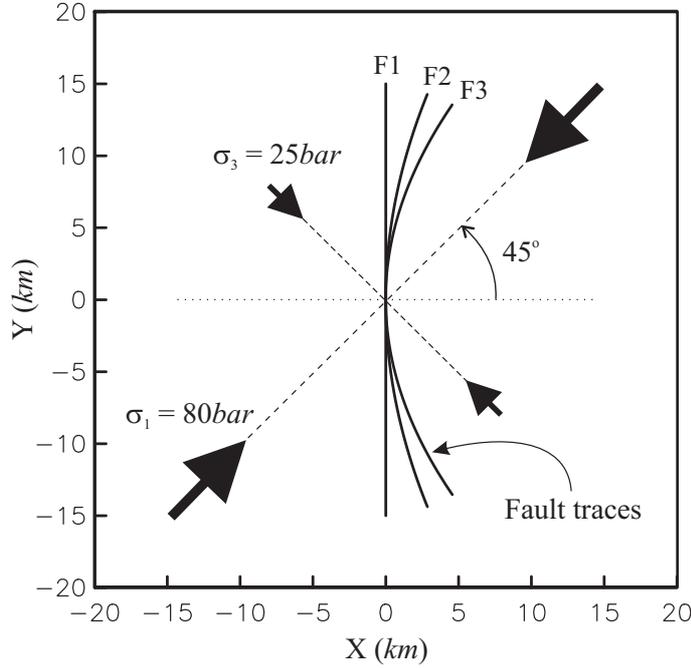


FIG. 4.36: Nonplanar parabolic faults embedded in a biaxial tectonic load $\boldsymbol{\tau}_t = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. The intermediate principal stress, σ_2 , is assumed to be zero (vertical direction). The faults geometries $F1$, $F2$ and $F3$ are those introduced in section 4.2.5.2 for the nonplanar comparison exercise (see Figures 4.32 and 4.33).

finding that rupture branching is primarily determined by rupture speed and by the initial prestress conditions. Dynamic effects on normal stresses under Coulomb failure conditions are often negligible compared with the shear stress concentrations near the rupture front. In these studies the initial stress field $\boldsymbol{\tau}_0$ was assumed equal to the tectonic one. In this section I will also neglect $\boldsymbol{\tau}_r$ (*i.e.* the initial fault tractions are $\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\tau}_t$ from equation 4.17) and show how an homogeneous biaxial tectonic load may induce strong asymmetric rupture effects along a symmetric nonplanar fault. In the following, the rupture path will be known a priori and is given by three of the rupture surfaces considered in last section : faults $F1$, $F2$ and $F3$.

The fault surfaces are embedded in an homogeneous whole space with the elastic properties given in Table 4.8. The medium is subject to the action of an homogeneous stress field with intermediate principal stress (σ_2) equal to zero pointing in the vertical direction (*i.e.* parallel to the z axis), and maxi-

mum (σ_1) and minimum (σ_3) principal stresses pointing 45° with respect to the Cartesian reference frame, as shown in Figure 4.36. Several studies have demonstrated that similar biaxial loads are in agreement with seismotectonic observations in southern California (Hauksson, 1994, Hardebeck & Hauksson, 2001). So as to allow rupture propagation under this conditions without prescribing the fracture energy during the breakdown process, frictional strength is controlled by the following linear time-weakening Coulomb law (see equation 4.14) :

$$\tau(\sigma, t) = \begin{cases} \sigma \left[\mu_s + (t - t_r)(\mu_d - \mu_s)/t_c \right] & ; \quad 0 \leq t - t_r \leq t_c \\ \sigma \mu_d & ; \quad t - t_r > t_c \end{cases} \quad (4.18)$$

where t_r is the rupture time and t_c is the critical weakening time (Andrews, 2004). Once again I neglect the dynamic effect on fault normal stresses so $\sigma = \sigma_0$ in this equation. Figure 4.37 presents the initial shear and normal tractions over the three different fault surfaces. This means that both the yield stress and the sliding friction, respectively τ_u and τ_s (see equations 4.14b), directly depend on the initial tractions through equation 4.17. Friction coefficients (Table 4.9) are homogeneous over the entire fault so both τ_u and τ_s present the same trend than the initial tractions over the fault during the entire rupture processes.

When the initial stress conditions are constant in the planar fault case F1, both normal and shear stresses are quite heterogeneous and dissimilar along the parabolic faults F2 and F3. Thus, the initial stress conditions are very sensitive to small variations on fault geometry when the fault is subjected to a biaxial tectonic load. For the sake of understanding the effects of this initial conditions on rupture propagation, all constitutive friction parameters were kept constant inside and outside the nucleation zone (*i.e.* μ_s , μ_d and t_c , Table 4.9). However, this simplification may be simply modified so more realistic scenarios can easily be performed (*e.g.*, Aochi & Fukuyama, 2002, Aochi & Madariaga, 2003). In this case the only parameter which changes between different rupture simulations is the fault geometry.

The static friction coefficient inside the nucleation zone (red region, Figure 4.33) was chosen such that, given the initial normal tractions, the yield stresses in that zone are 1% smaller than the initial shear tractions. As a result, at time $t = 0$ rupture initiates because the shear stresses drop in the same proportion from their static initial values. Once rupture initiated, it propagates spontaneously under the control of the constitutive friction law 4.18 until reaching a total stress relaxation determined by the dynamic friction coefficients which are equal to zero everywhere. Since τ_u and τ_s are

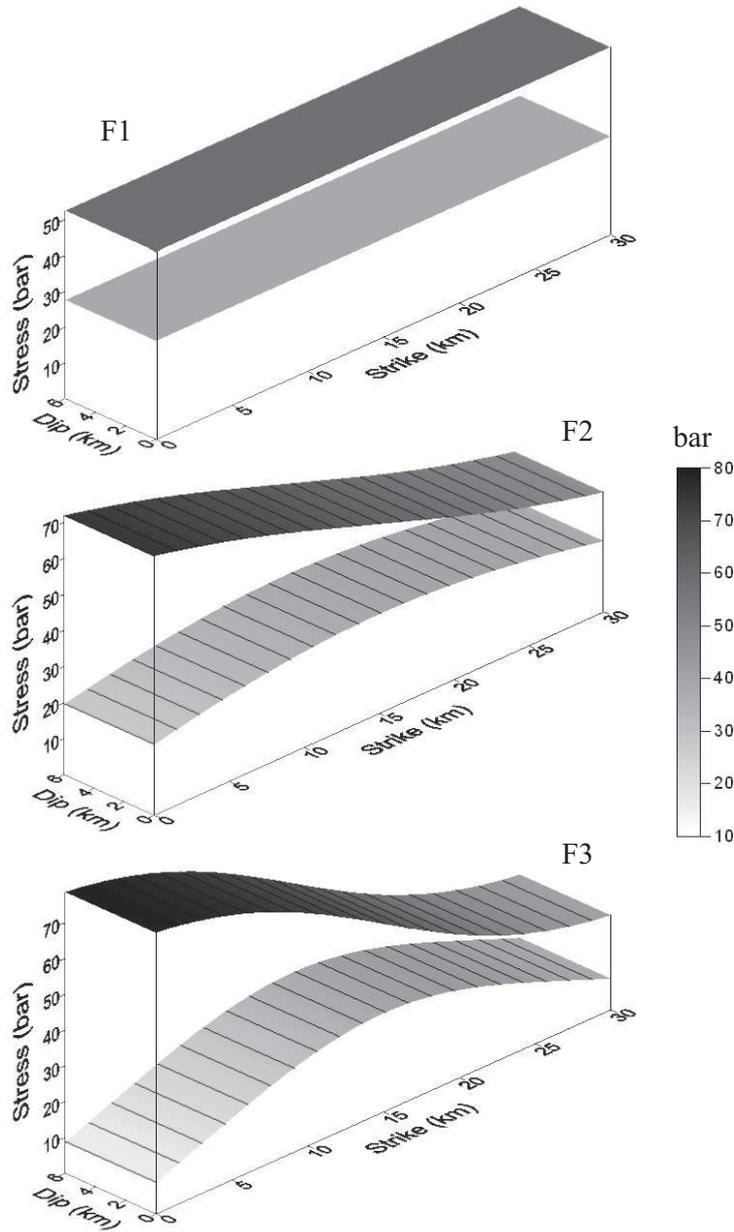


FIG. 4.37: Normal (σ_0 , upper) and shear (τ_0 , bottom) prestresses over the fault surfaces F1 (planar), F2 and F3 due to the biaxial tectonic load shown in Figure 4.36.

Parameter	Nucleation	Outside Nucleation
μ_s	(*)	0.7
μ_d	0.0	0.0
t_c	0.6s	0.6s

TAB. 4.9: Constitutive friction parameters used in all simulations with biaxial tectonic load (Figure 4.36). μ_s the static friction coefficient, μ_d the dynamic friction coefficient and t_c the critical time-weakening. (*) The static friction coefficient was chosen such that, given the initial normal traction σ_0 , the yield stress is 1% smaller than the initial shear traction τ_0 .

proportional to the normal fault tractions, the upper yield point parameter $S = (\tau_u - \tau_0)/(\tau_0 - \tau_s)$ introduced in section 2.4.1 strongly depends on \mathbf{T}_0 (*i.e.* on fault geometry). Consequently, rupture propagation is subject to spatially changing values of S that in some fault regions may be quite small. For instance, by a simple inspection of Figure 4.37 and keeping in mind that $\mu_s = 0.7$ and $\mu_d = 0.0$ one may estimate from equation 4.14b that, when this ratio is smaller than one in the right extremity of fault F2, it is much more larger than unity in the left extremity of fault F3. As discussed in section 2.4.2 (see Figure 2.12 on page 164), 1.63 represent the upper boundary value below which spontaneous rupture with cohesion forces may propagate with a supershear velocity (Burridge, 1973, Andrews, 1976b). For this reason we would expect faster rupture propagation toward the right direction in the nonplanar fault cases. However, rupture velocity is directly related with the energy budget during propagation, so as the breakdown work realized by the cohesive forces play also an determinant role (Madariaga & Olsen, 2000, see equation 2.35 of this work). The energy expended by these forces is proportional to the slip-weakening distance (see equation 2.21, page 154) which is not predefined in our case since the stress drop history only depends on time. Therefore a priori we can not be sure about the rupture evolution even in these particular initial stress conditions.

As pointed out by Knopoff & Ni (2001) (section 4.2.4), numerical solutions by FD methods may be considerable affected because they always exhibit oscillations caused by the stepwise advance of the crack tip across the discrete lattice. Resonances of these oscillations may affect the rupture energy balance so as an important portion of the available energy may be lost away from the fault decreasing the energy release rate needed for rupture to propagate (Parisi & Ball, 2002). Consequently this is an undesired numerical effect which also may affect rupture velocity. In order to dump these oscillations a dissipative term applied to the velocity vector v_i may be

added to the original equations of motion (*e.g.*, Kame & Yamashita, 1999, Knopoff & Ni, 2001, Kame et al., 2003, Ben-Jemaa et al., 2006) as follows :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \tau_{ij,j} + \eta \nabla^2 v_i \quad (4.19)$$

where ∇^2 is the Laplacian operator and η is the dumping factor. Since one grid node behaves as a dumped oscillator with proper frequency proportional to v_s/h (Knopoff & Ni, 2001), the grid size will determine the frequency band of these oscillations within the signal spectrum. In order to dump such a noise, the grid size must be small enough so as both spectral signatures, the one corresponding to the physical solution and the one due to the numerical oscillations, should not be overlapped. Otherwise, the application of the Laplacian may degrade solutions by dumping important physical information (high frequencies) and then slowing down rupture speeds.

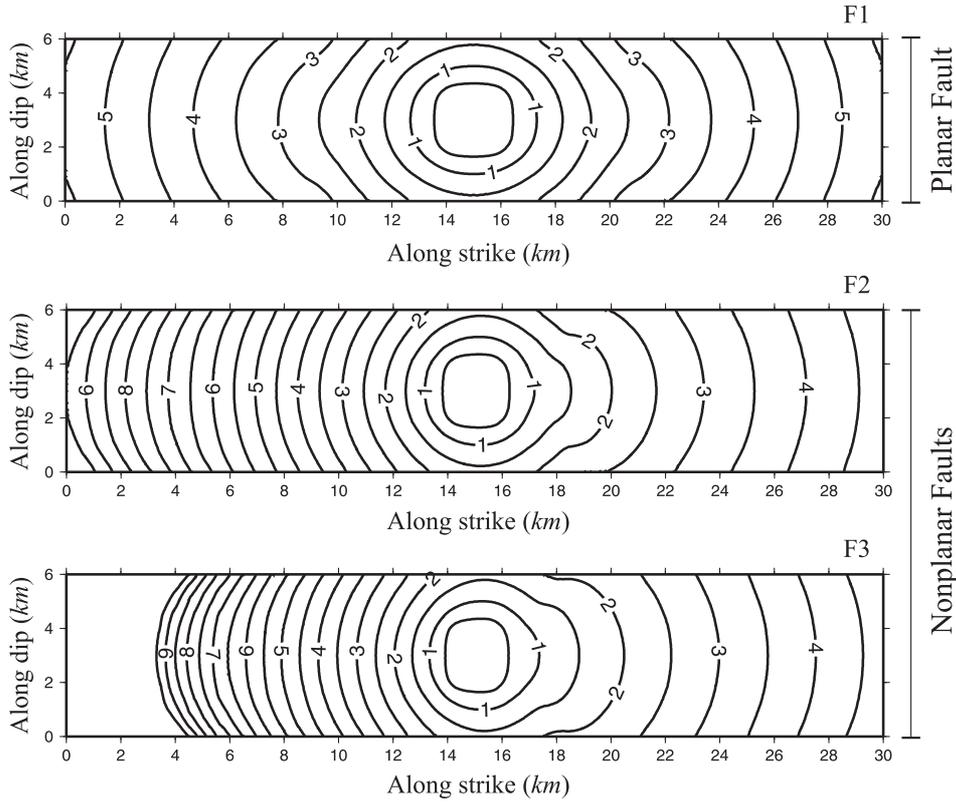


FIG. 4.38: Rupture time contours every 0.5s interval under biaxial tectonic load (see Figures 4.36 and 4.37).

In our case the dissipative term is applied only in the neighborhood of the fault region along a slab with thick Γ (number of velocity-grid nodes) centered at the source boundary elements. Numerical tests have shown that the slab should be thick enough to contain all velocity-grid nodes surrounding the boundary elements for which the legs of the spatial operators penetrate the elements. Given that I use fourth order spatial operators then $\Gamma \geq 10$. The following simulations were computed taking $\eta = 0.11$, $h = 45.45m$ and $\Delta t = 0.05s$.

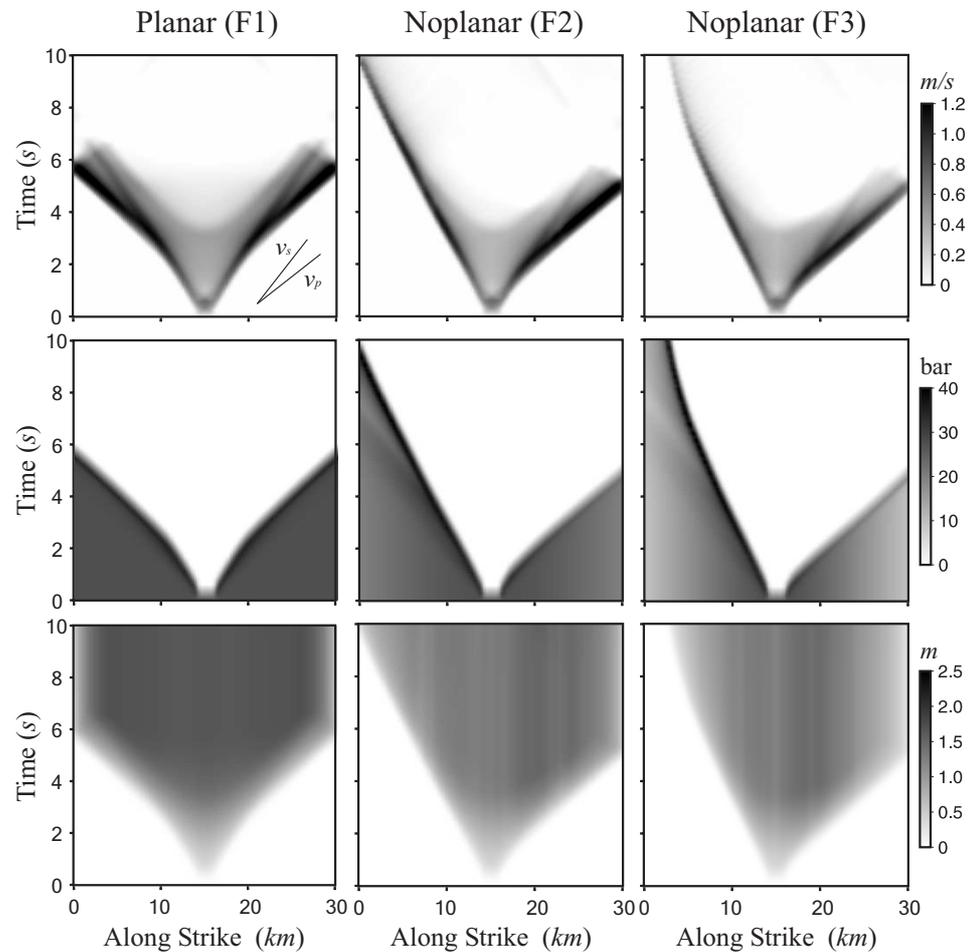


FIG. 4.39: Fault solutions as a function of position in the along-strike (purely in-plane) direction and time. Lines from top to bottom correspond to the slip-rate, shear stress and slip.

Figure 4.38 presents rupture time contours every 0.5s along the three

rupture surfaces. As predicted in previous paragraphs, rupture propagation is clearly asymmetric in the along-strike direction (*i.e.* purely in-plane) when the fault is nonplanar. On the contrary, it is bilaterally symmetric in the planar case where S is also symmetric (constant) with respect to the fault center. Simple measurement of the distance rupture propagates every second lead us to evaluate its velocity. In the planar case F1, after three seconds rupture undergoes a transition toward the supershear regime in both directions where it propagates with a speed close to that of the P -waves ($\sim 4\text{km/s}$). In the nonplanar cases F2 and F3 we find that rupture transition takes place earlier and only in the right direction : respectively two and one seconds after rupture initiation. However rupture reaches the fault edge almost at the same time. As opposed to this situation, rupture tends to stop before reaching the left fault extremity on the must curbed fault F3. When rupture front propagates with a speed lower than the S -wave velocity ($\sim 1.9\text{km/s}$) during the entire rupture of fault F2, it do not reaches such a steady state on fault F3 where rupture starts propagating with the same speed and then slow down after $\sim 6\text{s}$.

These asymmetric rupture behaviors are accompanied by important variations of the elastic fields along the faults. Figure 4.39 shows fault solutions along the purely in-plane direction as a function of time. In the first line, the fault slip-rate allows us to see how supershear transitions happen earlier in the F2 and F3 cases. However, the fault block velocities are higher in the F1 and F2 (toward the right) faults than in the F3 rupture surface where it decreases in the final rupture stage. As a general rule, the slip-rate pulses are higher and wider in the fault regions where the rupture propagates at supershear velocities than in regions where it remains in a subshear regime (left sides of nonplanar faults F2 and F3). As discussed in earlier paragraphs, rupture asymmetries are directly related to the heterogeneous distribution of the upper yield parameter S over the nonplanar faults determined by the initial stress conditions and the friction coefficients. The second line of this figure shows how rupture should reach much more higher stress values in order to propagate toward the left than in the opposite direction. The asymmetry is also observed in the final slip distribution (bottom line) where we found a higher concentrations near the center on the right fault sides of fault F2 and F3. Nevertheless, the mean final slip (*i.e.* seismic moment) over the planar fault is considerably greater than those yield by ruptures along the parabolic fault embedded in the biaxial load.

Figures 4.40, 4.41 and 4.42 present sequences of snapshots at 0.45s interval of the slip-rate (left columns) and shear stress (right columns) along the three rupture surfaces. In these images we can better appreciate the observa-

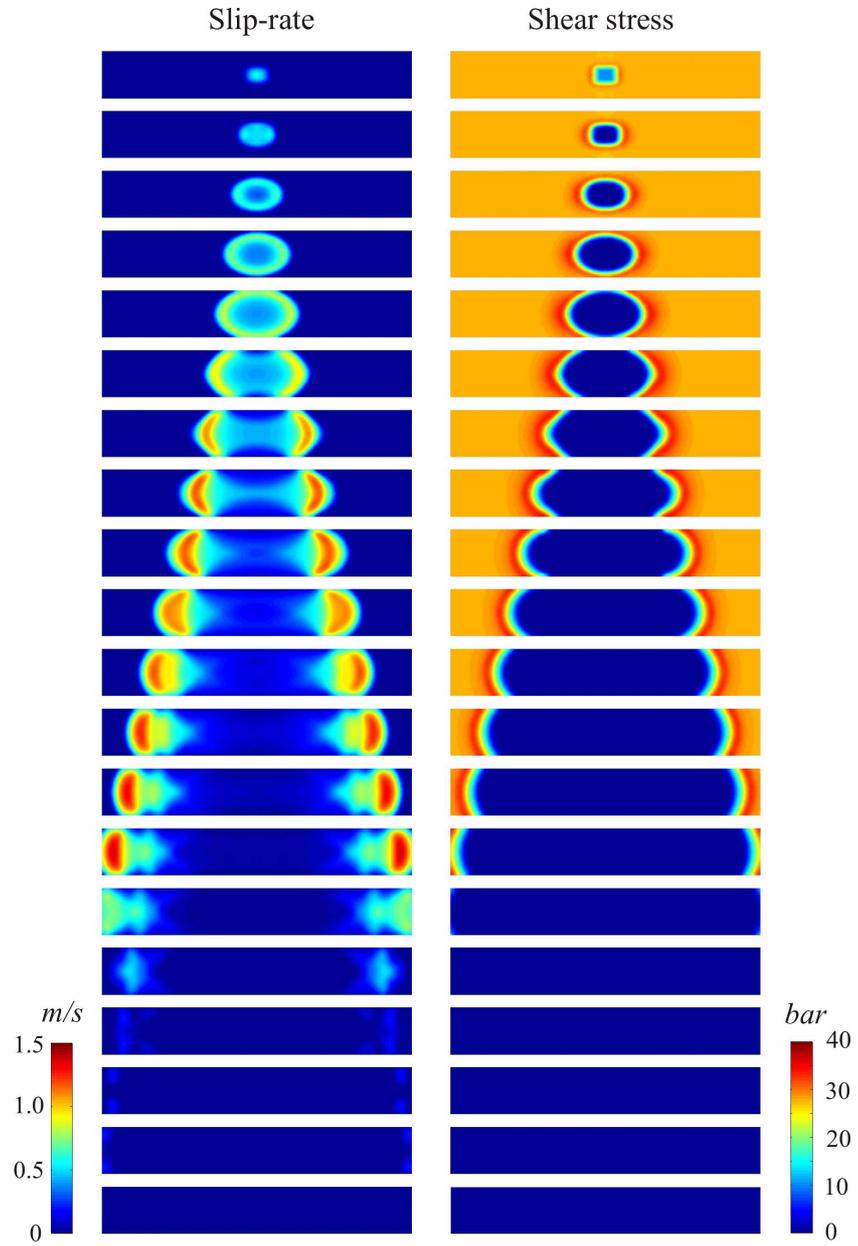


FIG. 4.40: Slip-rate (left) and shear stress (right) snapshot sequences at 0.45s time interval along the planar fault F1.

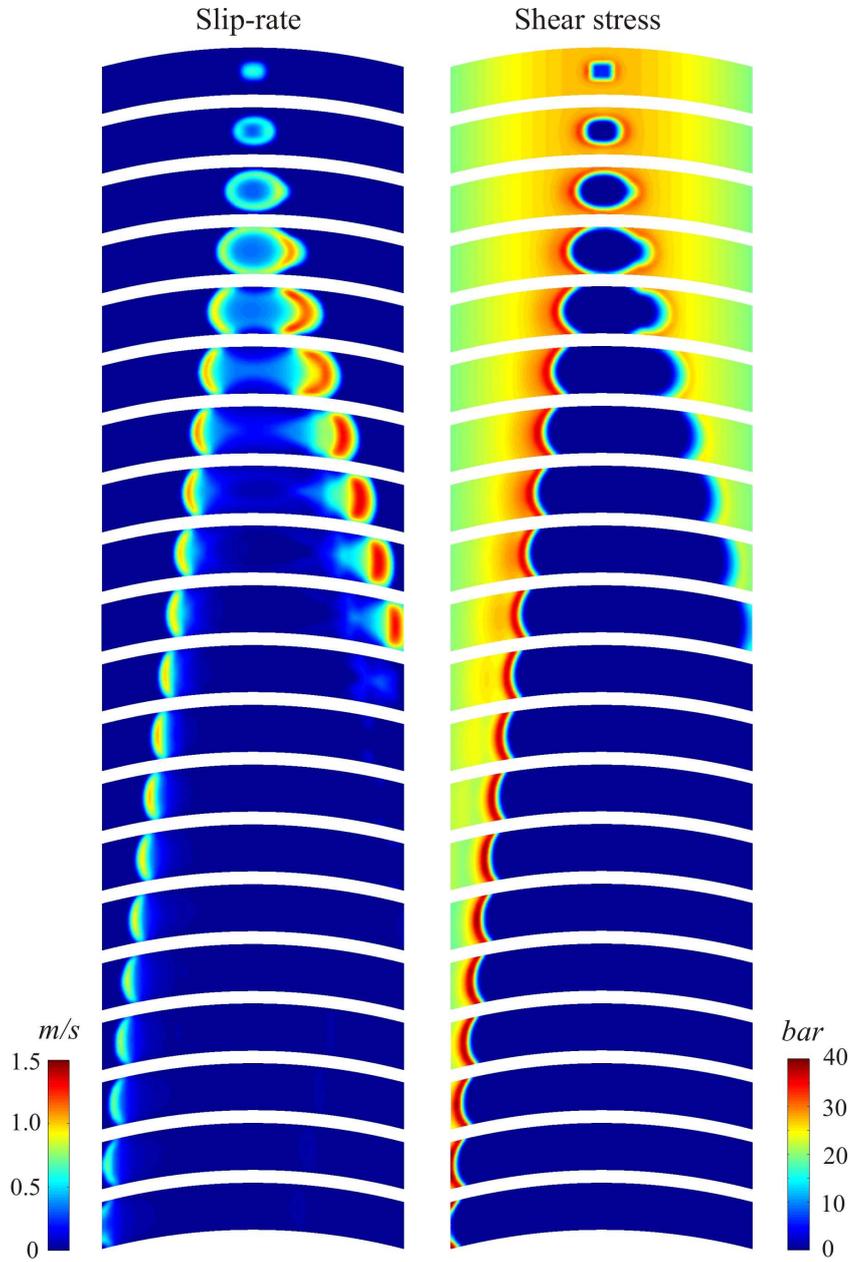


FIG. 4.41: Slip-rate (left) and shear stress (right) snapshot sequences at 0.45s time interval along the nonplanar fault F2.

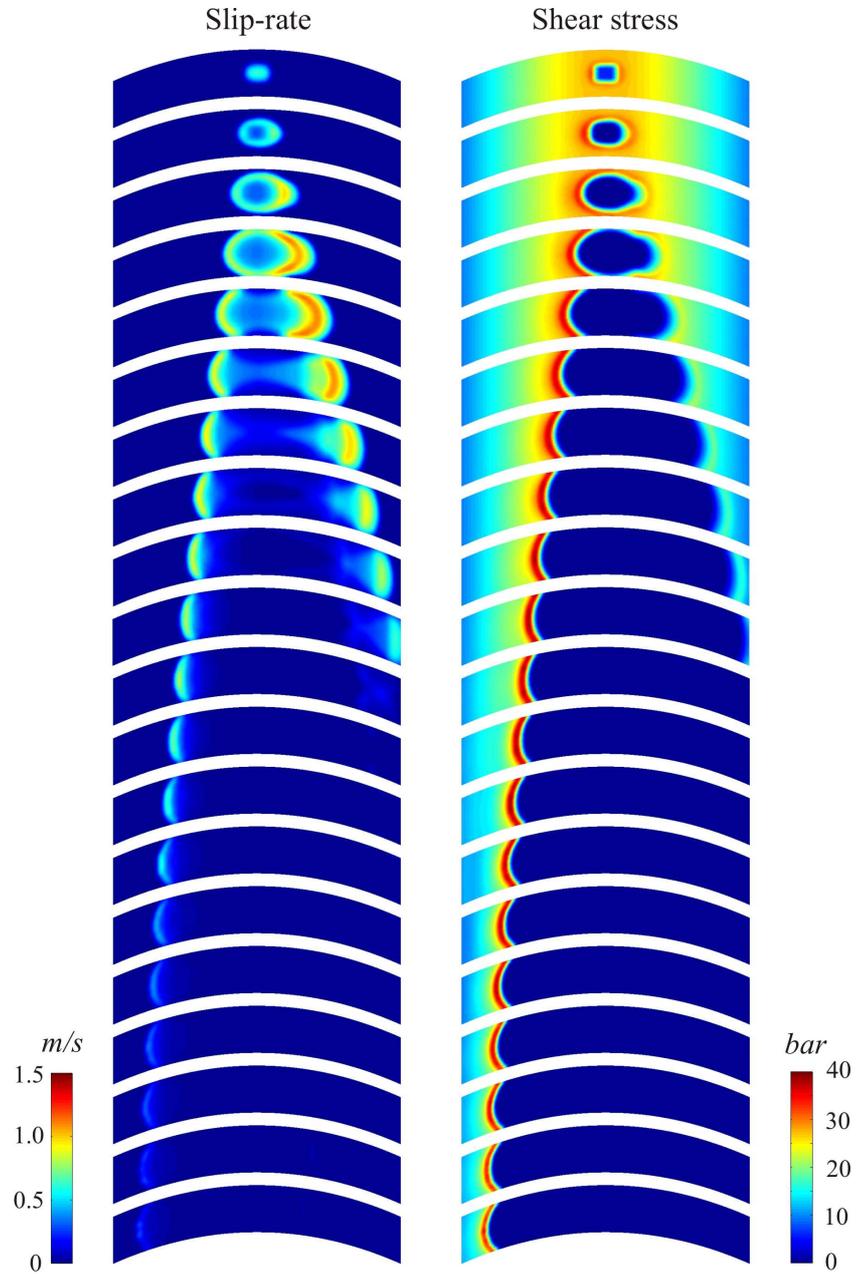


FIG. 4.42: Slip-rate (left) and shear stress (right) snapshot sequences at 0.45s time interval along the nonplanar fault F3.

tions pointed out in last paragraph. We see for instance how the width and magnitude of the slip-rate pulses are quite dissimilar depending on rupture speed. Where the rupture bifurcation takes place we can also appreciate that the S -wave traveling behind the rupture front induces much more longer rise-times than along those regions where rupture never exceeds v_s . In the last snapshots along the fault F3 we see almost no fault movement. Rupture dies slowly. In fact, the reason why rupture actually does not stop is because the stress drop depends on time, so once rupture initiated in a fault point the stress drop rate (*i.e.* the fault acceleration) is not governed by the inertia of the fault blocks as it does if a slip-weakening failure criterion were considered. Concerning the shear stresses, the snapshots of fault F2 clearly show the way the yield stress τ_u increases with distance from the fault center in the left direction. Larger shear stresses must be reached to break the fault so rupture may never experience the supershear bifurcation. The same reason lies behind the deceleration of the rupture front along the fault F3.

The overall rupture scenarios previously analysed have important implications in the radiated wavefield. Since displacements in the far-field are proportional to the slip-rate functions we should expect a « seismic energy directivity » in our bilateral nonplanar rupture models. This is confirmed in Figure 4.43 where three snapshots of the particle velocity are shown. If we separate the elastic medium at the fault center with a virtual plane perpendicular to the y axis, we see no equipartition of seismic energy in both halfspaces if rupture happens along the nonplanar faults. When the supersonic shock-wave is well developed during the planar rupture in both directions, it only appears toward the positive y -axis direction in faults F2 and F3. We can also appreciate in this figure the efficient implementation of the PML absorbing conditions in the four visible external limits which have been widely discussed in section 1.5.2.

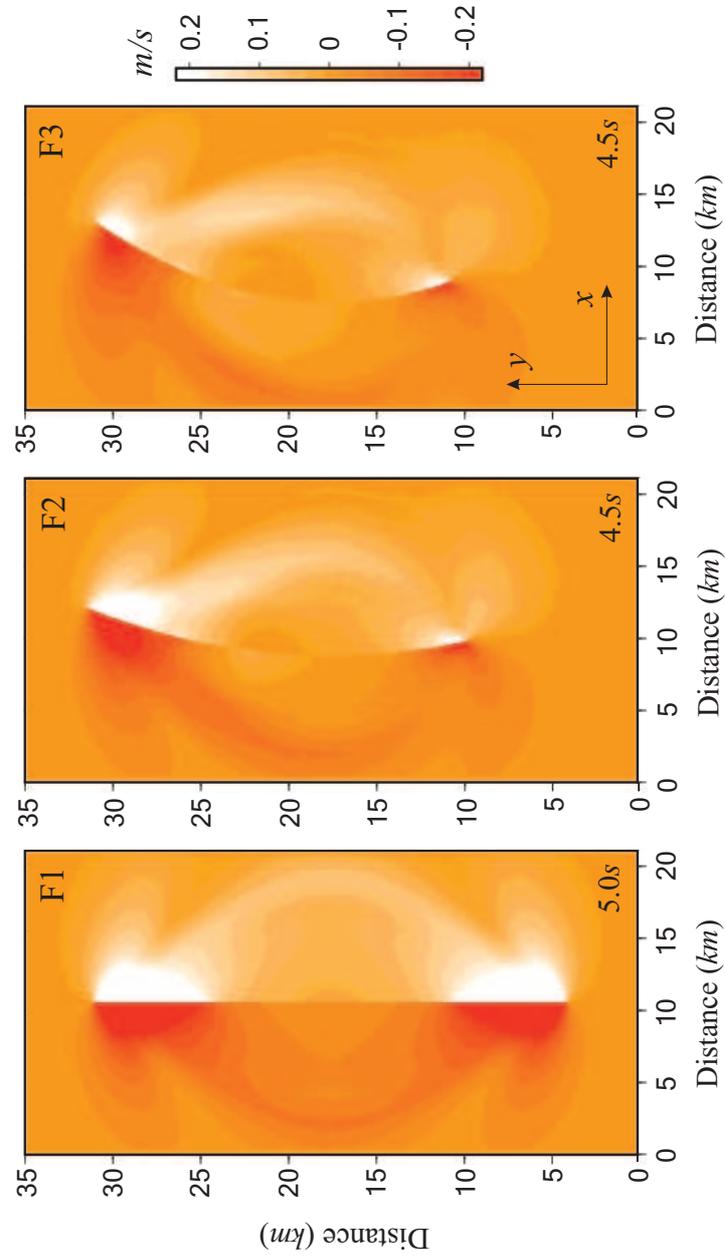


FIG. 4.43: Particle velocity snapshots (v_y) over an horizontal plane passing through the center of the faults. Ruptures along a planar (F1) and nonplanar fault (F2 and F3). See Figure 4.32.

4.2.7 Discussion and Conclusions

In this section I have introduced a new numerical methodology based in finite differences to model the dynamic rupture of nonplanar faults in three dimensions. This methodology is called the *finite-difference boundary-element* (FDBE) approach and basically represents an extension of the rupture model recently introduced in two dimensions by Cruz-Atienza & Virieux (2004, chapter 3 of this document).

The rupture model is implemented in a partly-staggered grid where both the velocity vector and the stress tensor are defined in two independent grids shifted half a way the spatial grid step in the three Cartesian directions. Following our 2D rupture model, the source is numerically represented by a fault zone with a finite width. The fault zone is composed of independent boundary elements in which a local set of boundary conditions is applied depending on the local fault orientation. For an accurate slip and slip-rate estimate, weight functions have been constructed once and then stored for any future simulation. The use of these functions makes the evaluation of the source kinematical parameters independent of fault orientation with respect to the numerical grid reference frame.

A dissipative operator has been implemented in order to dump numerical oscillations if necessary. This operator is applied along a slab of grid points centered at the source boundary elements. The slab should be thick enough to contain all velocity-grid nodes surrounding the boundary elements for which the legs of the spatial operators penetrate these elements. Given the specific element structure chosen in this study, if fourth order spatial operators are used the dissipative term should be applied at least in a 10-point thick slab. Values of about 0.1 for the dumping factor η seem to cleanup solutions without considerably affecting rupture velocities. However, the bidimensional analysis performed in chapter 3 has shown that numerical oscillations are controlled by a scaling law relating the amount of stress points per boundary element and the grid size, so as the greater the number of points the smaller the spatial grid step may be. However, when modeling huge 3D rupture scenarios computational power limitations prevent the use of extremely fine meshes so low order boundary elements (*i.e.* elements with small number of stress-grid points) are suitable to achieve a good precision. The specific element structure use all along this study has been selected owing to a good compromise between its size in a feasible 3D grid and the spontaneous rupture resolution. If a nonregular grid was implemented in the source region or if the Message Passing Interface (MPI) was used to parallelize the current sequential code, a finer model sampling would be possible so higher order boundary elements could be used to reduce numerical oscillations and then

improve the accuracy (see section 3.5.1).

Imposing dynamic rupture boundary conditions always makes more restrictive the stability criteria of numerical methods. However, values for the Courant number up to $S = v_{max}\Delta t/h = 0.66$ yield stable solutions with both second and fourth order spatial operators when simulating the spontaneous rupture in the partly-staggered grid. Even valid when applying the dissipative operator in the FDBE model, this Courant value is at least 1.5 times greater than those reported in previous FD rupture models (*e.g.*, Virieux & Madariaga, 1982, Madariaga et al., 1998).

The Hamano's (1974) failure criterion, which is consistent with the Irwin's (1957) critical intensity factor one, has been implemented. The main assumption of this criterion is that the average stress value in a given boundary element is equal to the stress value at the center of that element. So as to make the numerical solution independent of the element size, such an assumption should be respected whatever the grid step is below a threshold value. The only way to do so is to remove the stress singularity ahead the rupture front by introducing cohesive forces in the breakdown process. Assuming a slip-weakening constitutive law, the stress field around the fault tip is controlled by the critical slip-weakening distance δ_c inside the cohesive zone. For this reason convergence of the FDBE approach has been analyzed as a function of grid size h , and δ_c . Since the efficient removal of the singularity depends on the stress distribution along the cohesive zone, one expect the model to converge if that zone is well resolved. In other terms, a minimum number of fault elements should sample the cohesive zone to control the stress field outside the fault. A parametric study revealed that this number, called the cohesive zone resolution parameter N_c , grows rapidly when $h \lesssim 70m$ and $\delta_c \gtrsim 0.4m$. Moreover it also revealed a good correlation between N_c and the error estimates for grid sizes $h \gtrsim 70m$ reaching satisfactory results when $N_c \gtrsim 4$. The greater the N_c , the smaller is the error. However, for finer grids no more correlation exists. When N_c still depending on δ_c , the error decreases monotonically whatever the critical slip-weakening distance is. This would mean two different things : 1) that there exist an upper bound value of N_c (~ 4) from which there is an oversampling of the cohesive zone making N_c to have no more influence on numerical convergence or 2) that the influence of N_c on such a convergence is always negligible with respect to other first order effects related to the mesh refinement (*e.g.*, reduction of numerical oscillations). This ambiguity may be simply a consequence of a lack in the error estimate resolution due to the smoothing associated with the spatial interpolation.

Comparison of results yielded by the FDBE rupture model with those

obtained with two independent numerical approaches were carried out for planar and nonplanar fault geometries. In all cases rupture was nucleated in a sharp square region governed by a slip-weakening friction law. Comparing the convergence of two different numerical methods for this kind of problems may be misleading since in general the order of convergence in each case depends on the order of singularities found in the exact problem solution. Solutions of the tested problems have low-order singularities because of both the abrupt box-type nucleation zone and the slip-weakening frictional behavior. An interesting analysis has been performed by Day et al. (2005) where power-law convergence rates as a function of grid size have been determined for two independent approaches, a FD split-node (TSN) model and a BIE model. Solving a similar problem in section 4.2.4, our FDBE has revealed a lower convergence rate (*i.e.* a linear rate, see Figure 4.20). When solving The Problem Version 3 of the SCEC code comparison exercise, if $h \lesssim 50m$ then similar results to those obtained with the TSN model were found in terms of rupture times, slip, slip-rate and shear stress functions. For $h \approx 90m$, oscillations appear and the slip-rate is underestimated so rupture is delayed of about 1.3s at the fault edges. Solutions for the same problem obtained by Dalguer & Day (2006) with the fault zone model proposed by Madariaga et al. (1998) are less accurate than ours. In fact the accuracy of the FDBE model, which is formulated in the partly stagger-grid, is comparable to that of the stress-glut method in the standard staggered grid for the same rupture problem (Dalguer & Day, 2006).

The most important feature of the FDBE model is not its accuracy at a given discretization level but the ability of going beyond simple and often unrealistic planar fault geometries. This model has been created for simulating the dynamic rupture of nonplanar faults embedded in arbitrarily heterogeneous media. For this reason validating it in more complex conditions is an essential task. Results obtained for spontaneous slip-weakening ruptures along parabolic faults with a translation invariant axis are in good agreement with results yielded by a BIE method (Aochi et al., 2000b). The comparison was performed in terms of rupture times, slip-rate and final slip. Even if dynamic rupture effects on fault normal stresses were not taken into account, these results show that the FDBE method under complex geometrical conditions reproduces quite well solutions obtained by an independent semi-analytical method. Aochi et al. (2002) have shown that rupture propagation along nonplanar faults is mainly governed by the shear stress field ahead the rupture front even when Coulomb failure criterion is considered. Dynamic variations on the static (and dynamic) friction associated with normal stress changes away from the free surface only cause second order effects.

Rupture along nonplanar faults under a biaxial tectonic load is revealed to be extremely sensitive to fault geometry if Coulomb failure is considered. When rupture is bilateral and symmetric along a planar fault, it is strongly asymmetric along nonplanar faults. Rupture asymmetry is directly related to the heterogeneous distribution of the upper yield parameter S over the fault which is determined by the initial stress conditions. Rupture along the same fault, governed by the same friction law (constant constitutive parameters), embedded in a homogeneous biaxial load, may propagate with a supershear speed toward one fault extremity and with a subshear speed (or even stop) toward the opposite direction only as a consequence of a slight fault inflexion. This asymmetric behavior is close to those theoretically predicted (Harris & Day, 1997, Andrews & Ben-Zion, 1997) or even observed in laboratory experiments (Xia et al., 2005) along bimaterial interfaces. The last argument has been suggested to explain some earthquakes observations (Bouchon et al., 2001) even if it remains a seismological controversial issue (Andrews, 2002, Bouchon & Rosakis, 2002). As a whole, fault geometry effects under tectonic load revealed by the FDBE are in accordance with previous studies where real earthquakes were tackled using a BIE approach (Aochi & Fukuyama, 2002, Aochi & Madariaga, 2003). However more clear effects on rupture propagation could be observed in this study since there were not direct constraints on fracture energy. Important directionality of seismic energy emission accompanied the bilaterally asymmetric rupture along the nonplanar faults. The next extremely important step toward an even more realistic simulation is to introduce an heterogeneous medium (Cruz-Atienza et al., 2006), situation in which the BIE approaches fail. As it was clearly illustrated in section 3.6.1 (see Figures 3.15 and 3.16 on page 200) rupture history and excited wave-field experience important effects when rupture propagates through different elastic media. Preliminary results for the 1999 Landers earthquake dynamic modeling combining a realistic fault geometry and stress field in a layered elastic medium are presented in section 4.3.1.

4.3 Discussion, Conclusions et Perspectives

Dans ce chapitre j'ai présenté l'extension en trois dimensions des modèles numériques en différences finies (DF) décrivant la source dynamique selon une zone d'épaisseur finie. J'ai présenté en particulier des résultats issus de différentes descriptions de la source dans la grille partiellement en quinconce, description plus difficile à faire dans une géométrie 3D que dans une géométrie 2D. Des résultats pour la rupture spontanée d'une faille plane obtenus en DF avec des éléments de frontière cubiques (constitués de huit points, FDBE) ainsi qu'à partir de l'évaluation du *stress-glut* (FDSG) ont été comparés avec ceux issus d'une méthode intégrale de frontière (BIE). Les deux formulations en DF convergent vers la solution BIE à mesure que l'incrément spatial de la grille h diminue. Pourtant celle basée sur le *stress-glut* produit des solutions systématiquement plus bruitées et plus lentes (*i.e.* avec des temps de rupture plus grands) que celles produites par la formulation FDBE. Pour $h = 25m$ la solution donnée par la méthode DF en éléments de frontière est virtuellement identique à celle de référence donnée par la méthode BIE.

La formulation FDBE utilisée dans cette comparaison, valable uniquement pour des géométries planes, considère que la faille est discrétisée par un ensemble d'éléments cubiques composés de huit nœuds de contraintes chacun. Ceci signifie que la source est décrite par deux plans de contraintes, exactement de la même manière que dans le modèle introduit par Madariaga et al. (1998). La discontinuité des déplacements à travers la faille est également évaluée directement à partir des nœuds de vitesse qui se trouvent immédiatement au-dessus et au-dessous de ces plans (Figure 4.1). Ces méthodes diffèrent principalement par, premièrement, le critère de rupture, puisque dans la méthode FDBE les éléments cubiques cassent simultanément, alors que dans la méthode de Madariaga et al. (1998) la rupture se propage nœud par nœud à travers la source. Deuxièmement, cette dernière est basée sur la grille en quinconce standard. Pourtant, mes résultats, tous obtenus dans la grille partiellement en quinconce, montrent que la formulation FDBE est plus performante que la FDSG, contredisant donc les attentes issues de l'étude récemment faite par Dalguer & Day (2006), où la méthode basée sur le *stress-glut* de Andrews (1999) produit des résultats considérablement meilleurs pour le problème abordé que celle de Madariaga et al., toutes deux étant formulées dans la grille en quinconce standard. Par conséquent, la performance des modèles de rupture dépend aussi du stencil numérique dans lequel ils sont représentés, c'est-à-dire de la manière suivant laquelle les équations différentielles sont discrétisées.

Il a été aussi montré que la structure interne des éléments de frontière utilisés par notre méthode FDBE détermine fortement la qualité de la reconstruction de la concentration de contraintes à l'avant du front de rupture. La configuration optimale est celle dans laquelle aucune arête des éléments n'est parallèle aux axes cartésiens de référence. La forme géométrique qui remplit cette condition est un octaèdre avec des axes majeurs parallèles aux axes cartésiens. Cette condition, déterminée grâce à des nombreux tests, implique qu'aucun des bras du stencil nécessaire pour dériver le champ de vitesse à l'extérieur d'un élément ne doit pénétrer l'élément. Malheureusement, discrétiser de façon « régulière » une surface non-planaire (ou bien un plan orienté arbitrairement) avec un ensemble d'octaèdres semble un problème topologiquement impossible à résoudre. Dans le cas où les opérateurs différentiels pénètrent les éléments, la singularité de contraintes aux nœuds les plus proches des éléments est mitigée par la chute des contraintes à l'intérieur de la faille qui entraîne la singularité vers le bas. La géométrie qui cause le plus fortement cet effet dans la grille partiellement en quinconce est un cube dont les arêtes sont parallèles aux axes cartésiens. Par ailleurs, la structure des éléments de frontière qui atteint le meilleur compromis entre résolution de la singularité et flexibilité géométrique pour décrire une faille non-planaire est un parallélépipède tourné de 45° par rapport à l'un des axes de référence.

Cette configuration des éléments de frontière a permis de construire un modèle de source dynamique capable de décrire des failles avec une géométrie non-planaire. Cela a été possible grâce à l'application de conditions de frontière locales, selon l'orientation du vecteur normal à la surface de rupture dans chaque élément. La construction des fonctions de pondération pour l'évaluation des paramètres cinématiques de la faille a rendu le modèle de rupture indépendant de l'orientation de la source par rapport à la grille numérique. Le modèle FDBE appliqué dans le cas des failles non-planaires sous l'action d'un champ tectonique biaxial a mis en évidence la sensibilité de la rupture à la géométrie de la faille dans ces conditions. Une rupture bilatérale peut devenir complètement asymétrique en conséquence d'une légère courbure de la faille. Ces résultats montrent l'importance de la géométrie de la faille. Une première application d'un tel modèle à un séisme réel est présentée dans la section suivante, où des résultats préliminaires sont analysés pour extraire des conclusions qualitatives d'importance par rapport à l'effet de la géométrie des failles dans la dynamique de la rupture des séismes.

4.3.1 The 1992 Landers Earthquake ($M_W = 7.3$)

In this section I present some preliminary results of the dynamic rupture modeling of the 1992 Landers earthquake (Cruz-Atienza et al., 2004a). This first application of the 3D FDBE method does not try to explain data but attempts to identify the importance of geometry heterogeneities and stress conditions. The boundary elements used to generate this simulation were the direct transposition to three-dimensions of the square elements introduced by Cruz-Atienza & Virieux (2004, chapter 3 of this document) in two dimensions : cubes with 6-point edges parallels to the Cartesian reference axis. For more quantitative analysis, we need to perform simulations with the new boundary elements formulation introduced in section 4.2. So I do not pretend to offer a rigorous sequence of ideas nor even to make an exhaustive revision about what has been one of the most studied earthquakes is the history. I just would like to present some insights about what I believe may lead to qualitatively interesting conclusions concerning the dynamics of such an earthquake and the importance of source geometry in general.

Thickness (m)	$v_s(m/s)$	$v_p(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$
1500	1980	3800	2300
2500	3150	5500	2600
∞	3520	6200	2700

TABLE 4.10: Elastic model used for the Landers earthquake rupture simulation (Figure 4.44). v_p and v_s are, respectively, the P - and S -wave propagation speeds, and ρ is the density.

The 28 June 1992 Landers earthquake ($M_W = 7.3$) represents the first mayor seismic event registered in souther California for which an unprecedented amount and diversity of geophysical observations are available. Geodetic displacement measurements, good azimuthal near-field and regional strong motions coverage, broadband teleseismic waveforms, high resolution radar interferometry images and earth surface offsets have allow to constrain the rupture history revealing a large complexity of slip distribution in a wide frequency range ($0 - 0.5Hz$) (*e.g.*, Campillo & Archuleta, 1993, Wald & Heaton, 1994, Cohee & Beroza, 1994, Hernandez et al., 1999). The large rupture size ($\sim 70km \times 15km$), the long rupture duration ($> 20s$) and the complex fault system geometry bring an exceptional opportunity to assess the influence of different model parameters on the observed data.

Olsen et al. (1997) have explained the general slip distribution determined by Wald & Heaton (1994) via a coupled multi-data kinematical inversion by

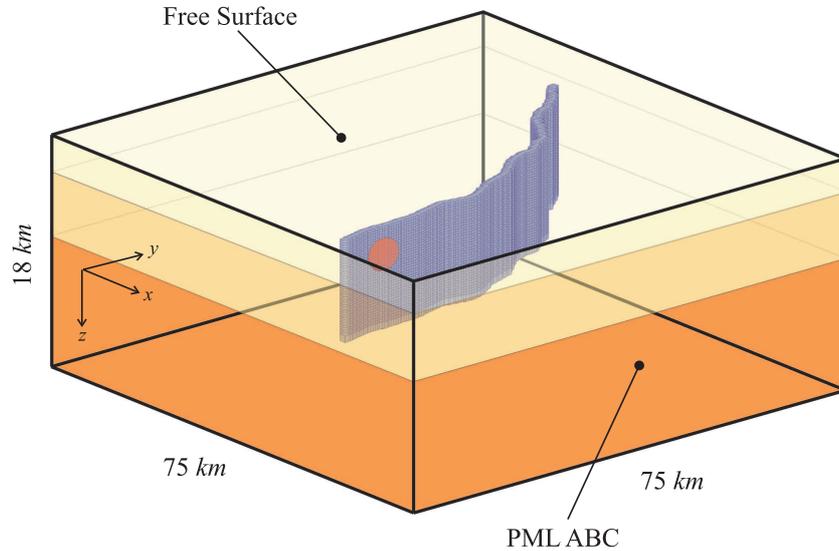


FIG. 4.44: Three-dimensional view of the discrete Landers earthquake discrete fault (blue surface). The fault is embedded in the one-dimensional three-layers medium given in Table 4.10. The model is surrounded by a planar free surface at the top and Perfectly Matched Layers (PML) absorbing boundaries on all others edges. The nucleation patch is denoted by the red circle.

simulating the earthquake with a finite-difference dynamic-rupture planar-fault model. The most important difference they found with respect to all precedent kinematic inversions is the strong variations of rupture velocity near the surface. When kinetic models suggest larger subshear rupture velocities in deep regions, dynamic rupture undergoes a supershear transition in the shallow fault zone along high prestressed regions. Basically what they did to set up the initial shear stress conditions was to determine the static stress change associated with the slip history found by Wald & Heaton, reverse its sign and add an homogeneous tectonic field of 50bar . The yield stress and the slip-weakening friction parameters were taken such that rupture propagates entirely with a total rupture time and final slip distribution in agreement with kinematic models. From these results, Madariaga & Olsen (2000) made a rough estimate of the fault energetic state before the Landers earthquake (see equation 2.35, page 165). Their results did not help them to justify the super-critical supershear episodes found by Olsen et al. since a global sub-critical state was revealed.

However, Peyrat et al. (2001) confirmed a local supershear transition on

rupture speed by improving the initial stress conditions via the inversion of near-field strong motions. All these works were performed using the fourth-order finite-difference dynamic rupture model introduced by Madariaga et al. (1998) which is based on the standard staggered grid (section 1.4.1.1) with a spatial grid step of $200m$. Despite of the intrinsic limitation discussed in section 4.2.7 of the SCEC code -comparison benchmark promoted by Harris & Archuleta (2004), it seems to be clear that FD methods describing the source as a thick fault zone are considerably more sensitive to model discretization than other numerical formulations, as those based on split-nodes or integral equations. As recently shown by Dalguer & Day (2006), solutions for that problem obtained with the method of Madariaga et al. are strongly affected in coarse grids ($\Delta x \gtrsim 50m$). One of the most important consequence is the delay of the rupture front with propagation distance. Consequently, since frictional parameters (*i.e.* the yield stress and the slip-weakening critical distance) used in the aforementioned studies were chosen such that the total rupture time and slip distribution was in agreement with kinematic models, we may suppose these values to be biased. On the other hand, the Landers earthquake took place in a complex fault system where rupture transfer occurred through jogs and kinks (thick line, Figure 4.46). Given that this kind of geometrical complexities have important implications in rupture propagation and seismic radiation (Vilotte et al., 2005, Madariaga & Ampuero, 2005, Adda-Bedia & Madariaga, 2005) the planar fault hypothesis made in the above mentioned studies is difficult to support. Investigations of this event performed with geometrically flexible methods have revealed the importance of fault geometry when considering an external tectonic and depth-dependent lithostatic loads. Applying the BIE method, Aochi & Fukuyama (2002) have shown that rupture complexity in terms of slip distribution and rupture propagation pattern may be obtained by neglecting the residual stress associated with past events and by considering homogeneous friction parameters in the along-strike direction provided that the real fault geometry is respected. On the other hand, using a finite element approach, Cianetti et al. (2005) computed the static deformations associated with Coulomb frictional dislocations produced by external loads. They found that final slip distribution is strongly affected by fault geometry and by the elastic crustal structure.

So the question we addressed in the present work is to see if the initial stress distribution used by Peyrat et al. (2001, Figure 4.47) in a planar fault is compatible with the nonplanar Landers earthquake geometry. For doing this, we have simulated the dynamic rupture of this earthquake along a fault with realistic geometry starting from the aforementioned initial shear stress and compared the final slip distribution with that obtained by Wald & Heaton (1994). Firstly, we have discretized the fault geometry used by Aochi & Fukuyama (2002, thick line in Figure 4.46) within the 1D layered medium of Table 4.10, as shown in Figure 4.44. The model was bounded by a flat-free-surface boundary condition at the top (see Figure 1.16 on page 87) and by PML absorbing boundaries in the rest of its external limits (see section 1.5.2). Then we have computed the three-dimensional static stress field associated with the initial shear stress distribution inverted by Peyrat et al. For this we used our FDBE model simply by imposing simultaneously such stress conditions all along the rupture surface until the seismic waves disappear due to the PML absorbing boundaries. We considered a FD grid with spatial step $\Delta x = 120m$ and temporal step $\Delta t = 0.011s$. The component τ_{xy} of the resultant three-dimensional static stress tensor is shown in Figure 4.45. We see a strong asymmetry of the stress field with respect to the rupture surface as well as low-order stress singularities associated with fault kinks (Adda-Bedia & Madariaga, 2005). Once computed our initial 3D stress field, rupture propagation could be initiated. So we considered a small circular patch $4km$ length where the along-strike shear stress starts dropping following the friction law described in section 4.2.6.1 except that for a constant yield stress and dynamic friction respectively equal to $\tau_u = \sigma\mu_s = 123bar$ and $\tau_s = \sigma\mu_d = 0bar$, and with a critical

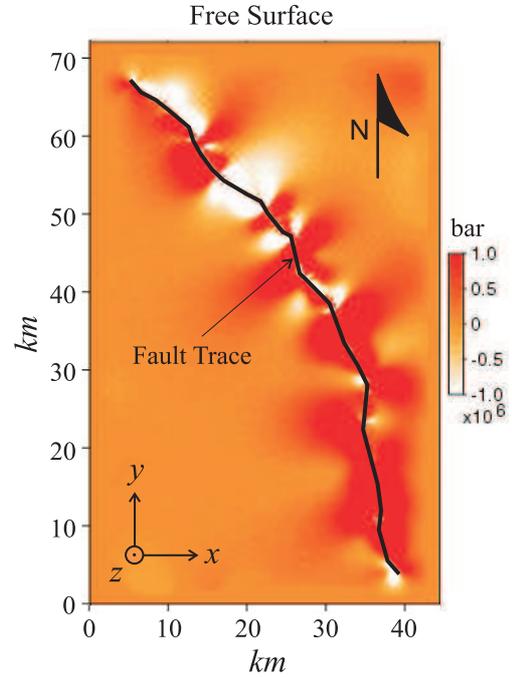


FIG. 4.45: 3D initial stress field (component τ_{xy}) in the free surface before the 1992 Landers earthquake determined from the 2D shear stress used by Peyrat et al. (2001) (Figure 4.47). The fault trace is depicted by the thick line.

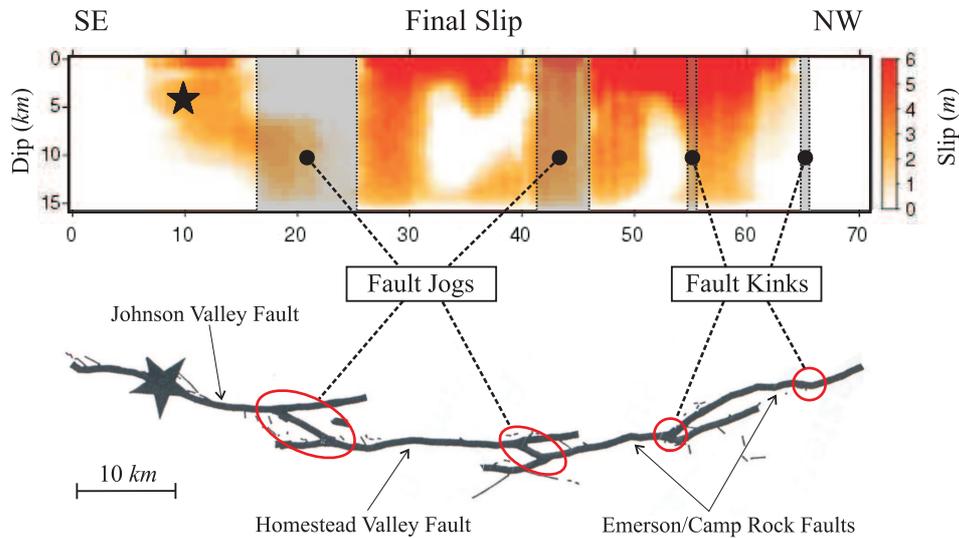


FIG. 4.46: Final slip computed with the FDBE method along the nonplanar fault geometry of Figure 4.44 with the 3D initial stress field shown in Figure 4.45. Fault trace (thick line) used to discretize the rupture surface (after Aochi & Fukuyama, 2002). The stars indicate the hypocenter location.

time-weakening $t_c = 0.6s$ (Andrews, 2004). The yield stress value is slightly smaller than that considered by Peyrat et al. ($125bar$, and slightly higher than that used by Olsen et al. (1997) equal to $120bar$) in order to allow rupture to propagate beyond the jog joining the Johnson and Homestead Valley faults. Final slip is shown in Figure 4.46. As we can see there, rupture was unable to break that *geometrical barrier* so it should jump by letting behind a huge blinded fault zone. If we look at the initial shear stress on that sector (Figure 4.47) we find a very low stress level which explains, together with the fault inflexion, this unexpected rupture behavior. Once rupture reached the Homestead Valley fault, it propagates toward the surface very quickly at a supershear velocity (not shown). Thirty kilometers from the initiation point, rupture encounters a second jog which should transfer fault motion to the last earthquake segment, the Emerson/Camp Rock faults. In that point begins the high stressed asperity which should produce, after both Wald & Heaton and Peyrat et al. slip final solutions, the largest slip patch. However, between $40 - 50km$ from the left extremity we only find moderate dislocations below $5km$ ($\lesssim 3m$). This may be explained by the presence of the huge antiasperity just before the fault jog (southward direction), where rupture run out of energy preventing it to overcome easily the *geometrical barrier*

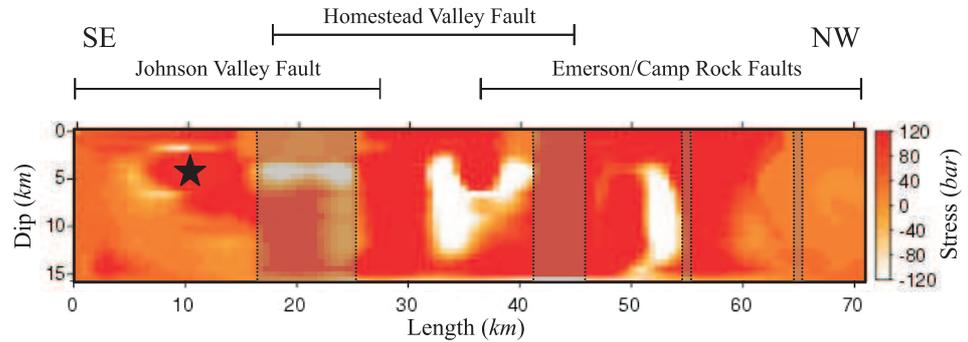


FIG. 4.47: Initial 2D shear stress determined by Peyrat et al. (2001) and used to compute the 3D static field shown in Figure 4.45. Gray regions delimit the principal *geometrical barriers* (*i.e.* jogs and kinks) pointed out in Figure 4.46. The star indicates the hypocenter location.

(*i.e.* the jog). Finally, the same argument may be used to explain why rupture stops little after the first major kink without reaching the total expected length ($\sim 70\text{km}$).

The comparison of our final slip distribution with that obtained by Wald & Heaton reveals an important deficit of seismic moment on our rupture model. Globally, the fault sectors where slip is underestimated are clearly related with changes in fault geometry (Figure 4.46). Thus these geometrical changes act as *geometrical barriers* preventing rupture to propagate in the same manner it does along a planar fault surface. These results suggest that the initial shear stress determined from the slip history on a planar fault is biased to compensate the absence of *geometrical barriers*. In other words, when rupture encounters a change on fault geometry (*i.e.* a kink) there is a loss of energy (radiated as seismic waves) which may be locally compensated to allow rupture to continue. One possible way is to increase the available elastic energy by introducing an asperity. The other way is to decrease the fracture energy by adjusting the constitutive friction parameters. So this compromise between the fault geometry and the initial fault conditions makes necessary to integrate realistic fault geometries when modeling the dynamics of earthquakes.

As mentioned before, results presented in this section should be recomputed with the FDBE program introduced in section 4.2 in order to give a quantitative assessment to our simulations. Simulations should also be launched with a smaller grid size to minimize discretization effects. On the other hand, given the friction law we used in our rupture model, the breakdown slip was determined dynamically so fracture energy was not prestablished as

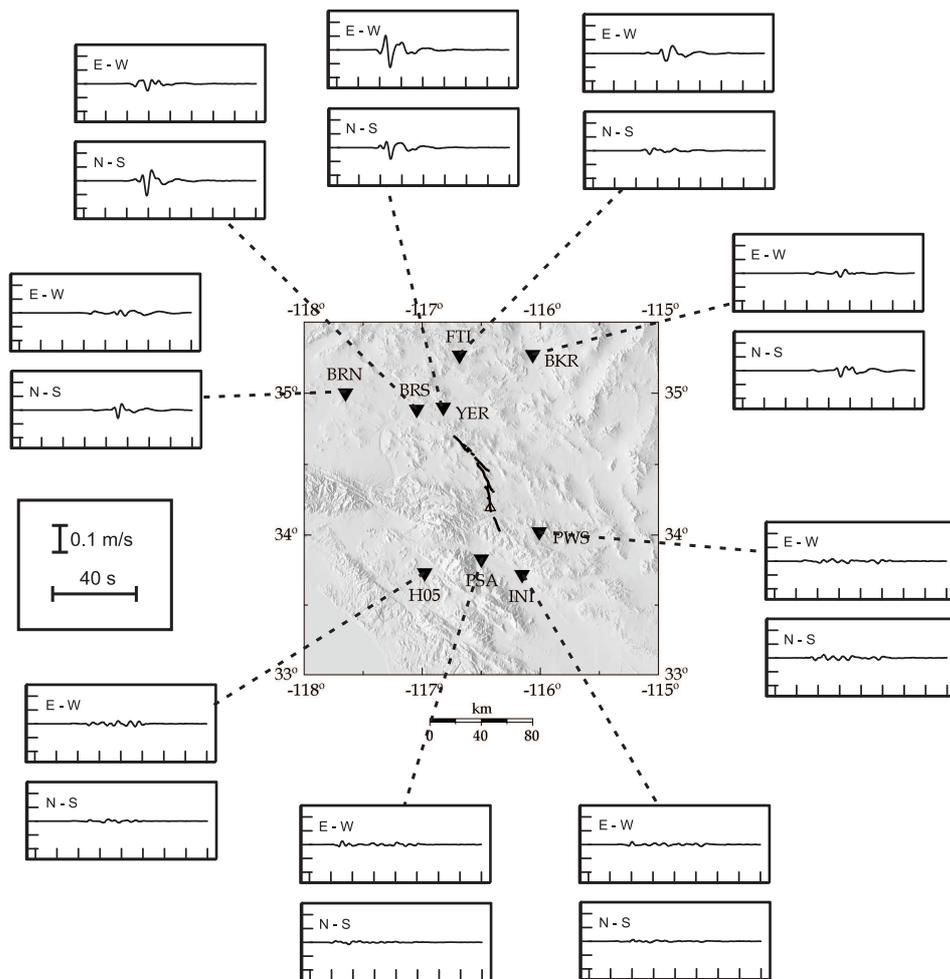


FIG. 4.48: Synthetic velocigrams for the Landers earthquake (Figure 4.44) computed with an homogeneous initial stress field. Halfspace with properties of the third layer shown in Table 4.10. Bandpass filter : $0.07 < \omega < 0.33H_z$.

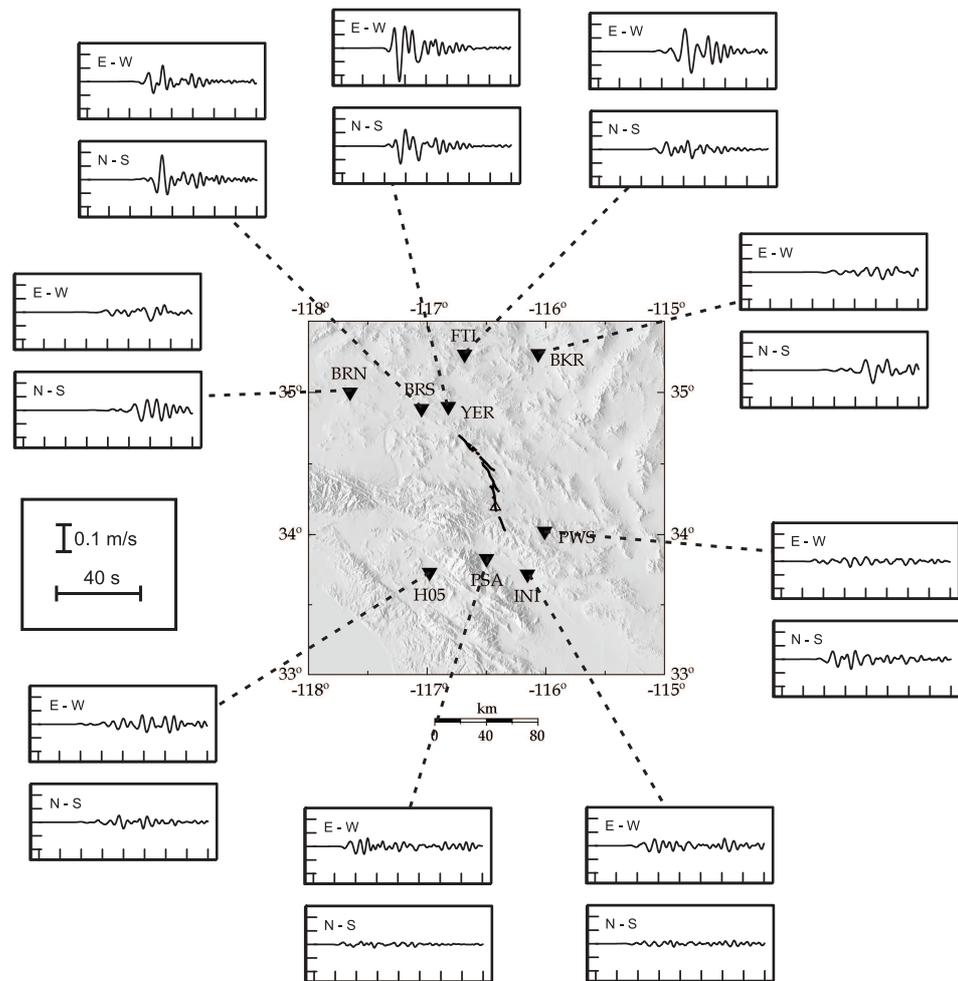


FIG. 4.49: Synthetic velocigrams for the Landers earthquake (Figure 4.44) computed with an homogeneous initial stress field. Layered medium shown in Table 4.10. Bandpass filter : $0.07 < \omega < 0.33Hz$.

it was the case of simulations performed by Olsen et al. (1997) and Peyrat et al. (2001). The slip-weakening mechanism should also be tested. Finally, Figures 4.48 and 4.49 present seismograms computed in different sites where seismological stations recorded the ground motion of the Landers earthquake (see Peyrat et al., 2001). In the first one rupture happened in an homogeneous halfspace and in the second one within a layered medium (see figure captions). They were obtained in a coarse FD grid ($\Delta x = 300m$) with small 8-point-cubes source-boundary-elements (Cruz-Atienza et al., 2004b, section 4.1.2 of this document) with an homogeneous initial stress field and friction parameters, so we do not expect them to fit data. Nevertheless, two interesting things should be pointed out : 1) a strong directivity effect is clearly seen since much more larger amplitudes and shorter signals are found in the northern sites, and 2) waveform complexity is extremely increased when rupture took place inside an heterogeneous medium. Of course the latter is mainly a wave propagation effect. However, inspection of the slip-rate history along the rupture surface revealed significantly larger amplitudes and a slower rupture velocity along the superficial layer producing longer rupture times (not shown). Very important effects on rupture propagation and excited wavefield due to elastic heterogeneities have also been found in section 3.6.1 (Figures 3.15 and 3.16 on page 200). Consequently, the assessment of the crustal structure effects on rupture propagation and thus in excited wavefield along big faults seem to be a fundamental research topic.

Conclusion Générale

NOUS avons construit un *modèle numérique en différences finies* capable de simuler la rupture dynamique de *failles non-planaires* (*i.e.* curvilignes) en deux (2D) et trois dimensions (3D).

Ces simulations sont effectuées sur une grille de calcul en différences finies *partiellement en quinconces* (GPQ), dans laquelle le vecteur de vitesse et le tenseur des contraintes sont placés indépendamment en deux points de l'espace séparés d'un demi-incrément de la grille dans les trois directions cartésiennes. Cette propriété de la grille est un facteur très important pour l'application des conditions de frontière sur la faille. La mise au point des conditions aux limites de radiation « *Perfectly Matched Layer* » a été réalisée en 2D et 3D avec une absorption presque parfaite des ondes dans les bords du modèle. Ces conditions permettent de considérer des grilles les plus petites possible pour simuler la rupture dynamique avec précision sans l'influence des limites externes du domaine de calcul. Cet outil que j'ai élaboré était indispensable pour résoudre le problème scientifique que je devais étudier.

Une nouvelle définition des conditions de frontière associées à la fracturation dynamique représente la contribution originale de mon travail. La source est constituée d'éléments dits de frontière. Ces éléments sont composés de nœuds de contraintes disposés d'une manière particulière de façon à avoir une solution locale la plus précise possible. Le tenseur de contraintes à l'intérieur de chaque élément est formulé dans un repère local orienté selon le vecteur normal à la surface de rupture. Cette transformation permet de connaître les tractions normales et tangentes localement pour une orientation arbitraire de la faille. Il est possible alors d'imposer la chute des contraintes cisailantes correspondant aux conditions aux limites que l'on veut vérifier. Ces mêmes conditions sont appliquées pour tous les nœuds de chaque élément de frontière. Cette méthode de résolution a été ainsi dénommée approche FDBE, acronyme de son appellation anglaise « *finite-difference boundary-element* ».

La structure des éléments de frontière joue un rôle fondamental dans l'évaluation de la contrainte au voisinage de la source. La configuration qui permet

de résoudre le mieux la singularité associée à la fracturation est celle pour laquelle aucun bras du stencil, nécessaire pour dériver le champ de vitesse à l'extérieur d'un élément, ne pénètre l'élément. A trois dimensions, la forme géométrique qui remplit cette condition est un octaèdre avec des axes majeurs parallèles aux axes cartésiens. Cependant, cette configuration pose deux problèmes. D'une part, discrétiser une surface non-planaire avec un ensemble d'octaèdres représente un problème topologique qui semble impossible à résoudre. D'autre part, l'évaluation du glissement dans cette configuration est sous-estimée. La structure des éléments de frontière qui permet le meilleur compromis entre résolution de la singularité et flexibilité géométrique nécessaire pour décrire une faille non-planaire, est un parallélépipède tourné de 45° par rapport à l'un des axes de référence. La méthode développée est restreinte à des failles avec une dimension invariante à la translation (*e.g.*, des failles verticales non-planaires).

L'évaluation des paramètres cinématiques de la faille (*i.e.* le glissement ou bien sa dérivée temporelle) est possible grâce à l'utilisation de fonctions de pondérations appliquées sur les nœuds de vitesse situés immédiatement à l'extérieur des éléments de frontière. Ces fonctions sont telles que ces paramètres à évaluer deviennent indépendants de l'orientation de la faille par rapport à la grille numérique. Une bonne évaluation de ces paramètres est importante, notamment lorsqu'ils interviennent dans la loi constitutive d'affaiblissement sur la faille, comme dans le cas de la « loi d'affaiblissement suivant le glissement ».

La précision du modèle FDBE est gouvernée par une loi d'échelle qui relie le pas de discrétisation spatial avec le nombre de points à l'intérieur des éléments. Plus le nombre de points est grand, plus le pas de la grille peut diminuer et la précision numérique augmenter. A défaut d'un nombre suffisant de nœuds, le raffinement progressif de la grille peut provoquer des interactions destructives entre les éléments et détériorer l'estimation des paramètres cinématiques de la faille. Cependant, quand on effectue de grandes simulations 3D, la puissance des ressources informatiques est un facteur qui limite le raffinement de la grille de calcul. Ceci signifie que des éléments de frontière contenant un nombre relativement faible de nœuds permettent d'atteindre une bonne précision numérique en 3D.

L'analyse de convergence du modèle FDBE 3D, réalisée en terme de l'incrément spatial de la grille Δx et de la distance critique d'affaiblissement δ_c , montre que le paramètre de résolution de la zone de cohésion, N_c , varie considérablement à l'intérieur du domaine exploré. N_c augmente rapidement lorsque $\Delta x \lesssim 70m$ et $\delta_c \gtrsim 0.4m$. J'ai montré que des valeurs de N_c plus grand que 4 donnent des simulations correctes. Augmenter le nombre de points dans

cette zone n'est plus un facteur prépondérant dans la précision du schéma. L'accroissement de la précision passe essentiellement par le choix de Δx et du nombre de nœuds à l'intérieur des éléments de frontière, une fois que la valeur N_c de 4 est atteinte. Malheureusement, cette valeur seuil ne peut être vérifiée qu'*a-posteriori*.

La comparaison des résultats avec deux méthodes indépendantes² dans le cadre de la rupture spontanée de failles planes et non-planaires, a permis de valider l'approche FDBE 3D. Des bon résultats ont été obtenus dans tous les cas de géométrie avec $\Delta x = 50m$. Pour les failles planes, ce pas de discrétisation est fin comparé à ceux utilisés par d'autres méthodes en DF qui explicitent la symétrie du problème. Pour les failles non-planaires, mes résultats sont originaux puisqu'il s'agit, à ma connaissance, de la première comparaison numérique 3D réussite pour la rupture spontanée de failles non-planaires (curvilignes). Le problème proposé pourrait servir de base pour l'évolution future d'autres exercices de comparaison qui sont en cours de réalisation ailleurs dans le monde (*i.e.* au SCEC en Californie ou bien au ETH à Zurich). Par conséquent, je n'ai pas de références sur les choix numériques possibles des autres méthodes en DF pour ce cas géométriquement complexe. J'ai pu valider mes résultats avec une approche en équations intégrales en obtenant un accord excellent en terme des temps de rupture et de la vitesse de glissement. Certaines simulations pour des failles planes présentent des différences explicables selon moi par le fait que le nombre d'éléments dans la zone de cohésion frôle la valeur 3 en dessous de mon critère de validité. En raison des limitations informatiques, j'ai accepté ces solutions car elles montrent les mêmes comportements que celles obtenues par les autres méthodes.

Fort de cette capacité à modéliser la rupture dynamique des faille non-planaires, j'ai analysé l'influence du chargement statique encastrant provenant d'un possible scénario tectonique autour de la source. J'ai montré sur un exemple de failles de forme parabolique avec une courbure de plus en plus prononcée que l'état de chargement tectonique initial influence fortement l'évolution temporelle de la rupture. Il est même possible d'avoir presque un arrêt spontané de la rupture sans faire appel à des changements des paramètres constitutifs de frottement.

J'en conclus que la géométrie et l'état de contrainte initial sont deux facteurs clefs de la rupture dynamique à inclure à côté des paramètres intervenant dans le cadre d'une loi constitutive spécifique, comme pourraient

²Les résultats ont été comparés avec la méthode en DF « *traction-at-split-node* » pour le problème d'une faille plane correspondant au Problème Version 3 de l'exercice de comparaison proposé par Harris & Archuleta (2004), ainsi qu'avec la méthode intégrale de frontière (BIE) introduite par Aochi et al. (2000b) dans le cas de failles non-planaires.

l'être à la fois les coefficients de frottement (statique et dynamique) et la distance d'affaiblissement, qui s'avèrent nécessaires dans les simulations. Il faudra donc pouvoir définir ces derniers dans des illustrations réalistes pour des tremblements de terre donnés.

Pour cela, j'ai abordé une première étude pour le séisme de Landers (1992, $M_W = 7.3$) où la géométrie pouvait être déduite des traces de surface. Grâce aux travaux antérieurs, l'état de contrainte initial sur la faille ainsi que les frottements statique et dynamique, ont été évalués pour une faille plane : ingrédients indispensables pour nos simulations. J'ai fait l'hypothèse selon laquelle ces paramètres étaient les mêmes sur la faille non-planaire définie, et j'ai réalisé des modélisations montrant des effets importants associés à la géométrie complexe de la faille. Ces résultats sont susceptibles de remettre en question les valeurs des paramètres physiques issues des estimations précédentes obtenues sans tenir compte de la vraie géométrie de la faille, même que j'ai utilisées comme conditions initiales dans mes simulations.

De façon à fournir la donnée essentielle pour contraindre les simulations dans le futur, j'ai calculé les sismogrammes aux stations ayant enregistré le séisme à la fois pour un demi-espace et pour un milieu stratifié. Dans le cas du milieu stratifié, la complexité des sismogrammes simulés est considérablement accrue. Bien entendu, ceci est principalement une conséquence d'un effet de propagation des ondes. Cependant, comme on a pu le constater, la complexité des sismogrammes provient aussi des différences dans l'histoire de la rupture, résultant des hétérogénéités du milieu. On peut donc souligner aussi l'importance du milieu encaissant.

L'ensemble de ces simulations montre le rôle prépondérant que jouent certains paramètres géométriques et physiques lors de la rupture dynamique des séismes. Les méthodes des différences finies permettent, si elles sont utilisées avec soin, de modéliser avec précision des ruptures dynamiques complexes en dépit des caractères non-linéaires de l'évolution temporelle du phénomène. Ce manuscrit en fait la démonstration.

Annexes

Annexe A

Opérateurs 2D à l'Ordre 4

Saenger et al. (2000) have expressed the partial differential operators D_x and D_z in terms of two other finite-differences operators applied along the main axis of a 45° rotated frame of reference. According to this new definition, I have used the following fourth-order spatial differential operators all over the chapter 3 of this thesis :

$$\begin{aligned}
D_x(f_{ij}) &= \frac{1}{2h} \left[a_0 \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - a_1 \left(f_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} \right) \right] \\
D_z(f_{ij}) &= \frac{1}{2h} \left[a_0 \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - a_1 \left(f_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - f_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} + f_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.1}$$

where $a_0 = 9/8$, $a_1 = 1/24$ and h is the FD spatial increment.

Annexe B

Systeme d'Equations 3D en DF à l'Ordre (2,4)

Si l'on prend les approximations du vecteur de vitesse et du tenseur de contraintes, respectivement

$$\mathbf{V}_{i,j,k}^n \approx \mathbf{v}(x_i, y_j, z_k, t_n)$$

et

$$\Sigma_{i,j,k}^n \approx \boldsymbol{\tau}(x_i, y_j, z_k, t_n),$$

le système d'équations hyperboliques données par la formulation en vitesse-contraintes 1.82 peut être approximées à l'ordre $O[(\Delta t)^2, h^4]$ en utilisant les opérateur spatiaux 1.101 de la manière suivante.

Composante v_x du vecteur de vitesse :

$$\begin{aligned} \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} &= \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{4h} \left[\frac{1}{\rho} \right]_{i,j,k} & (B.1a) \\ & \left\{ c_1 \left(\left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \right. \right. \\ & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\ & \left. \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \right) + \\ & c_2 \left(\left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xx} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n \\
 & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \\
 & \left. \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n \right) \Bigg\}.
 \end{aligned}$$

Composante v_y du vecteur de vitesse :

$$\begin{aligned}
 \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} &= \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{4h} \left[\frac{1}{\rho} \right]_{i,j,k} \quad (B.1b) \\
 & \left\{ c_1 \left(\left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \right. \right. \\
 & \left. \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \right. \\
 & \left. \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \right. \\
 & \left. \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \right. \\
 & \left. \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \right. \\
 & \left. \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \right. \\
 & \left. \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \right. \\
 & \left. \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \right) \Bigg\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n + \\
& \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^n - \\
& \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n + \\
& \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^n - \\
& \left. \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n \right) + \\
c_2 & \left(\left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \right. \\
& \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n + \\
& \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \\
& \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xy} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \\
& \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \\
& \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \\
& \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n - \\
& \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{yy} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n + \\
& \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n - \\
& \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n + \\
& \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n - \\
& \left. \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n \right) \}.
\end{aligned}$$

Composante v_z du vecteur de vitesse :

$$\left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{4h} \left[\frac{1}{\rho} \right]_{i,j,k} \quad (\text{B.1c})$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ c_1 \left(\begin{aligned}
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n + \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \right) + \\
 & c_2 \left(\begin{aligned}
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{xz} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n - \\
 & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2},k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{3}{2}}^n -
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{yz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n + \\ & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n - \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n - \\ & \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{3}{2}, k-\frac{3}{2}}^n + \left[\Sigma_{zz} \right]_{i-\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}, k+\frac{3}{2}}^n \end{aligned} \right\}.$$

Composante τ_{xx} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned} \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{xx} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda + 2\mu]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1d}) \\ & \left\{ c_1 \left(\left[V_x \right]_{i+1, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i, j, k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ & \quad \left[V_x \right]_{i+1, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left[V_x \right]_{i+1, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left. \left[V_x \right]_{i+1, j, k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & c_2 \left(\left[V_x \right]_{i+2, j+2, k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1, j-1, k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \quad \left[V_x \right]_{i+2, j+2, k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1, j-1, k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left[V_x \right]_{i+2, j-1, k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1, j+2, k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left. \left[V_x \right]_{i+2, j-1, k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1, j+2, k+2}^{n+\frac{1}{2}} \right) \left. \right\} + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \\ & \left\{ c_1 \left(\left[V_y \right]_{i+1, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i, j, k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ & \quad \left[V_y \right]_{i+1, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \quad \left[V_y \right]_{i+1, j, k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i, j+1, k}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \quad \left. \left[V_y \right]_{i+1, j, k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i, j+1, k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\
 c_2 & \left(\left[V_y \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left. \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Big\}.
 \end{aligned}$$

Composante τ_{yy} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned}
 \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{yy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda + 2\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1e}) \\
 & \left\{ c_1 \left(\left[V_y \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \right. \\
 & \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_y \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left. \left[V_y \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \left(\left[V_y \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\
& \quad \left[V_y \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \quad \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \quad \left. \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} \right) \left. \right\} + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \\
& \left\{ c_1 \left(\left[V_x \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \right. \\
& \quad \left[V_x \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_x \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_x \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \quad \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\
& c_2 \left(\left[V_x \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\
& \quad \left[V_x \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_x \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_x \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \quad \left. \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \right)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}.$$

Composante τ_{zz} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned} \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{zz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda + 2\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1f}) \\ & c_1 \left(\left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \\ & \quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \quad \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & c_2 \left(\left[V_z \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \\ & \quad \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & \quad \left. \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} \right) \left. \right\} + \frac{\Delta t}{4h} [\lambda]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \\ & \left\{ c_1 \left(\left[V_x \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ & \quad \left[V_x \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left[V_x \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left[V_x \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \left. \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[V_y \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \left[V_y \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \Big) + \\
c_2 \Big(& \left[V_x \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_x \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_x \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_x \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_y \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_y \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} \Big) \Big\}.
\end{aligned}$$

Composante τ_{xy} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned}
\left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{xy} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1g}) \\
& \left\{ c_1 \left(\left[V_x \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \right. \\
& \left[V_x \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \left[V_x \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \left[V_x \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left. \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[V_y \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_y \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \Big) + \\
 c_2 & \left(\left[V_x \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \left[V_x \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_x \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_x \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left. \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Big\}.
 \end{aligned}$$

Composante τ_{xz} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned}
 \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{xz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (B.1h) \\
 & \left\{ c_1 \left(\left[V_x \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \right. \\
 & \left[V_x \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_x \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_x \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \Big) + \\
c_2 \Big(& \left[V_x \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \left[V_x \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_x \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_x \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \left[V_x \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_x \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \left. \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Big\}.
\end{aligned}$$

Composante τ_{yz} du tenseur de contrainte :

$$\begin{aligned}
\left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[\Sigma_{yz} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{4h} [\mu]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1i}) \\
& \left\{ c_1 \left(\left[V_y \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \right. \\
& \quad \left[V_y \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_y \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \quad \left[V_y \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left[V_z \right]_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
& \quad \left. \left[V_z \right]_{i+1,j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[V_z \right]_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i,j+1,k+1}^{n+\frac{1}{2}} \Big) + \\
 c_2 & \left(\left[V_y \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_y \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_y \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \\
 & \left[V_z \right]_{i+2,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[V_z \right]_{i-1,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k+2}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & \left. \left[V_z \right]_{i+2,j-1,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + \left[V_z \right]_{i-1,j+2,k+2}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Big\}.
 \end{aligned}$$

Dans ces équations $c_1 = 9/8$ et $c_2 = -1/24$. Les termes entre crochets sont des fonctions discrètes dans les points de la grille indiqués par l'indice supérieur (indice temporel) et les indices inférieurs (indices spatiaux) à droite des crochés.

Annexe C

Valorisation de Compétences

Sommaire

C.1	Cadre général et enjeux de la thèse	333
C.1.1	Présentation du projet de thèse	333
C.1.2	La thèse dans son contexte	334
C.1.3	Moi dans ce contexte	335
C.2	Déroulement, gestion et coût du projet	336
C.2.1	Préparation et cadrage du projet	336
C.2.2	Conduite du projet	337
C.2.3	Evaluation et prise en charge du coût du projet	339
C.3	Compétences, savoir-faire, qualités professionnelles et personnelles.	340
C.4	Retombés et perspectives de la thèse	342

C.1 Cadre général et enjeux de la thèse

C.1.1 Présentation du projet de thèse

Cette thèse, intitulée « rupture dynamique des failles non-planaires en différences finies », aborde un sujet fondamental de la sismologie : la physique de la rupture d'un séisme. Autrement dit, l'origine des ondes qui atteignent la surface de la Terre, les indices qui pourraient certainement un jour nous permettre de cerner le moment de la cassure.

Modéliser la rupture d'un séisme dans des conditions réalistes représente un problème difficile. Depuis trente ans, les sismologues développent des approximations numériques afin d'accéder aux réponses du problème. Je rappelle que les séismes sont la conséquence de processus physiques complexes. Les forces qui agissent à l'intérieur de notre planète, ainsi que les propriétés des roches qui la constituent, sont les principaux acteurs de l'épisode sismique. La question qui se pose aujourd'hui est de savoir quels autres paramètres physiques pourraient être déterminants dans la rupture d'un séisme ?

Le but plus général de la thèse a été le développement d'un modèle numérique permettant la simulation de la rupture de failles ayant une géométrie non-planaire, voire réaliste. L'outil de modélisation développé permet donc d'étudier l'influence de la géométrie des failles dans la rupture des séismes. Cependant, il permet aussi de propager les ondes générées à travers des milieux arbitrairement hétérogènes jusqu'à la surface de la Terre qui peut, en même temps, avoir une géométrie adaptée à la topographie du terrain. Ces

trois éléments mis ensemble, la géométrie de la faille, les propriétés du milieu de propagation et la topographie de la surface de la Terre, déterminent fortement la nature des ondes. Avec l'outil numérique développé, au-delà des simulations de la rupture de failles de géométrie réaliste, il est donc possible de simuler aussi le mouvement du sol dû aux ondes incidentes et de quantifier les valeurs d'accélération maximale dans des sites peuplés. Ce genre de mesure a comme but d'établir ou d'améliorer les normes de construction parasismiques afin de diminuer le nombre de victimes et les dégâts matériels lors de l'occurrence de grands séismes.

C.1.2 La thèse dans son contexte

L'unité mixte de recherche « Géosciences Azur », dans laquelle j'ai réalisé ma thèse, est constituée de quatre équipes de recherche. Mon projet s'est déroulé dans le cadre de l'équipe « déformation active, rupture et ondes » (DRO). Les intérêts scientifiques de l'équipe se trouvent dans l'analyse de la déformation active de la croûte terrestre, l'imagerie de son intérieur, la source des séismes, et les effets de la structure de la croûte dans la propagation des ondes. Ainsi, les outils numériques que j'ai développés répondent bien aux intérêts de l'équipe. D'une part, concernant le volet propagation d'ondes, j'ai apporté une approche 3D en différences finies permettant de propager le champ complet d'ondes dans des milieux arbitrairement hétérogènes avec une surface libre de topographie quelconque. D'autre part, concernant le volet source sismique, ces modèles représentent les seuls outils dans l'équipe capables de simuler la rupture dynamique de failles ayant une géométrie réaliste en présence d'hétérogénéités dans le milieu.

Les travaux de recherche de l'équipe DRO sont réalisés en collaboration avec plusieurs laboratoires universitaires français (Montpellier, Orsay, Chambéry, Grenoble, Brest, Strasbourg, Paris, Toulouse) et étrangers (DISTER (Gênes), Naples, UNAM (Mexico), Irkutsk (Russie), UTIG (Austin), UCSD (San Diego), UCLA (Los Angeles), UC (Santiago), ING (Rome) ETH (Zürich)), avec le CEA, le LDG, le CETE Méditerranée, l'IPSN, l'IGN, le BRGM, et des entreprises ACRI, AGEODAGIS...

Au niveau international, depuis environ cinq ans il y a eu une renaissance de l'intérêt des sismologues pour l'étude de la rupture dynamique de failles en raison de l'accroissement de mesures. Dans ce contexte, les outils numériques développés pendant ma thèse ont été répertoriés dans la bibliographie comme étant les premiers capables de simuler la rupture de failles non-planaires en différences finies. C'est-à-dire, probablement comme les plus efficaces numériquement en ce moment pour réaliser ces type de simulations complexes.

La validation des codes de rupture dynamique en 3D est devenue depuis 2003 une priorité dans le monde entier. Des comparaisons entre différentes approches numériques 3D constituent le seul moyen de réussir cet objectif. C'est le « benchmark » proposé par le SCEC (« Southern California Earthquake Center ») et le USGS (« United States Geological Survey ») (Harris & Archuleta, 2004) qui a permis aux différentes équipes internationales de travailler en même temps sur le même problème. L'intérêt généralisé par ce sujet ainsi que la publication d'un grand nombre de travaux reliés, montrent l'énorme concurrence qui existe actuellement entre les laboratoires.

En raison du caractère théorique du projet, les ressources techniques nécessaires pour son déroulement ont été toujours à ma disposition : Un ordinateur personnel biprocesseur à 600 MHz (Linux/Windows), un cluster de six PC Linux biprocesseurs dont la plupart à 2,4 GHz, un serveur SUN 64 bits avec quatre processeurs (32 Go de mémoire vive chacun), ainsi que quelques centaines d'heures de calcul dans un supercalculateur vectorielle NEC SX-5 appartenant à l'IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique). Concernant les ressources humaines mises à la disposition du projet il y a eu treize personnes dont cinq au plan académique : Victor Manuel CRUZ ATIENZA, doctorant ; Jean VIRIEUX, Professeur de l'UNSA ; Stéphane OPERTO, chargé de recherche ; Hideo AOCHI, chargé de recherche du BRGM ; Sophie PEYRAT, post-doctorant. Le reste, concerne les services communs du laboratoire : Caroline RAMEL et Lionel MAURINO, ingénieurs informatiques ; Reine SAIGHI et Isabelle LAPASAT, secrétaires gestionnaires ; Sophie ROUSIERE, responsable administratif, Véronique PISOT, infographiste ; Suzanne MIFSUD et Isabelle MANEAU, documentalistes.

C.1.3 Moi dans ce contexte

Avant de commencer mon doctorat en France, pendant la formation de troisième cycle que j'ai suivi à Mexico pour obtenir le diplôme de maître en sciences (bac + 7, spécialité sismologie), j'étais déjà intéressé pour approfondir mes connaissances de la source sismique. En ayant abordé ce sujet d'un point de vue cinématique, l'étude des causes physiques du phénomène m'a semblé nécessaire afin de mieux le cerner. Pourtant, à l'époque je n'avais pas les idées claires par rapport au contenu et à l'orientation d'un éventuel projet dans ce domaine. C'est pendant le congrès de l'« American Geophysical Union » (AGU) à San Francisco en décembre 2000 que, suite au rendez-vous fixé grâce au Dr. Françoise COURBOULEX, membre de l'équipe DRO, j'ai rencontré pour la première fois celui qui deviendrait par la suite mon direc-

teur de thèse, le Prof. Jean VIRIEUX. C'est à ce moment qu'on a établi le thème central du projet : modélisation numérique de la rupture dynamique des séismes. La réunion suivante a eu lieu quatre mois après en France, dans les murs du laboratoire Géosciences Azur à l'occasion du congrès de la « European Geophysical Society ». C'est là que nous avons discuté plus en détail les enjeux d'un tel sujet. Ce n'est qu'à mon arrivée définitive en France en septembre 2001 qu'on démarrera formellement le projet. Suite à une série de réunions, la stratégie initiale a été tracée vis-à-vis des méthodes développées à l'époque par l'ensemble des potentiels participants à ce projet. Au départ nous étions quatre personnes. Jean VIRIEUX, Stéphane OPERTO, Bernard HUSTEDT et moi-même. Au bout de quelques mois, nous avons réalisé que l'adaptation des méthodes développées principalement par OPERTO et HUSTEDT, ne représentait pas la meilleure stratégie pour démarrer le projet. C'est à partir de ce moment que l'interaction avec eux deux est devenue sporadique et que le projet a été mené donc par Jean VIRIEUX et moi-même.

C.2 Déroulement, gestion et coût du projet

C.2.1 Préparation et cadrage du projet

Dans la recherche, toute démarche scientifique implique l'acceptation d'éventuelles circonstances imprévues. Lors de la structuration de ce projet, les connaissances et l'expérience acquise par Jean VIRIEUX grâce à ses travaux de recherche antérieurs, ont permis de démarrer sur des bases claires. Le défi était grand puisque le problème central du projet, la simulation de failles non-planaires en différences finies, n'avait jamais été résolu. Cependant les ressources informatiques et les techniques numériques avaient évolué considérablement par rapport à l'époque où mon tuteur avait abordé le problème de la rupture des séismes. Autrement dit, nous avions des éléments qui permettaient d'envisager des stratégies jamais testées. Pour assurer un meilleur déroulement du projet, nous avons adopté la méthode numérique des différences finies dans laquelle plusieurs chercheurs de l'équipe avaient une expertise. Ce choix a certainement permis de contourner les risques liés à l'assimilation d'un nouvel outil. Par ailleurs, en prévoyant le coût informatique que l'éventuel modèle 3D pourrait demander, des moyens de calcul suffisamment puissants ont toujours été à notre disposition.

Ce projet a été en grande partie financé par des moyens externes à l'équipe DRO. C'est le gouvernement du Mexique, à travers le Conseil National des Sciences et Technologie (CONACyT), qui a payé mon salaire, mes charges sociales et mes droits universitaires pendant toute la durée de la

thèse (quatre ans). En second plan, la Société Française d'Exportation des Ressources Educatives (SFERE) a suivi mon parcours doctoral et financé une partie des frais associés à un des congrès scientifiques auxquels j'ai participé. Tous les frais supplémentaires ont été pris en charge par des projets menés par Jean VIRIEUX dans le cadre de l'ACI catastrophes naturelles ou l'équipe DRO. La validation du modèle de rupture 3D a été réalisée en partenariat avec le BRGM à travers la collaboration du Dr. Hideo AOCHI.

C.2.2 Conduite du projet

Concrètement, j'ai développé le modèle de rupture 2D ainsi que les modèles de rupture et propagation d'ondes en 3D. En ce qui concerne leur conception, elle a été réalisée en collaboration avec mon tuteur, Jean VIRIEUX. Afin de valider le modèle de rupture 3D, Hideo AOCHI du BRGM à Orléans a modifié son approche numérique basée sur des équations intégrales pour permettre la comparaison de nos résultats. Toujours très pertinente et engagée, l'aide de Stéphane OPERTO, membre de l'équipe « Géomer » de notre unité de recherche, m'a permis d'avancer en toute sécurité. Par ailleurs, Sophie PEYRAT a participé dans la discussion préalable à la modélisation du séisme de Landers.

On peut diviser grossièrement en quatre étapes le projet. Pendant la première étape, qui a pris presque la totalité de la première année, il a fallu d'abord que j'assimile le problème et ses antécédents. Simultanément il a fallu aussi que j'implémente la source dynamique dans le code de propagation d'ondes 2D classique en différences finies conçu par Stéphane OPERTO. Même si la précision des résultats des simulations était largement supérieure à celle obtenue par des approches existantes, la stratégie suivie n'a pas permis d'atteindre l'objectif du projet : modéliser des failles avec une géométrie non-planaire. Il était nécessaire d'explorer d'autres voies.

Dans la deuxième étape j'ai modifié la façon de discrétiser les équations selon une nouvelle approche en différences finies proposée deux ans auparavant. Les atouts d'une telle stratégie ont permis de concevoir une autre façon de décrire numériquement la source sismique. Cependant, le chemin menant jusqu'à une solution satisfaisante a été long et tortueux. C'est au mois de juin 2003 que cette deuxième étape s'est finalisée avec la soumission d'un premier article introduisant formellement notre nouveau modèle de rupture dynamique en 2D. Sa performance a été illustrée dans le cas d'une faille courbe placée à l'intérieur d'un milieu hétérogène.

Le passage au 3D était incontournable. C'est dans la troisième étape que je l'ai réalisé, en commençant par la conception et la mise au point

du code de propagation d'ondes 3D, pour aboutir avec l'implémentation du modèle de rupture déjà introduit en 2D. Un volet remarquable d'un tel passage est la mise au point des conditions d'absorption d'énergie PML (« Perfectly Matched Layer ») dans les frontières externes du modèle. C'est-à-dire, l'implémentation d'astuces mathématiques permettant d'absorber les ondes sismiques sortant du modèle pour empêcher ainsi leur retour et simuler un milieu infiniment grand. Pourtant, les difficultés rencontrées pour valider l'approche 3D nous ont obligé à modifier certains aspects du modèle de rupture. Réussir cette validation a probablement représenté le passage le plus dur et pénible du projet. La rédaction de deux autres articles à la fin 2005, présentant le modèle 3D, sa validation et son application dans la rupture de failles curvilignes, va représenter la fin de l'avant dernière étape. Une telle application de notre modèle 3D a montré que l'évolution de la rupture d'une faille courbe en présence de forces tectoniques est fortement dépendante de la géométrie de la faille.

Une quatrième et dernière étape a consisté à modéliser le grand séisme de Landers, magnitude 7.3, dont la géométrie de la faille est particulièrement complexe. L'application de notre modèle dans un cas réel avait toujours été envisagée comme la clôture du projet. Cette étape cependant s'est chevauchée avec la précédente puisque avant de réussir la validation du modèle, j'avais déjà avancé considérablement dans l'analyse du séisme. Les résultats ont été présentés en décembre 2004 aux Etats Unies, suite à l'invitation que j'ai reçue pour le faire dans le cadre du congrès de la « American Geophysical Union ». La soutenance de thèse en mai 2006, après une période de plus de six mois de rédaction de cette thèse doctoral, a représenté la fin du projet.

L'encadrement du projet a eu lieu pendant les réunions entre mon tuteur et moi. Celles-ci se sont déroulées plus ou moins régulièrement en fonction des problèmes que je rencontrais, ou des suggestions et commentaires que l'on voulait partager. Jean VIRIEUX a toujours été présent pour m'aider académiquement et moralement. Souvent, les décisions ont été prises à partir de nos discussions. D'autre part, quand il a fallu travailler avec notre partenaire du BRGM, Hideo Aochi, une fois le lien avec lui établi par Jean VIRIEUX, l'interaction a eu lieu directement entre lui et moi.

Le sujet abordé dans le projet est un sujet délicat, difficile à étudier. Le soutien moral de mon tuteur a été déterminant pour l'avancé du projet. Pourtant, le fait d'être les deux seules personnes dans tout le laboratoire à réfléchir sur le problème en question n'a pas facilité la tâche. Le sentiment de solitude et désespoir devant le vaste et aride domaine de la création d'un modèle numérique pour la rupture des séismes a présidé des longues périodes de ma thèse. Il a fallu attendre la phase finale du projet pour que je réalise

l'intérêt que portaient plusieurs chercheurs d'autres laboratoires de France et de l'étranger sur mon travail et donc pour que ce sentiment s'estompe.

C.2.3 Evaluation et prise en charge du coût du projet

Les estimations présentées dans cette section ne sont qu'une approximation du coût réel de la totalité du projet. Ainsi, l'estimation du coût associé aux ressources humaines y compris les salaires, les charges sociales et les frais généraux de laboratoire est présenté dans le tableau suivant :

Catégorie	Effectifs	Coût horaires	Heures	Coût
Professeur	1	83,6 €	200	16720 €
Chargé de recherche	2	58,5 €	40	2340 €
Post-doctorant	1	39,5 €	16	632 €
Doctorant	1	*	10600	55000 €
Ingénieur informaticien	2	53,9 €	32	1725 €
Responsable administratif	1	46,5 €	15	689 €
Secrétaire gestionnaire	2	35,3 - 41,2 €	60	2295 €
Infographiste	1	35,3 €	20	706 €
Documentaliste	2	35,3 - 41,2 €	10	383 €
Total				80499 €

TAB. C.1: Coût du projet associé aux ressources humaines et infrastructure. (*) Le coût a été calculé à partir du salaire et charges sociales mensuels d'environ 1,000 € plus 15% des frais généraux de laboratoire.

Tel qu'il a été déjà dit, en raison du caractère théorique du projet, des ressources informatiques pour son déroulement ont été nécessaires. Il nous a fallu un ordinateur personnelle biprocesseur à 600 MHz (Linux/Windows), un cluster de six PC Linux biprocesseurs dont la plupart à 2,4 GHz, un serveur SUN 64 bits avec quatre processeurs (32 Go de mémoire vive chacun), et quelques centaines d'heures de calcul dans un supercalculateur vectorielle NEC SX-5 appartenant à l'IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique). Les coûts associés sont compris dans les frais généraux du laboratoire exposés dans le tableau C.1.

Dans le cadre du projet, j'ai participé à trois congrès en France : l'Ecole des Ondes, organisé par l'INRIA en 2001 à Paris ; la « EGS - AGU - EUG Joint Assembly » en 2003 à Nice ; et la « European Geosciences Union » en 2004 à Nice aussi. Egalement, j'ai participé à un « workshops » et à deux congrès à l'étranger : le « workshop » en « Numerical Modeling of Earthquake Source Dynamics » à Smolenice dans la république slovaque en 2003 ;

Annexe C. Valorisation de Compétences

Rubrique	Transport	Séjour	Inscription	Coût total
Congrès en France	150 €	250 €	600 €	1000 €
Congrès à l'Etranger	1800 €	1350 €	750 €	3900 €
Formations Doctorales	-	-	2500 €	2500 €
Total				7400 €

TAB. C.2: Coût du projet associé aux congrès et formations doctorales.

la « American Geophysical Union » à San Francisco aux Etats Unis en 2004 ; et la « European Geosciences Union » à Vienne, Autriche en 2006. Faisant partie de mon devoir doctoral, j'ai suivi une série de formations dans le cadre de l'école doctoral : les écoles thématiques « Instabilités Gravitaires et Mouvements de Versant » et « Ondes et Tomographie » ; ainsi que deux ateliers de professionnalisation, « Communication Scientifique en Anglais » et le séminaire « Doctoriales ». Le coût approximatif des ces diverses participation est résumé dans le tableau C.2.

Rubrique	Coût
Ressources humaines et infrastructure	80499 €
Congrès et formations	7400 €
Total	87899 €

TAB. C.3: Coût total du projet.

Les estimations globales des coûts partiels, ainsi que l'estimation du coût total dépensé tout le long de la réalisation de mon projet doctoral se trouve dans le tableau C.3.

C.3 Compétences, savoir-faire, qualités professionnelles et personnelles.

Ma formation dans le domaine de la sismologie a commencé en 1997, lorsque j'ai travaillé pendant deux ans dans le « Centro de Investigación Sísmica » (CIS) à Mexico, dans le cadre de la préparation de ma thèse pour obtenir le diplôme d'ingénieur (bac + 5), soutenue dans l'année 2000. C'est à ce moment que je découvris la recherche. Alors, j'ai développé des compétences dans la détermination de la structure crustale à partir de l'analyse de la dispersion des ondes superficielles et des fonctions de récepteur en appliquant deux méthodes d'inversion semi-globales : les algorithmes génétiques (AG) et le recuit simulé (RS). La maîtrise des deux méthodes d'inversion

m'a permis de concevoir une méthode hybride en tirant profit des avantages des AG et RS. Son application pour modéliser d'autres types de données géophysiques, comme des anomalies magnétiques et des sondages électriques, a été présentée lors des différents congrès aux quels j'ai participé.

Le désir d'approfondir mes connaissances dans la modélisation des fonctions de récepteur m'amènera à l' « Instituto de Geofísica » (IG) de la « Universidad Nacional Autónoma de México » (UNAM) où je réaliserai ma « Maestría en Ciencias » spécialité sismologie (bac + 7) dans l'année 2001, représentant la première partie de mes études de troisième cycle. C'est pendant ces deux ans que je me suis initié à la sismologie volcanique. La modélisation des explosions du volcan Popocatépetl m'a permis d'introduire une échelle de magnitude absolue ainsi qu'un système de détermination rapide des magnitudes des explosions du volcan (60 km de Mexico). Parallèlement, suite aux grands séismes intraplaque de Oaxaca et Tehuacán en 1999, j'ai pu assimiler l'analyse de l'imagerie cinématique de la source sismique. C'est grâce à la réflexion que j'ai entamée autour de ce sujet à l'époque, que j'ai voulu continuer l'étude de la source des séismes.

Voilà le parcours scientifique qui m'a amené jusqu'au choix de démarrer le projet doctoral. L'étude de la dynamique de la rupture des séismes m'a permis d'aborder aussi le monde des méthodes numériques. En ayant compris les bases conceptuelles du phénomène, il a fallu créer le modèle de rupture 2D à partir d'un code standard de propagation d'ondes en différence finies (DF). Pour cela j'ai dû assimiler le code, le faire évoluer et concevoir, en interaction avec mon tuteur, le nouveau modèle numérique. La structuration et mise au point du modèle de propagation d'ondes 3D a été pour moi une véritable preuve de rigueur et d'indépendance. La difficile tâche de validation du modèle de rupture 3D a été possible d'une part grâce à l'étroite relation que j'ai entretenue avec des chercheurs aux Etat Unis et à Paris. Je rappelle que le problème associé à la validation des codes similaires au mien est devenu aujourd'hui une priorité pour nombreux chercheurs. L'interaction avec des scientifiques du monde entier pendant les congrès et « workshops » internationaux où j'ai participé, m'a permis de bien communiquer les messages principaux issus de mon travail. Le réseau personnel que j'ai su construire ainsi que la valeur des résultats de mon travail ont mérités une reconnaissance internationale. La preuve en est que j'ai été invité à parler de mon travail dans d'autres laboratoires de France et de l'étranger (Etat Unies et Mexique).

Concernant mon intégration au sein de l'équipe DRO, pendant un an j'ai été responsable de l'animation et de l'organisation des réunions de discussions dites du « Groupe Imagerie », initiées en septembre 2003 par un

ensemble de doctorants et postdoctorants en présence de deux chercheurs, Jean VIRIEUX et Stéphane OPERTO. Afin d'enrichir les échanges et discussions, j'ai su impliquer plusieurs chercheurs du laboratoire dans nos réunions. D'ailleurs, plusieurs personnes internes et externes au laboratoire m'ont personnellement exprimés leurs avis très favorable par rapport à la dynamique et le choix du contenu des réunions.

Je pense qu'avoir mené mon doctorat de cette façon, bien entendu en ayant assimilé une culture et une langue différentes à celles de mon pays d'origine, le Mexique, est une grande preuve d'adaptabilité et d'indépendance. En même temps, ma créativité, ma capacité de synthèse et de communication oral et écrite se sont manifestées lors de l'invention du modèle de rupture, de la rédaction de plusieurs articles et de cette thèse, ainsi que pendant mes interventions publiques dans trois langues : espagnol, anglais et français.

C.4 Retombés et perspectives de la thèse

Les fruits de ce projet ont favorisé des interactions avec d'autres membres du laboratoire. Notamment des interactions à la fin de la thèse avec des chercheurs des équipes DRO et Géomer. D'une part, les modèles numériques développés dans ce projet, permettant la simulation de la rupture de séismes, ont ouvert une nouvelle voie vers l'analyse de la dynamique de la source sismique. D'autre part, le code de propagation d'ondes 3D permet d'avancer dans l'évaluation de l'aléa sismique d'important centre urbains du sud-est de la France situés dans un contexte tectonique actif.

Les perspectives immédiates après la thèse font partie de ce qui très probablement représentera mon travail postdoctoral prévu pour les 18 ou 24 mois suivant la soutenance de la thèse. Le contrat postdoctoral aura lieu dans le cadre d'une collaboration franco-américaine entre des chercheurs du laboratoire Géosciences Azur, en France, et du « Department of Geological Sciences » de l'université de l'état de San Diego. Dans un premier temps, je travaillerai dans l'optimisation et parallélisation du code de propagation d'ondes 3D visant la simulation du mouvement du sol dans des sites spécifiques du sud-est de la France. Ensuite, une fois le modèle de rupture inséré dans ce nouveau code optimisé, l'analyse inverse de séismes ayant une géométrie de la faille complexe sera possible, en appliquant les méthodes d'inversion semi-global mentionnés dans la section C.3.

La réalisation du projet a permis mon ouverture sur le plan international. J'ai gagné une place parmi les sismologues du monde entier. Ce fait me facilitera mon développement personnel futur en m'offrant la possibilité

d'interagir avec différents groupes de recherche. En même temps, le choix et la conduite du projet ont abouti à un ensemble d'outils qui pourraient être d'un intérêt majeur pour les groupes de recherche de mon pays, le Mexique.

Table des figures

1.1	Stencil d'un schéma <i>explicite</i> en différences finies	24
1.2	Stencil d'un schéma <i>implicite</i> en différences finies	25
1.3	Courbes de dispersion pour la vitesse de phase de l'équation d'onde acoustique unidimensionnelle	30
1.4	Anisotropie de la vitesse de phase pour l'équation d'onde acoustique bidimensionnelle	33
1.5	Comparaison de la vitesse de phase pour l'équation d'onde acoustique bidimensionnelle : schéma (2,2) <i>vs.</i> schéma (2,4) .	35
1.6	Condition CFL. Domaines de dépendance de l'équation d'advection et du schéma numérique « <i>upwind</i> »	39
1.7	Grille différences finies irrégulière 3D	44
1.8	Comparaison du nombre d'opération par Δt pour trois schémas différents avec des grille irrégulières	45
1.9	Cellule élémentaire de la <i>grille en quinconce standard</i>	54
1.10	Cellule élémentaire de la <i>grille partiellement en quinconce</i> . .	55
1.11	Directions de dérivation des opérateurs 3D pour la <i>grille partiellement en quinconce</i>	57
1.12	Courbes de dispersion pour la vitesse de phase en fonction du numéro de Courant : grille partiellement en quinconce <i>vs.</i> grille en quinconce standard	76
1.13	Comparaison des courbes de dispersion pour différents ordres de précision entre la méthode partiellement en quinconce et la méthode en quinconce standard	77
1.14	Comparaison de l'anisotropie entre la méthode partiellement en quinconce et la méthode en quinconce standard. Cas 2D .	79
1.15	Diagrammes d'anisotropie 3D	80
1.16	« <i>Vacuum formalism</i> » pour la surface libre dans la grille partiellement en quinconce	87
1.17	Sismogrammes dans la surface libre avec l'approche du <i>vacuum</i>	88

Table des figures

1.18 Erreurs des sismogrammes dans la surface libre avec l'ap- proche du <i>vacuum</i>	89
1.19 Crack 3D dans un repère cartésien	92
1.20 Fracture circulaire dans un repère cartésien	94
1.21 Couche d'absorption PML 3D	102
1.22 Estimations de la mémoire vive réclamée par l'implémentation 3D en DF avec PML	106
1.23 Ondelette utilisée pour l'excitation d'une source isotrope . . .	107
1.24 Instantanés du champ de vitesse excité par une source isotrope dans un milieu homogène.	111
1.25 Évolution temporelle de l'énergie mécanique dans un milieu homogène en présence d'une couche d'absorption PML	112
1.26 Énergie résiduelle dans un milieu homogène en fonction de l'épaisseur de la couche PML	113
1.27 Instantanés du champ de vitesse excité par une source isotrope dans un milieu hétérogène à deux couches	114
1.28 Énergie mécanique résiduelle non absorbée par la condition PML dans un milieu hétérogène	116
1.29 Modèle hétérogène avec couche d'absorption PML, source iso- trope et capteurs sismologiques	118
1.30 Velocigrammes dans un espace homogène sans conditions d'ab- sorption PML	120
1.31 Velocigrammes dans un espace homogène avec conditions d'ab- sorption PML	121
1.32 Velocigrammes résiduels dans un espace homogène	122
1.33 Velocigrammes dans un espace hétérogène sans conditions d'ab- sorption PML	124
1.34 Velocigrammes dans un espace hétérogène avec conditions d'ab- sorption PML	125
1.35 Velocigrammes résiduels dans un espace hétérogène	126
2.1 Instabilité dynamique d'un bloc sous la force d'un ressort . .	138
2.2 Glissement et vitesse du glissement pour une faille circulaire statique	139
2.3 Modes de fracturation	144
2.4 Singularités élastiques associées à une fracture	146
2.5 Forces de cohésion en fonction du glissement à l'intérieur d'une fracture	149
2.6 Contraintes cisailantes dans une fracture avec et sans force de cohésion	150

2.7	Glissement dans une fracture avec et sans force de cohésion	151
2.8	Bilan énergétique d'une fracture avec force de cohésion	154
2.9	Critère de rupture discrète utilisé dans ce travail et proposé par Hamano (1974)	159
2.10	Transition d'une fracture de mode <i>in-plane</i> vers le régime supersonique	161
2.11	Instantanés de la transition vers le régime supersonique d'une fracture de mode II sans forces de cohésion	163
2.12	Domaine de la vitesse de rupture d'une fracture de mode II en fonction de sa taille et du paramètre S	164
2.13	Instantanées de la rupture d'une faille issus des expériences numériques et analogiques	167
3.1	Comparison of two different stencils : the one corresponding to the standard staggered-grid and the one used in this work	175
3.2	Local reference frame given by the fault normal vector in 2D	178
3.3	Two equivalent numerical cells describing the same point source	180
3.4	Seismograms around a point source for six different fault orientations	181
3.5	Seismograms around a 20° tilted point source represented by different equivalent numerical cells	181
3.6	Slip and slip-rate estimates in a sixteen-point numerical cell	184
3.7	Slip functions computed in the same point source with ten different orientations. The slip estimate is independent of fault orientation	185
3.8	Different discretizations of the same planar finite source	187
3.9	Accuracy criterion relating the grid size and the number of stress-grid points per numerical cell in a given finite source	188
3.10	Comparison between analytical and numerical solutions for a constant-velocity self-similar crack	191
3.11	Numerical solutions in a given fault point considering a linear slip-weakening friction law	193
3.12	Seismograms around one finite source for six different fault orientation angles	195
3.13	Slip and slip-rate solutions in a finite sources for six different fault orientation angles	197
3.14	Slip and slip-rate functions computed in a given point of a finite source for six different fault orientations	199

3.15	Snapshot of the particle velocity associated with a nonplanar fault crossing a circular Low Velocity Zone	200
3.16	Slip and slip-rate fault solutions associated with a nonplanar rupture crossing a circular Low Velocity Zone	201
4.1	Représentation bidimensionnelle d'une zone de faille dans deux grilles différences finies	209
4.2	Géométrie du problème pour la comparaison des deux formulations d'une zone de faille avec la méthode BIE	212
4.3	Comparaison entre FDBE et FDSG pour $h = 25m$	213
4.4	Comparaison entre FDBE et FDSG pour $h = 50m$	214
4.5	Comparaison entre FDBE et FDSG pour $h = 100m$	215
4.6	Comparaison entre FDBE pour $h = 25m$ et BIE	217
4.7	Comparaison entre FDBE pour $h = 50m$ et BIE	218
4.8	Comparaison entre FDBE pour $h = 100m$ et BIE	219
4.9	Comparaison entre FDSG pour $h = 25m$ et BIE	221
4.10	Comparaison entre FDSG pour $h = 50m$ et BIE	222
4.11	Comparaison entre FDSG pour $h = 100m$ et BIE	223
4.12	Évolution de la contrainte cisailante dans le voisinage d'un octaèdre	225
4.13	Évolution de la contrainte cisailante dans le voisinage d'un cube	226
4.14	Évolution de la contrainte cisailante dans le voisinage d'un parallélépipède tourné de 45°	228
4.15	3D boundary element used to discretize the source	236
4.16	Local reference frame matching the fault orientation in a give 3D boundary element	238
4.17	Invariance with respect to the fault orientation of a 3D point source	243
4.18	Resolution test problem geometry	245
4.19	Cohesive zone resolution estimate as a function of grid size and slip-weakening distance	248
4.20	Rupture times, slip and slip-rate error estimate as a function of grid size and the slip-weakening critical distance	251
4.21	Rupture times and cohesive zone resolution over the fault plane for the reference rupture case	253
4.22	Comparison of rupture times for different grid sizes and corresponding cohesive zone resolution parameter values	255
4.23	slip and slip-rate functions in the anti-plane direction for different spatial grid steps	256

4.24 slip and slip-rate functions in the in-plane direction for different spatial grid steps	257
4.25 SCEC code-comparison problem geometry	259
4.26 SCEC rupture times contours at 1s intervals	262
4.27 Cohesive zone resolution for different grid sizes over the fault plane on the SCEC benchmark problem	264
4.28 Comparison of slip-rate functions in four observational fault points of the SCEC problem for $h = 24.2m$	266
4.29 Comparison of slip-rate functions in four observational fault points of the SCEC problem for $h = 46.9m$	267
4.30 Comparison of slip-rate functions in four observational fault points of the SCEC problem for $h = 88.2m$	268
4.31 Comparison of shear stresses in two observational fault points of the SCEC problem for three different grid sizes	269
4.32 Parabolic 2D projection of the nonplanar faults used for validation of the FDBE rupture model	271
4.33 3D view of one parabolic fault used for model validation	272
4.34 Comparison of rupture front contours yielded by the FDBE and by the BIE methods for planar and nonplanar faults	276
4.35 Comparison of slip-rate functions yielded by the FDBE and by the BIE methods for planar and nonplanar faults	277
4.36 Parabolic faults embedded in a biaxial tectonic load	279
4.37 Normal and shear prestresses along nonplanar faults under biaxial load	281
4.38 Rupture time contours under biaxial tectonic load	283
4.39 Fault solutions as a function of position in the along-strike direction and time	284
4.40 Slip-rate and shear stress snapshot sequences along the planar fault F1	286
4.41 Slip-rate and shear stress snapshot sequences along the nonplanar fault F2	287
4.42 Slip-rate and shear stress snapshot sequences along the nonplanar fault F3	288
4.43 Particle velocity snapshots under biaxial tectonic load	290
4.44 Three-dimensional view of the Landers earthquake fault in a three-layers medium	298
4.45 Landers earthquake initial stress field	300
4.46 Final slip for the Landers earthquake from nonplanar rupture surface simulation	301

4.47	Initial 2D shear stress determined by Peyrat et al. (2001) for the Landers earthquake	302
4.48	Landers seismograms in a halfspace	303
4.49	Landers seismograms in a layered medium	304

Liste des tableaux

1.1	Temps CPU par unité arithmétique et temps CPU total par simulation, normalisés par rapport à un schéma d'ordre supérieur	22
1.2	Structure de vitesses d'un milieu homogène infini	109
1.3	Structure de vitesses d'un milieu hétérogène à deux couches .	115
1.4	Structure de vitesses d'un milieu hétérogène à trois couches .	123
3.1	Velocity structure with a circular Low Velocity Zone	192
4.1	Average cohesive zone width estimates (Λ_c) along purely in-plane and anti-plane fault directions	250
4.2	Slip-rate relative RMS error	258
4.3	Material properties of the 3D full space considered in the SCEC code-comparison exercise	260
4.4	Initial stress conditions and constitutive friction parameters used in the Problem Version 3 of the SCEC exercise	261
4.5	Absolute and relative RMS errors of our FDBE method obtained for the SCEC benchmark with respect to solution by the TSN FD method	263
4.6	Initial stress conditions and constitutive friction parameters used in the spontaneous nonplanar comparison	274
4.7	Final fault slip and slip-rate RMS errors of our FDBE method with respect to the BIE reference solutions	275
4.8	Material properties of the 3D homogeneous space loaded with the biaxial tectonic field	278
4.9	Constitutive friction parameters used in all simulations with biaxial tectonic load	282
4.10	Elastic model used for the Landers earthquake rupture simulation	297

C.1	Coût du projet associé aux ressources humaines et infrastructure	339
C.2	Coût du projet associé aux congrès et formations doctorales	340
C.3	Coût total du projet	340

Bibliographie

- Aagaard, B. (2000). *Finite-element simulation of earthquakes*. Thèses de doctorat, California Institute of Technology, Pasadena.
- Aagaard, B. T., Heaton, T. H., & Hall, J. F. (2001). Dynamic earthquake ruptures in the presence of lithostatic normal stresses : implications for friction models and heat production. *Bull. Sismol. Soc. Am.*, **91**, 1765–1796.
- Aagaard, B. T., Anderson, G., & Hudnut, K. W. (2004). Dynamic rupture modeling of the transition from thrust to strike-slip motion in the 2002 Denali fault earthquake, Alaska. *Bull. Sismol. Soc. Am.*, **94**, S190–S201.
- Adda-Bedia, M. & Madariaga, R. (2005). Dynamic rupture of a fault kink in antiplane model. In *EOS Transactions*, volume 86, S52A-01. American Geophysical Union, San Francisco, EUA.
- Aki, K. (1979). Characterization of barriers on an earthquake fault. *J. Geophys. Res.*, **84**, 6140–6148.
- Aki, K. & Larner, L. (1970). Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves. *J. Geophys. Res.*, **75**, 1921–1941.
- Aki, K. & Richards, P. G. (2002). *Quantitative seismology*. University Science Books, Sausalito, California, USA.
- Alford, R. M., Kelly, K. R., & Boore, D. M. (1974). Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, **39**, 834–842.
- Alterman, Z. & Karal, F. C. (1968). Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **58**, 367–398.

- Ampuero, J. P. (2002). *Etude physique et numérique de la nucléation des séismes*. Thèses de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris.
- Ampuero, J. P. & Vilotte, J. P. (2002). Nucleation of rupture under slip dependent friction law : simple models of fault zone. *J. Geophys. Res.*, **107**, 2324.
- Anderson, E. M. (1905). The dynamics of faulting. *Trans. Edimburgh Geol.*, **8**, 387–402.
- Ando, R., Tada, T., & Yamashita, T. (2004). Dynamic evolution of a fault system through interactions between fault segments. *J. Geophys. Res.*, **109**, B05303, doi :10.1029/2003JB002665.
- Andrews, D. J. (1973). A numerical study of tectonic stress release by underground explosions. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **63**, 1375–1391.
- Andrews, D. J. (1976a). Rupture propagation with finite stress in antiplane strain. *J. Geophys. Res.*, **81**, 3575–3582.
- Andrews, D. J. (1976b). Rupture velocity of plane strain shear cracks. *J. Geophys. Res.*, **81**, 5679–5687.
- Andrews, D. J. (1985). Dynamic plane-strain shear rupture with a slip-weakening friction law calculated by a boundary integral method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **75**, 1–21.
- Andrews, D. J. (1999). Test of two methods for faulting in finite-difference calculations. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **89**, 931–937.
- Andrews, D. J. (2002). Comment on « how fast is rupture during an earthquake ? new insights from the 1999 turkey earthquakes ». *Geophys. Res. Lett.*, **29**, doi :10.1029/2001GL014126.
- Andrews, D. J. (2004). Rupture models with dynamically determined breakdown displacement. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **94**, 769–775.
- Andrews, D. J. (2005). Rupture dynamics with energy loss outside the slip zone. *J. Geophys. Res.*, **110**, 1307.
- Andrews, D. J. & Ben-Zion, Y. (1997). Wrinkle-like slip pulse on a fault between different materials. *J. Geophys. Res.*, **102**, 553–571.
- Aochi, H. (september, 2004). Personal communication.

-
- Aochi, H. & Fukuyama, E. (2002). Three-dimensional nonplanar simulation of the 1992 Landers earthquake. *J. Geophys. Res.*, **107**, ESE 4 1–12.
- Aochi, H. & Madariaga, R. (2003). The 1999 Izmit, Turkey, Earthquake : nonplanar fault structure, dynamic rupture process, and strong ground motions. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **93**, 1249–1266.
- Aochi, H. & Matsu'ura, M. (2002). Slip- and time-dependent fault constitutive law and its significance in earthquake generation cycle. *Pure Appl. Geophys.*, **159**, 2029–2044.
- Aochi, H. & Olsen, K. B. (2004). On the effects of non-planar geometry for blind thrust faults on strong ground motion. *Pure Appl. Geophys.*, **161**, 2139–2153.
- Aochi, H., Fukuyama, E., & Matsu'ura, M. (2000a). Selectivity of spontaneous rupture propagation on a branched fault. *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 3635–3638.
- Aochi, H., Fukuyama, E., & Matsu'ura, M. (2000b). Spontaneous rupture propagation of on a non-planar fault in 3D elastic medium. *PAGEOPH*, **157**, 2003–2027.
- Aochi, H., Madariaga, R., & Fukuyama, E. (2002). Effect of normal stress during rupture propagation along nonplanar faults. *J. Geophys. Res.*, **107**, ESE 5 1–10.
- Aochi, H., Seyedi, M., Douglas, J., Foerster, E., & Modaressi, H. (2005). A complete BIEM-FDM-FEM simulation of an earthquake scenario - dynamic rupture process, seismic wave propagation and site effects. In *Geophys. Res. Abs.* European Geosciences Union, Vienne, Autriche.
- Aoi, S. & Fujiwara, H. (1999). 3d finite-difference method using discontinuous grids. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **89**, 918–930.
- Archuleta, R. J. (1984). A faulting model for the Imperial Valley earthquake. *J. Geophys. Res.*, **89**, 4559–4585.
- Archuleta, R. J. & Frazier, G. A. (1978). Three-dimensional numerical simulations of dynamic faulting in a half-space. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **68**, 541–572.
- Aubry, D. & Clouteau, D. (1991). A regularized boundary element method for stratified media. In *Proceedings of the First International Conference*

- on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*, pages 660–668. SIAM, Philadelphia.
- Aubry, D., Chouvet, D., Modaressi, H., & Mouroux, P. (1985). Local amplification of a seismic incident field through an elastoplastic sedimentary valley. In *Numerical Methods in Geomechanics*, pages 421–428. Balkema.
- Backus, G. & Mulcahy, M. (1976). Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. 1. continuous displacements. *J. Roy. Astron. Soc.*, **46**, 341–361.
- Bard, P. Y. & Bouchon, M. (1985). The two-dimensional resonance of sediment-filled valleys. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **75**, 519–541.
- Barenblatt, G. I. (1959a). Concerning equilibrium cracks forming during brittle fracture : the stability of isolated cracks, relationships with energetic theories. *Appl. Math. Mech.*, **23**, 1273–1282.
- Barenblatt, G. I. (1959b). The formation of equilibrium cracks during brittle fracture, general ideas and hypotheses : axially symmetric cracks. *Appl. Math. Mech.*, **23**, 622–636.
- Ben-Jemaa, M., Glinsky-Olivier, N., Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J., & Piperno, S. (2006). Dynamic non-planar crack rupture by a finite volume method. *Geophys. J. Int.* (submitted).
- Ben-Zion, Y. & Huang, Y. (2002). Dynamic rupture on an interface between a compliant fault zone layer and a stiffer surrounding solid. *J. Geophys. Res.*, **107**, ESE 6 1–13.
- Ben-Zion, Y. & Sammis, C. G. (2003). Characterization of fault zones. *Pure Appl. Geophys.*, **160**, 677–715.
- Benitez, R. & Olsen, K. B. (2005). Modeling strong ground motion in the wellington metropolitan area, new zealand. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **95**, 2180–2196, doi :10.1785/0120040223.
- Berenger, J. P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Computational Physics*, **114**, 185–200.
- Beroza, G. C. & Ellsworth, W. L. (1996). Properties of the seismic nucleation phase. *Tectonophysics*, **261**, 209–227.

-
- Bizzarri, A. & Cocco, M. (2003). Slip-weakening behavior during the propagation of dynamic ruptures obeying rate- and state-dependent friction laws. *J. Geophys. Res.*, **108**, 2373.
- Bizzarri, A. & Cocco, M. (2005). 3D dynamic simulation of spontaneous rupture propagation governed by different constitutive laws with rake rotation allowed. *Ann. of Geophys.*, **48**, 279–299.
- Bizzarri, A., Cocco, M., Andrews, D. J., & Boschi, E. (2001). Solving the dynamic rupture problem with different numerical approaches and constitutive laws. *Geophys. J. Int.*, **144**, 656–678.
- Bohlen, T. & Saenger, E. H. (2006). Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh waves. *accepted in Geophysics*.
- Boore, D. M. (1970). Love waves in nonuniform waveguides : finite difference calculations. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **75**, 1512–1527.
- Boore, D. M. (1972). Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. In *Methods in computational physics, advances in research and applications*, volume 11. Academic Press.
- Bouchon, M. (1997). The state of stress on some faults of the San Andreas system as inferred from near-field strong motion data. *J. Geophys. Res.*, **102**, 11731–11744.
- Bouchon, M. & Rosakis, A. J. (2002). Reply to comment on « how fast is rupture during an earthquake? new insights from the 1999 turkey earthquakes ». *Geophys. Res. Lett.*, **29**, doi :10.1029/2002GL015096.
- Bouchon, M. & Vallée, M. (2003). Observation of long supershear rupture during the magnitude 8.1 Kunlunshan earthquake. *Science*, **301**, 824–826.
- Bouchon, M., Bouin, M. P., Karabulut, H., Toksoz, M. N., Dietrich, M., & Rosakis, A. J. (2001). How fast is rupture during an earthquake? new insights from the 1999 turkey earthquakes. *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 2723–2726.
- Brace, W. F. & Byerlee, J. D. (1966). Stick slip as a mechanism for earthquakes. *Science*, **153**, 990–992.
- Brune, J. N. (1970). Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes. *J. Geophys. Res.*, **75**, 4997–5009.

- Burridge, R. (1969). The numerical solution of certain integral equations with non-integrable kernels arising in the theory of crack propagation and elastic wave diffraction. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **A265**, 353–381.
- Burridge, R. (1973). Admissible speeds for plane-strain self-similar shear cracks with friction but lacking cohesion. *Geophys. J. Astron. Soc.*, **35**, 439–455.
- Burridge, R., Conn, G., & Freund, L. B. (1979). The stability of rapid mode II shear crack. *J. Geophys. Res.*, **85**, 2210–2222.
- Campillo, M. & Archuleta, R. J. (1993). A rupture model for the 28 June 1992 Landers, California, earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 647–650.
- Campillo, M. & Ionescu, I. R. (1997). Initiation of antiplane shear instability under slip dependent friction. *J. Geophys. Res.*, **102**, 20363–20371.
- Capdeville, Y., Chaljub, E., Vilotte, J., & Montagner, J. (2003). Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in global earth models. *Geophys. J. Int.*, **152**, 34–67.
- Cerjan, C. D., Kosloff, D., & Reshef, M. (1985). A non-reflecting boundary condition for direct acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, **50**, 705–708.
- Chaljub, E. (2000). *Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques à l'échelle globale*. Thèses de doctorat, Université de Paris VII, Paris.
- Chaljub, E., Capdeville, Y., & Vilotte, J. (2003). Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere : a parallel spectral element approximation on non-conforming grids. *J. Comput. Phys.*, **187**, 457–491.
- Chambon, G. & Schmittbuhl, J. (2002). Laboratory gouge friction : seismic-like slip weakening and secondary rate- and state-effects. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 10.1029.
- Chen, Y. T., Chen, X. F., & Knopoff, L. (1987). Spontaneous growth and autonomous contraction of a two-dimensional earthquake. *Tectonophysics*, **144**, 5–17.
- Chew, W. C. & Liu, Q. H. (1996). Perfectly matched layers for elastodynamics : a new absorbing boundary condition. *J. Comput. Acous.*, **4**, 341–359.

-
- Chouet, B. A. (1986). Dynamics of a fluid-driven crack in three dimensions by the finite difference methode. *J. Geophys. Res.*, **91**, 13967–13992.
- Cianetti, S., Giunchi, C., & Cocco, M. (2005). Three-dimensional finite element modeling of stress interaction : an application to Landers and Hector Mine fault systems. *J. Geophys. Res.*, **110**, B05S17, doi :10.1029/2004JB003384.
- Clayton, R. & Engquist, B. (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equation. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **67**, 1529–1540.
- Coates, R. T. & Schoenberg, M. (1995). Finite-difference modeling of faults and fractures. *Geophysics*, **60**, 1514–1526.
- Cocco, M. & Bizzarri, A. (2002). On the slip-weakening behavior of rate- and state dependent constitutive laws. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 10.1029.
- Cochard, A. & Madariaga, R. (1994). Dynamic faulting under rate-dependent friction. *PAGEOPH*, **142**, 419–445.
- Cochard, A. & Madariaga, R. (1996). Complexity of seismicity due to highly rate-dependent friction. *J. Geophys. Res.*, **101**, 25321–25335.
- Cohee, B. P. & Beroza, G. C. (1994). Slip distribution of the 1992 Landers earthquake and its implications for earthquake source mechanics. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **84**, 692–712.
- Coker, D. & Rosakis, A. J. (2001). Experimental observations of intersonic crack growth in asymmetrically loaded unidirectional composite plates. *Philos. Magazine*, **81**, 571–595.
- Collino, F. & Tsogka, C. (2001). Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, **66**, 294–307.
- Cruz-Atienza, V. M. & Virieux, J. (2003). Nonplanar dynamic rupture in finite difference modeling. In *Numerical Modeling of Earthquake Source Dynamics - NMESD*. Workshop à Smolenice, République Slovaque.
- Cruz-Atienza, V. M. & Virieux, J. (2004). Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach. *Geophys. J. Int.*, **158**, 939–954.

- Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J., & Operto, S. (2002). Dynamic rupture simulation of bending faults with a finite difference approach. In *EOS Transactions*, volume 83, NG21B-0941. American Geophysical Union, San Francisco, EUA.
- Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J., Aochi, H., & Peyrat, S. (2004a). 3D nonplanar finite difference dynamic rupture : Application to the Landers earthquake. In *EOS Transactions*, volume 85, S32B-06. American Geophysical Union, San Francisco, EUA (invited).
- Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J., Aochi, H., & Peyrat, S. (2004b). Nonplanar dynamic rupture in a 3D finite difference approach. In *Geophys. Res. Abs.*, volume 6, 03948. European Geosciences Union, Nice, France.
- Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J., & Aochi, H. (2006). 3D nonplanar dynamic rupture in a heterogeneous medium : the pre-stress effect. In *Geophys. Res. Abs.*, volume 8, EGU06-A-09594. European Geosciences Union, Vienne, Autriche.
- Dablain, M. A. (1986). The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics*, **51**, 54–66.
- Dalguer, L. (mars, 2005). Communication personnelle.
- Dalguer, L. A. & Day, S. M. (2004). Split nodes and fault zone models for dynamic rupture simulation. In *EOS Transactions*, volume 85, S41A-0944. American Geophysical Union, San Francisco, EUA.
- Dalguer, L. A. & Day, S. M. (2006). Comparison of fault representation methods in finite difference simulations of dynamic rupture. *Submitte to Bull. Seismol. Soc. Am.*
- Dalguer, L. A., Irikura, K., Riera, J. D., & Chiu, H. C. (2001). The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan earthquake : brief interpretation of the damage distribution on buildings. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **95**, 1112–1127.
- Dalguer, L. A., Irikura, K., Zhang, W., & Riera, J. D. (2002). Distribution of the dynamic and static stress changes during 2000 Tottori (Japan) earthquake : brief interpretation of the earthquake sequences ; foreshocks and aftershocks. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, doi :10.1029/2001GL014333.
- Dalguer, L. A., Irikura, K., & Riera, J. D. (2003a). Generation of new crack accompanied by the dynamic shear rupture propagation of the 2000 tottori (japan) earthquake. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **93**, 2236–2252.

- Dalguer, L. A., Irikura, K., & Riera, J. D. (2003b). Simulation of tensile crack generation by three-dimensional dynamic shear rupture propagation during an earthquake. *J. Geophys. Res.*, **108**, 2144.
- Dalhen, F. A. (1977). The balance of energy in earthquake faulting. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **48**, 239–261.
- Das, S. (1976). *A numerical study of rupture propagation and earthquake source mechanism*. Thèses de maître en sciences, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.
- Das, S. & Aki, K. (1977a). Fault plane with barriers : a versatile earthquake model. *J. Geophys. Res.*, **82**, 5658–5670.
- Das, S. & Aki, K. (1977b). A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **50**, 643–668.
- Das, S. & Kostrov, B. V. (1987). On the numerical boundary integral equation method for three-dimensional dynamic shear crack problems. *J. Appl. Mech.*, **54**, 99–104.
- Day, S. M. (1977). *Finite element analysis of seismic scattering problems*. Thèses de doctorat, Université de Californie, San Diego.
- Day, S. M. (1982a). Three-dimensional finite difference simulation of fault dynamics : rectangular fault with fixed rupture velocity. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 705–727.
- Day, S. M. (1982b). Three-dimensional simulation of spontaneous rupture : the effect of nonuniform prestress. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 1881–1902.
- Day, S. M. & Bradley, C. R. (2001). Memory-efficient simulation of anelastic wave propagation. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **91**, 520–531.
- Day, S. M., Dalguer, L. A., Lapusta, N., & Liu, Y. (2005). Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture. *J. Geophys. Res.*, **110**, B12307, doi :10.1029/2005JB003813.
- Dieterich, J. H. (1978). Time-dependent friction and the mechanics of stick-slip. *Pure Appl. Geophys.*, **116**, 790–806.
- Dieterich, J. H. (1979). Modeling of rock friction 1. experimental results and constitutive equations. *J. Geophys. Res.*, **84**, 2161–2168.

- Dieterich, J. H. (1992). Earthquake nucleation on faults with rate- and state-dependent strength. *Tectonophysics*, **211**, 115–134.
- Dormy, E. & Tarantola, A. (1995). Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method. *J. Geophys. Res.*, **100**, 2123–2133.
- Dunham, E. M. & Archuleta, R. (2004). Evidence for a supershear transient during the 2002 Denali fault earthquake. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **94**, S256–S268.
- Dunham, E. M., Favreau, P., & Carlson, J. M. (2003). A supershear transition mechanism for cracks. *Science*, **299**, 1557–1559.
- Ellsworth, W. L. & Beroza, G. C. (1995). Seismic evidence for an earthquake nucleation phase. *Science*, **268**, 851–855.
- Emerman, S. H., Schmidt, W., & Stephen, R. A. (1982). An implicit finite-difference formulation of the elastic wave equation. *Geophysics*, **47**, 1521–1526.
- Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. London*, **241**, 376–396.
- Faccioli, E. F., Paolucci, R., & Quarteroni, A. (1997). 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method. *J. Seismol.*, **1**, 237–251.
- Festa, G. (2004). *Slip imaging by isochron back projection and source dynamics with spectral element methods*. Thèse de doctorat, Université degli Studi di Bologna, Napoli Federico II et Roma III avec l’Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, Rome.
- Festa, G. & Nielsen, S. (2003). PML absorbing boundaries. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **93**, 891–903.
- Freund, L. B. (1972). Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. *Journal of Elasticity*, **2**, 341–349.
- Freund, L. B. (1979). The mechanics of dynamic shear crack propagation. *J. Geophys. Res.*, **84**, 2199–2209.
- Freund, L. B. (1990). *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.

-
- Fryer, Y. D., Bailey, C., Cross, M., & Lai, C. H. (1991). A control volume procedure for solving the elastic stress-strain equations on an unstructured mesh. *Appl. Math. Modelling*, **15**, 639–645.
- Fukuyama, E. & Madariaga, R. (1995). Integral equation method for plane crack with arbitrary shape in 3D elastic medium. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **85**, 614–628.
- Fukuyama, E. & Olsen, K. B. (2002). A condition for super-shear rupture propagation in a heterogeneous stress field. *Pure Appl. Geophys.*, **159**, 2047–2056.
- Fung, Y. C. (1977). *A first course in continuum mechanics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Gelis, C. (2003). Communication personnelle.
- Gelis, C., Leparoux, D., Virieux, J., Bitri, A., Operto, S., & Grandjean, G. (2005). Numerical modeling of surface waves over shallow cavities. *J. Environ. Engin. Geophys.*, **10**, 49–59.
- Gottschamer, E. & Olsen, K. B. (2001). Accuracy of the explicit planar free-surface boundary condition implemented in a fourth-order staggered-grid velocity-stress finite-difference scheme. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **91**, 617–623.
- Graves, R. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3d elastic media using staggered-grid finite differences. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **86**, 1091–1106.
- Griffith, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philo. Trans. Roy. Soc. London*, **A221**, 163–198.
- Gutteri, M. & Spudich, P. (2000). What can strong-motion data tell us about slip-weakening fault-friction laws? *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **90**, 98–116.
- Hamano, Y. (1974). Dependence of rupture time history on the heterogeneous distribution of stress and strength on the fault plane. In *EOS Transactions*, volume 55, 352. American Geophysical Union.
- Hardebeck, J. L. & Hauksson, E. (2001). Crustal stress field in southern California and its implications for fault mechanics. *J. Geophys. Res.*, **106**, 21859–21882.

- Harris, R. A. & Archuleta, R. J. (2004). Earthquake rupture dynamics : Comparing the numerical simulation methods. *EOS*, **85**, 321.
- Harris, R. A. & Day, S. M. (1993). Dynamic of fault interaction : parallel strike-slip faults. *J. Geophys. Res.*, **98**, 4461–4472.
- Harris, R. A. & Day, S. M. (1997). Effect of a low-velocity zone on a dynamic rupture. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **87**, 1267–1280.
- Harris, R. A. & Day, S. M. (1999). Dynamic 3d simulations of earthquakes on en echelon faults. *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 2089–2092.
- Hastings, F. D., Schneider, J. B., & Broschat, S. L. (1996). Application of the perfectly matched layer (pml) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, **100**, 3061–3069.
- Hauksson, E. (1994). State of stress from focal mechanisms before and after the 1992 Landers earthquake sequence. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **84**, 917–934.
- Hayashi, K., Burns, D. R., & Toksoz, M. N. (2001). Discontinuous-grid finite-difference seismic modeling including surface topography. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **91**, 1750–1764.
- Hernandez, B., Cotton, F., & Campillo, M. (1999). Contribution of radar interferometry to a two-step inversion of kinematic process of the 1992 Landers earthquake. *J. Geophys. Res.*, **104**, 13083–13099.
- Hestholm, S. O. (2003). Elastic wave modeling with free surfaces : stability of long simulation. *Geophysics*, **68**, 314–321.
- Higdon, R. L. (1991). Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics*, **56**, 231–241.
- Holberg, O. (1987). Computational aspects of the choice of operators and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena. *Geophys. Prospecting*, **35**, 629–655.
- Husseini, M. I. (1977). Energy balance for motion along a fault. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **49**, 699–714.
- Husseini, M. I. & Randall, M. J. (1976). Rupture velocity and radiation efficiency. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **66**, 1173–1187.

-
- Husseini, M. I., Jovanovich, D. B., Randall, M. J., & Freund, L. B. (1975). The fracture energy of earthquakes. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **43**, 367–385.
- Ida, Y. (1972). Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and griffith's specific surface energy. *J. Geophys. Res.*, **77**, 3796–3805.
- Ida, Y. & Aki, K. (1972). Seismic source time function of propagating longitudinal-shear cracks. *J. Geophys. Res.*, **77**, 2034–2044.
- Iio, Y. (1992). Slow initial phase of the P-wavevelocity pulse generated by microearthquakes. *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 477–480.
- Iio, Y. (1995). Observations of the slow initial phase generated by microearthquakes : implications for earthquake nucleation and propagation. *J. Geophys. Res.*, **100**, 15333–15349.
- Ionescu, I. R. & Campillo, M. (1999). Influence of the shape of the friction law and fault finiteness on the duration of initiation. *J. Geophys. Res.*, **104**, 3013–3024.
- Irwin, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. App. Mech.*, **24**, 361–364.
- Irwin, G. R. (1960). Fracture mechanics. In *Structural mechanics*, pages 557–591. Pergamon.
- Jastram, C. & Tessmer, E. (1994). Elastic modeling on a grid with vertically varying spacing. *Geophys. Prospect.*, **42**, 357–370.
- Jing, L. (2003). A review of the techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering. *Int. J. Rock Mech. Mining Sciences.*, **40**, 283–353.
- Kame, N. & Yamashita, T. (1999). Simulation of the spontaneous growth of dynamic crack without constraints on the crack tip path. *Geophys. J. Int.*, **139**, 345–358.
- Kame, N., Rice, J., & Dmowska, R. (2003). Effect of prestress state and rupture velocity on dynamic fault branching. *J. Geophys. Res.*, **108**, 2265.
- Kanamori, H. (1994). Mechanics of earthquakes. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **22**, 207–237.

- Kang, T. S. & Baag, C. E. (2004). Finite-difference seismic simulation combining discontinuous grids with locally variable timesteps. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **94**, 207–219.
- Kase, Y. & Kuge, K. (2001). Rupture propagation beyond fault discontinuities : significance of fault strike and location. *Geophys. J. Int.*, **147**, 330–342.
- Kaser, M. & Igel, H. (2001). Numerical simulation of 2D wave propagation on unstructured grids using explicit differential operators. *Geophys. Prospec.*, **49**, 607–619.
- Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., & Alford, R. M. (1976). Synthetic seismograms : a finite-difference approach. *Geophysics*, **41**, 2–27.
- Knopoff, L. & Ni, X. X. (2001). Numerical instability at the edge of a dynamic fracture. *Geophys. J. Int.*, **147**, F1–F6.
- Komatitsch, D. (1997). *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*. Thèses de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris.
- Komatitsch, D. & Tromp, J. (1999). Introduction to the spectral element method for 3D seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.*, **139**, 806–822.
- Komatitsch, D. & Tromp, J. (2002). Spectral-element simulations of global seismic wave propagation, II. 3D models, oceans, rotation, and self-gravitation. *Geophys. J. Int.*, **150**, 303–318.
- Komatitsch, D. & Vilotte, J. P. (1998). The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **88**, 368–392.
- Komatitsch, D., Liu, Q., Tromp, J., Suss, P., Stidham, C., & Shaw, J. H. (2004). Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **94**, 187–206.
- Kostrov, B. V. (1964). Selfsimilar problems of propagation of shear cracks. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, **28**, 889–898.
- Kostrov, B. V. (1966). Unsteady propagation of longitudinal shear cracks. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, **30**, 1042–1049.
- Kostrov, B. V. (1974). Seismic moment and energy of earthquakes, and seismic flow of rock. *Izv. Earth Phys.*, **1**, 23–40.

-
- Lambaré, G. & Virieux, J. (mars 2006). Theory and observations - body waves : ray methods and finite frequency effects. *submitted to Geophysics*.
- Lapusta, N. J., Rice, J. R., Ben-Zion, Y., & Zheng, G. (2000). Elastodynamic analysis for slow tectonic loading with spontaneous rupture episodes on faults with rate- and state-dependent friction. *J. Geophys. Res.*, **105**, 23765–23789.
- Levander, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophysics*, **53**, 1425–1436.
- Lombard, B. & Piraux, J. (2004). Numerical treatment of two-dimensional interfaces for acoustic and elastic waves. *J. Compu. Physics*, **195**, 90–116.
- Luo, Y. & Shuster, G. (1990). Parsimonious staggered grid finite-differencing of the wave equation. *Geophys. Res. Lett.*, **17**, 155–158.
- Lysmer, J. & Drake, L. A. (1972). A finite element method for seismology. In *Methods in computational physics*, volume 11. Academic.
- Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **66**, 639–666.
- Madariaga, R. (2005). Seismic energy radiation from dynamic faulting. In *Chapman Conference on Radiated Energy and the Physics of Earthquake Faulting*. Portland, Maine, EUA.
- Madariaga, R. & Ampuero, J. (2005). Rupture dynamics of a geometrically complex fault. In *EOS Transactions*, volume 86, S34A-01. American Geophysical Union, San Francisco, EUA.
- Madariaga, R. & Olsen, K. B. (2000). Criticality of rupture dynamics in 3-d. *Pure Appl. Geophys.*, **157**, 1981–2001.
- Madariaga, R. & Perrier, G. (1991). *Les tremblement de terre*. Presses du CNRS, France.
- Madariaga, R., Olsen, K. B., & Archuleta, R. J. (1998). Modeling dynamic rupture in a 3D earthquake fault model. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **88**, 1182–1197.
- Magnier, S. A., Mora, P., & Tarantola, A. (1994). Finite difference on minimal grids. *Geophysics*, **59**, 1435–1443.

- Marcinkovich, C. & Olsen, K. (2003). On the implementation of perfectly matched layers in a three-dimensional fourth-order velocity-stress finite difference scheme. *J. Geophys. Res.*, **108**, doi :10.1029/2002GB002235.
- Marfurt, K. J. (1984). Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics*, **49**, 533–549.
- Marone, C. J. & Kilgore, B. D. (1993). Scaling of the critical slip-distance for seismic faulting with shear strain in fault zones. *Nature*, **362**, 618–621.
- Mikumo, T. (1994). Dynamic fault rupture processes of moderate-size earthquakes inferred from the results of kinematic waveform inversion. *Annali di Geofisica*, **XXXVII**, 1377–1389.
- Mikumo, T. & Miyatake, T. (1978). Dynamical rupture process on a three-dimensional fault with non-uniform frictions and near field seismic waves. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **54**, 417–438.
- Mikumo, T. & Miyatake, T. (1979). Earthquake sequence on a frictional fault model with non-uniform strength and relaxation times. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **59**, 497–522.
- Mikumo, T. & Miyatake, T. (1995). Heterogeneous distribution of dynamic stress drop and relative fault strength recovered from the results of waveform inversion : the 1984 Morgan Hill, California, earthquake. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **85**, 178–193.
- Mikumo, T. & Yagi, Y. (2003). Slip-weakening distance in dynamic rupture of in-slab normal-faulting earthquakes. *Geophys. J. Int.*, **155**, 443–455.
- Mikumo, T., Hirahara, K., & Miyatake, T. (1987). Dynamical fault rupture processes in heterogeneous media. *Tectonophysics*, **144**, 19–36.
- Mikumo, T., Santoyo, M. A., & Singh, S. K. (2000). Dynamic rupture and stress change in a normal faulting earthquake in the subducting Cocos plate. *Geophys. J. Int.*, **140**, 611–620.
- Mikumo, T., Olsen, K. B., Fukuyama, E., & Yagi, Y. (2003). Stress-breakdown time and slip-weakening distance inferred from slip-velocity functions on earthquake faults. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **93**, 264–282.
- Minkoff, S. E. (2002). Spatial parallelism of 3D finite difference velocity-stress elastic wave propagation code. *SIAM J. Sci. Comput.*, **24**, 1–19.

-
- Mitchell, A. R. (1969). *Computational methods in partial differential equations*. John Wiley & Sons, New York.
- Miyatake, T. (1980). Numerical simulations of earthquake source process by a three-dimensional crack model. Part I. Rupture process. *J. Phys. Earth*, **28**, 565–598.
- Miyatake, T. (1992). Reconstruction of dynamic rupture process of an earthquake with constraints of kinematic parameters. *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 349–352.
- Miyatake, T., Yagi, Y., & Yasuda, T. (2004). The dynamic rupture process of the 2001 Geiyo, Japan, earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L12612, doi :10.1029/2004GL019721.
- Moczo, P. (1989). Finite-difference technique for sh waves in 2D media using irregular grids : application to the seismic response problem. *Geophys. J. Int.*, **99**, 321–329.
- Moczo, P., Bystricky, E., Carcione, J. M., & Bouchon, M. (1997). Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **87**, 1305–1323.
- Moczo, P., Lucká, M., Kristek, J., & Kristeková, M. (1999). 3d displacement finite difference and a combined memory optimization. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **89**, 69–79.
- Moczo, P., Kristek, J., & Halada, L. (2000). 3d fourth-order staggered-grid finite-difference schemes : stability and dispersion. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **90**, 587–603.
- Moczo, P., Kristek, J., & Bystricky, E. (2001). Efficiency and optimization of the 3D finite-difference modeling of seismic ground motion. *J. Compu. Acoust.*, **9**, 593–609.
- Moczo, P., Kristek, J., Vavrycuk, V., Archuleta, R., & Halada, L. (2002). 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **92**, 3042–3066.
- Moczo, P., Robertsson, J. O. A., & Eisner, L. (2006). The finite-difference time-domain method for modelling of seismic wave propagation. In *Advances in wave propagation in heterogeneous earth*. Elsevier Academic Press.

- Moore, D. E. & Lockner, D. A. (1995). The role of microcracking in shear-fracture propagation in granite. *J. Struct. Geol.*, **17**, 95–114.
- Morton, K. W. & Mayers, D. F. (1994). *Numerical solution of partial differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom; réimpression (2003).
- Mufti, I. R. (1985). Seismic modeling in the implicit mode. *Geophys. Prosp.*, **33**, 619–656.
- Nielsen, S. & Olsen, K. B. (1998). A mixed boundary condition for rupture dynamics in finite difference simulations. *EOS Transactions*, **79**, F630.
- Nielsen, S. B. (1998). Free surface effect on the propagation of dynamic rupture. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 125–128.
- Nielsen, S. B. & Carlson, J. M. (2000). Rupture pulse characterization : self-healing, self-similar, expanding solutions in a continuum model of fault dynamics. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **90**, 1480–1497.
- Nielsen, S. B. & Knopoff, L. (1998). The equivalent strength of geometrical barriers to earthquakes. *J. Geophys. Res.*, **103**, 9953–9965.
- Nielsen, S. B., Carlson, J. M., & Olsen, K. B. (2000). Influence of friction and fault geometry on earthquake rupture. *J. Geophys. Res.*, **105**, 6069–6087.
- Oglesby, D. (1999). *Earthquake dynamics on dip-slip faults*. Thèses de doctorat, Université de Californie, Santa Barbara.
- Oglesby, D. D. & Archuleta, R. (2003). The three-dimensional dynamics of a nonplanar thrust fault. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **93**, 2222–2235.
- Oglesby, D. D., Archuleta, R. J., & Nielsen, S. B. (1998). Earthquakes on dipping faults : the effect of broken symmetry. *Science*, **280**, 1055–1059.
- Oglesby, D. D., Archuleta, R. J., & Nielsen, S. B. (2000). The three-dimensional dynamics of dipping faults. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **90**, 616–628.
- Oglesby, D. D., Day, S. M., & O’Connell, D. R. H. (2003). Dynamic and static interaction of two thrust faults : A case study with general implications. *J. Geophys. Res.*, **108**, ESE 11 1–13.
- Ohminato, T. & Chouet, B. A. (1997). A free-surface boundary condition for including 3d topography in the finite-difference method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **87**, 494–515.

- Ohnaka, M. (1992). Earthquake source nucleation : a physical model for short-term precursors. *Tectonophysics*, **211**, 149–178.
- Ohnaka, M. & Shen, L. (1999). Scaling of the shear rupture process from nucleation to dynamic propagation : implications of geometric irregularity of the rupture surface. *J. Geophys. Res.*, **104**, 817–844.
- Okubo, P. G. (1989). Dynamic rupture modeling with laboratory-derived constitutive relations. *J. Geophys. Res.*, **94**, 12321–12335.
- Olsen, K. B. (2000). Site amplification in the Los Angeles basin from three-dimensional modeling of ground motion. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **90**, S77–S94.
- Olsen, K. B., Archuleta, R. J., & Matarrese, J. R. (1995). Magnitude 7.7 earthquake on the San Andreas fault : three-dimensional ground motion in Los Angeles. *Science*, **270**, 1628–1632.
- Olsen, K. B., Madariaga, R., & Archuleta, R. J. (1997). Three-dimensional dynamic simulation of the 1992 Landers earthquake. *Science*, **278**, 834–838.
- Olsen, K. B., Akinci, A., Rovelli, A., Marra, F., & Malagnini, L. (2006). 3D ground-motion estimation in Rome, Italy. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **96**, 133–146, doi :10.1785/0120030243.
- Operto, S., Virieux, J., Hustedt, B., & Malfanti, F. (2002). Adaptive wavelet-based finite-difference modelling of SH-wave propagation. *Geophys. J. Int.*, **148**, 1–28.
- Palmer, A. & Rice, J. R. (1973). The grow of slip surfaces in the progressive failure of over-consolidated clay. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **332**, 527–548.
- Parisi, A. & Ball, R. C. (2002). Role of surface waves on the relation between crack speed and the work of fracture. *Phys. Review B*, **66**, 165432.
- Peng, C. & Toksöz, M. N. (1995). An optimal absorbing boundary condition for elastic wave modeling. *Geophysics*, **60**, 296–301.
- Peyrat, S. (2003). Résultats non publiés obtenus à Géosciences Azur.
- Peyrat, S. & Olsen, K. (2004). Nonlinear dynamic rupture inversion of the 2000 Western Tottori, Japan, earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L05604.

- Peyrat, S., Olsen, K., & Madariaga, R. (2001). Dynamic modeling of the 1992 Landers earthquake. *J. Geophys. Res.*, **106**, 26467–26482.
- Peyrat, S., Olsen, K., & Madariaga, R. (2004). Which dynamic rupture parameters can be estimated from strong ground motion and geodetic data? *PAGEOPH*, **161**, 2155–2169.
- Piriaux, J. & Lombard, B. (2001). A new interface method for hyperbolic problems with discontinuous coefficients : one-dimensional acoustic example. *J. Compu. Physics*, **168**, 227–248.
- Pitarka, A. (1999). 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **89**, 54–68.
- Pitarka, A. & Irikura, K. (1996). Modeling 3D surface topography by finite-difference method : Kobe-jma station site. *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 2729–2732.
- Poliakov, A. N. B., Dmowska, R., & Rice, J. R. (2002). Dynamic shear rupture interactions with fault bends and off-axis secondary faulting. *J. Geophys. Res.*, **107**, 2295, doi :10.1029/2001JB000572.
- Reches, Z. & Lockner, D. A. (1994). Nucleation and growth of faults in brittle rocks. *J. Geophys. Res.*, **99**, 18159–18173.
- Rice, J. R. (1993). Spatio-temporal complexity of slip on the fault. *J. Geophys. Res.*, **98**, 9885–9907.
- Rice, J. R., Sammis, C. G., & Parson, R. (2005). Off-fault secondary failure induced by a dynamic slip pulse. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **95**, 109–134.
- Richards, P. G. (1976). Dynamic motion near an earthquake fault : a three-dimensional solution. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **66**, 1–32.
- Richtmyer, R. D. & Morton, K. W. (1967). *Difference methods for initial value problems*. Wiley-Interscience, Kreiger, New York ; réimpression (1994).
- Ripperger, J. & Mai, P. M. (2004). Fast computation of static stress changes on 2D faults from final slip distributions. *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L18610, doi :10.1029/2004GL020594.
- Rivera, L. & Kanamori, H. (2005). Representations of the radiated energy in earthquakes. *Geophys. J. Int.*, **162**, 148–155.

- Robertsson, J. O. A. (1996). A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics*, **61**, 1921–1934.
- Rosakis, A. J., Samudrala, O., & Coker, D. (1999). Cracks faster than the shear wave speed. *Science*, **284**, 1337–1340.
- Ruina, A. (1983). Slip instability and state variable friction laws. *J. Geophys. Res.*, **88**, 10359–10370.
- Saenger, E. (2000). *Wave propagation in fractured media : theory and applications of the rotated staggered finite-difference grid*. Thèses de doctorat, Université Karlsruhe, Karlsruhe.
- Saenger, E. H. & Bohlen, T. (2004). Finite-difference modelling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid. *Geophysics*, **69**, 583–591.
- Saenger, E. H. & Shapiro, S. A. (2002). Effective velocities in fractured media : a numerical study using the rotated staggered finite-difference grid. *Geophysical Prospecting*, **50**, 183–194.
- Saenger, E. H., Gold, N., & Shapiro, S. A. (2000). Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave Motion*, **31**, 77–92.
- Saenger, E. H., Gold, N., & Shapiro, S. A. (2004). Effective elastic properties of randomly fractured soils : 3D numerical experiments. *Geophys. Prospecting*, **52**, 183–195.
- Sanchez-Sesma, F. J. (1983). Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 1621–1636.
- Sanchez-Sesma, F. J. & Luzon, F. (1995). Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **85**, 269–284.
- Schneider, J. B. & Wagner, C. L. (1999). FDTD dispersion revisited : faster-than-light propagation. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, **9**, 54–56.
- Scholz, C. H. (1998). Earthquakes and friction laws. *Nature*, **391**, 37–42.
- Scholz, C. H. (2002). *The mechanics of earthquakes and faulting*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Shapiro, N. M., Olsen, K. B., & Singh, S. K. (2000). Wave-guide effect in subduction zones : evidence from three-dimensional modeling. *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 433–436.
- Shibazaki, B. & Matsu'ura, M. (1998). Transition process from nucleation to high-speed rupture propagation : scaling from stick-slip experiments to natural earthquakes. *Geophys. J. Int.*, **132**, 14–30.
- Slawinski, R. A. & Krebs, E. S. (2002). The homogeneous finite-difference formulation of the p-sv-wave equation of motion. *Studia Geophys. Geod.*, **46**, 731–751.
- Spudich, P., Guatteri, M., Otsuki, K., & Minagawa, J. (1998). Use of fault striations and dislocation models to infer tectonic shear stress during the 1995 Hyogo-ken Nambu (Kobe earthquake). *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **88**, 413–427.
- Spudich, P. K. P. (1992). On the inference of absolute stress levels from seismic radiation. *Tectonophysics*, **211**, 99–106.
- Stephen, R. A. (1983). A comparison of finite difference and reflectivity seismograms for marine models. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **72**, 39–58.
- Tada, T. & Yamashita, T. (1997). Non-hypersingular boundary integral equations for two-dimensional non-planar crack analysis. *Geophys. J. Int.*, **130**, 269–282.
- Taflove, A. & Hagness, C. (2000). *Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method*. Artech House, London, United Kindom.
- Tessmer, E., Kessler, D., Kosloff, D., & Behle, A. (1992). Multi-domain Chebyshev-Fourier method for the solution of the equation of motion of dynamic elasticity. *J. Compu. Phys.*, **100**, 355–363.
- Tinti, E., Spudich, P., & Cocco, M. (2005a). Earthquake fracture energy inferred from kinematic rupture models on extended faults. *J. Geophys. Res.*, **110**, B12303, doi :10.1029/2005JB003644.
- Tinti, E., Bizzarri, A., & Cocco, M. (2005b). Modeling the dynamic rupture propagation on heterogeneous faults with rate- and state-dependent friction. *Ann. of Geophys.*, **48**, 327–345.
- Toomey, A. & Bean, C. J. (2000). Numerical simulation of seismic waves using a discrete particle scheme. *Geophys. J. Int.*, **141**, 595–604.

- Trifu, C.-I. & Radulian, M. (1985). Predicted near-field ground motion for dynamic stress-drop models. *Pageoph*, **123**, 173–198.
- Tsuboi, S., Komatitsch, D., Ji, C., & Tromp, J. (2003). Broadband modeling of the 2002 Denali fault earthquake on the earth simulator. *Phys. Earth Planet. Int.*, **139**, 305–312.
- Vilotte, J., Festa, G., & Madariaga, R. (2005). Spectral element simulations of rupture dynamics along kinked faults. In *EOS Transactions*, volume 86, S34A-02. American Geophysical Union, San Francisco, EUA.
- Virieux, J. (1984). SH wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, **49**, 1259–1266.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, **51**, 889–901.
- Virieux, J. (1996). Seismic ray tracing. In *Seismic Modeling of Earth Structure*, pages 223–304. Istituto Nazionale di Geofisica.
- Virieux, J. & Madariaga, R. (1982). Dynamic faulting studied by a finite difference method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 345–369.
- Voisin, C. (2002). Dynamic triggering of earthquakes : the non-linear slip-dependent friction case. *J. Geophys. Res.*, **107**, 2356, doi :10.1029/2001JB001121.
- Voisin, C., Campillo, M., Ionescu, I., Hassani, R., & Nguyen, Q. L. (2002). Process and signature of initiation on a finite fault system : a spectral approach. *Geophys. J. Int.*, **148**, 120–131.
- Vossen, R. V., Robertsson, J. O. A., & Chapman, C. (2002). Finite-difference modeling of wave propagation in a fluid-solid configuration. *Geophysics*, **67**, 618–624.
- Wald, D. J. & Heaton, T. H. (1994). Spatial and temporal distribution of slip for the 1992 Landers, California, earthquake. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **84**, 668–691.
- Wang, R. (1999). A simple orthonormalization method for stable and efficient computations of green's functions. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **89**, 733–741.
- Wang, T. & Tang, X. (2003). Finite-difference modeling of elastic wave propagation : a non-splitting perfectly matched layer approach. *Geophysics*, **68**, 1749–1755.

- Wang, Y., Xu, J., & Schuster, G. T. (2001). Viscoelastic wave simulation in basins by a variable-grid finite-difference method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **91**, 1741–1749.
- Weertman, J. (2002). Subsonic type earthquake dislocation moving at approximately $\sqrt{2}$ \times shear waves velocity on interface between half spaces of slightly different elastic constants. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 1470.
- Wibberley, C. A. J. & Shimamoto, T. (2005). Earthquake slip weakening and asperities explained by thermal pressurization. *Nature*, **436**, 689–692.
- Xia, K., Rosakis, A. J., & Kanamori, H. (2004). Laboratory earthquakes : the sub-Rayleigh-to-supershear rupture transition. *Science*, **303**, 1859–1861.
- Xia, K., Rosakis, A. J., Kanamori, H., & Rice, J. R. (2005). Laboratory earthquakes along inhomogeneous faults : Directionality and supershear. *Science*, **308**, 681–684.
- Xie, Z., Chan, C. H., & Zhang, B. (2002). An explicit fourth-order orthogonal curvilinear staggered-grid fdtd method for maxwell's equations. *J. Comput. Physics*, **175**, 739–763.
- Yamashita, F., Fukuyama, E., & Omura, K. (2004). Estimation of fault strength : reconstruction of stress before the 1995 Kobe earthquake. *Science*, **306**, 261–263.
- Yamashita, T. (1983). Peak and root-mean-square accelerations radiated from circular cracks and stress drop associated with seismic high-frequency radiation. *J. Phys. Earth*, **31**, 225–249.
- Yee, K. S. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, **14**, 302–307.
- Zahradnik, J. & Priolo, E. (1995). Heterogeneous formulations of elastodynamic equations and finite-difference schemes. *Geophys. J. Int.*, **120**, 663–676.
- Zahradník, J., Moczo, P., & Hron, F. (1993). Testing four elastic finite difference schemes for behaviour at discontinuities. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **83**, 107–129.
- Zhang, J. (1997). Quadrangle-grid velocity-stress finite-difference method for elastic-wave-propagation simulation. *Geophys. J. Int.*, **131**, 127–134.

- Zhang, J. (2005). Elastic wave modeling in fracture media with an explicit approach. *Geophysics*, **70**, T75–T85.
- Zhang, J. & Tielin, L. (1999). P-SV-wave propagation in heterogeneous media : grid method. *Geophys. J. Int.*, **136**, 431–438.
- Zhang, W., Iwata, T., Irikura, K., Sekiguchi, H., & Bouchon, M. (2003). Heterogeneous distribution of the dynamic source parameters of the Chi-Chi, Taiwan, earthquake. *J. Geophys. Res.*, **108**, 2232, doi :10.1029/2002JB001889.
- Zheng, G. & Rice, J. R. (1998). Condition under which velocity weakening friction allows a self-healing versus a cracklike mode of rupture. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **88**, 1466–1483.

Index bibliographique

- Aagaard et al. (2001), 166, 278
Aagaard et al. (2004), 211, 231
Aagaard (2000), 231
Adda-Bedia & Madariaga (2005),
299, 300
Aki & Larner (1970), 12
Aki & Richards (2002), 47, 136,
146, 147, 160
Aki (1979), 160
Alford et al. (1974), 12, 21, 32, 34,
35, 41, 42, 52
Alterman & Karal (1968), 12, 52,
84
Ampuero & Vilotte (2002), 142, 231
Ampuero (2002), 231
Anderson (1905), 141
Ando et al. (2004), 230
Andrews & Ben-Zion (1997), 167,
168, 230, 294
Andrews (1973), 55
Andrews (1976a), 96, 150, 153, 154,
156, 158, 165, 192, 231, 245,
246
Andrews (1976b), 150, 154, 156,
157, 162, 164, 165, 196, 224,
241, 261, 273, 282
Andrews (1985), 136, 174, 231
Andrews (1999), 96, 97, 209–211,
216, 231, 232, 241, 263, 295
Andrews (2002), 294
Andrews (2004), 152, 244, 246, 280,
301
Andrews (2005), 96, 135, 143, 148,
241
Aochi & Fukuyama (2002), 174, 211,
231, 280, 294, 299–301
Aochi & Madariaga (2003), 211, 231,
278, 280, 294
Aochi & Matsu'ura (2002), 141
Aochi & Olsen (2004), 166
Aochi et al. (2000a), 230, 231
Aochi et al. (2000b), 136, 216, 232,
270, 293, 309
Aochi et al. (2002), 166, 192, 231,
278, 293
Aochi et al. (2005), 13
Aochi (2004), 270
Aoi & Fujiwara (1999), 45
Archuleta & Frazier (1978), 93, 174,
231
Archuleta (1984), 167
Aubry & Clouteau (1991), 12
Aubry et al. (1985), 12
Backus & Mulcahy (1976), 97, 208,
209
Bard & Bouchon (1985), 12
Barenblatt (1959a), 148, 245
Barenblatt (1959b), 148, 245
Ben-Jemaa et al. (2006), 96, 231,
246, 283
Ben-Zion & Huang (2002), 167, 174,
196, 230

- Ben-Zion & Sammis (2003), 145,
167, 241
- Benitez & Olsen (2005), 11, 13
- Berenger (1994), 99, 177
- Beroza & Ellsworth (1996), 141
- Bizzarri & Cocco (2003), 142
- Bizzarri & Cocco (2005), 96, 142
- Bizzarri et al. (2001), 142
- Bohlen & Saenger (2006), 55, 87–
90
- Boore (1970), 52
- Boore (1972), 85, 86
- Bouchon & Rosakis (2002), 294
- Bouchon & Vallée (2003), 168
- Bouchon et al. (2001), 168, 294
- Bouchon (1997), 278
- Brace & Byerlee (1966), 141
- Brune (1970), 138
- Burrige et al. (1979), 150, 164
- Burrige (1969), 12, 136, 231
- Burrige (1973), 160, 165, 261, 282
- Campillo & Archuleta (1993), 297
- Campillo & Ionescu (1997), 141
- Capdeville et al. (2003), 12
- Cerjan et al. (1985), 99
- Chaljub et al. (2003), 12
- Chaljub (2000), 12
- Chambon & Schmittbuhl (2002),
142
- Chen et al. (1987), 160
- Chew & Liu (1996), 99, 113
- Chouet (1986), 93, 97, 208
- Cianetti et al. (2005), 211, 278, 299
- Clayton & Engquist (1977), 99
- Coates & Schoenberg (1995), 74,
95
- Cocco & Bizzarri (2002), 142
- Cochard & Madariaga (1994), 136
- Cochard & Madariaga (1996), 142
- Cohee & Beroza (1994), 297
- Coker & Rosakis (2001), 167
- Collino & Tsogka (2001), 99, 103,
104
- Cruz-Atienza & Virieux (2003), 232
- Cruz-Atienza & Virieux (2004), 85,
97, 166, 211, 232, 291, 297
- Cruz-Atienza et al. (2002), 100
- Cruz-Atienza et al. (2004a), 85, 166,
231, 297
- Cruz-Atienza et al. (2004b), 85, 87,
100, 305
- Cruz-Atienza et al. (2006), 294
- Dablain (1986), 12, 21, 22
- Dalguer & Day (2004), 96, 235, 247,
259
- Dalguer & Day (2006), 96, 97, 208,
216, 235, 247, 259, 263, 293,
295, 299
- Dalguer et al. (2001), 13, 231
- Dalguer et al. (2002), 231, 278
- Dalguer et al. (2003a), 135, 231
- Dalguer et al. (2003b), 135, 241
- Dalguer (2005), 260
- Dalhen (1977), 153
- Das & Aki (1977a), 166, 230
- Das & Aki (1977b), 93, 136, 157–
159, 174, 177, 194, 231, 239,
240, 246
- Das & Kostrov (1987), 136, 231
- Das (1976), 93
- Day & Bradley (2001), 12
- Day et al. (2005), 96, 152, 232, 241,
246, 250, 253, 259, 260, 262,
263, 273, 293
- Day (1977), 12, 93, 96, 174, 231
- Day (1982a), 96, 231
- Day (1982b), 96, 150, 156, 165, 166,
230, 247, 260
- Dieterich (1978), 141
- Dieterich (1979), 142

- Dieterich (1992), 141, 142
Dormy & Tarantola (1995), 13
Dunham & Archuleta (2004), 168
Dunham et al. (2003), 166, 230
Ellsworth & Beroza (1995), 141
Emerman et al. (1982), 25
Eshelby (1957), 139
Faccioli et al. (1997), 12
Festa & Nielsen (2003), 100, 113
Festa (2004), 231
Freund (1972), 153
Freund (1979), 147
Freund (1990), 144, 156, 165, 224
Fryer et al. (1991), 231
Fukuyama & Madariaga (1995), 136, 232
Fukuyama & Olsen (2002), 166
Fung (1977), 109
Gelis et al. (2005), 87
Gelis (2003), 89
Gottschamer & Olsen (2001), 86
Graves (1996), 12, 42, 44, 54, 85, 86
Griffith (1920), 156, 239
Gutteri & Spudich (2000), 142, 278
Hamano (1974), 157, 159, 161, 240, 245, 292
Hardebeck & Hauksson (2001), 280
Harris & Archuleta (2004), 96, 227, 258, 299, 309, 335
Harris & Day (1993), 230
Harris & Day (1997), 167, 168, 174, 196, 230, 294
Harris & Day (1999), 230
Hastings et al. (1996), 99, 177
Hauksson (1994), 280
Hayashi et al. (2001), 45
Hernandez et al. (1999), 297
Hestholm (2003), 86
Higdon (1991), 99
Holberg (1987), 12, 22, 42, 74
Husseini & Randall (1976), 155, 160
Husseini et al. (1975), 153
Husseini (1977), 155
Ida & Aki (1972), 140
Ida (1972), 148–150, 152, 153, 192, 224, 245, 246, 260
Iio (1992), 141
Iio (1995), 141
Ionescu & Campillo (1999), 142
Irwin (1957), 157, 239, 292
Irwin (1960), 157, 239
Jastram & Tessmer (1994), 45
Jing (2003), 232
Kame & Yamashita (1999), 136, 189, 232, 283
Kame et al. (2003), 166, 231, 278, 283
Kanamori (1994), 140, 147
Kang & Baag (2004), 12, 45, 46, 54
Kase & Kuge (2001), 230
Kaser & Igel (2001), 13
Kelly et al. (1976), 12, 41, 53, 84, 85
Knopoff & Ni (2001), 189, 247, 265, 282, 283
Komatitsch & Tromp (1999), 12
Komatitsch & Tromp (2002), 12
Komatitsch & Vilotte (1998), 12
Komatitsch et al. (2004), 11, 12
Komatitsch (1997), 12
Kostrov (1964), 189, 191
Kostrov (1966), 93, 156
Kostrov (1974), 153
Lambaré & Virieux (2006), 11
Lapusta et al. (2000), 136, 142
Levander (1988), 12, 21, 42, 43, 50, 54, 74, 78, 86, 176

- Lombard & Piroux (2004), 91
Luo & Shuster (1990), 52, 54
Lysmer & Drake (1972), 12
Madariaga & Ampuero (2005), 169, 231, 299
Madariaga & Olsen (2000), 95, 165, 166, 247, 282, 298
Madariaga & Perrier (1991), 1
Madariaga et al. (1998), 51, 93, 97, 166, 176, 177, 189, 208, 209, 212, 216, 235, 246, 263, 292, 293, 295, 299
Madariaga (1976), 4, 12, 43, 50, 52–54, 73, 93, 97, 127, 140, 160, 174–177, 208, 210, 231, 233, 234, 263
Madariaga (2005), 169
Magnier et al. (1994), 56
Marcinkovich & Olsen (2003), 99, 104, 113
Marfurt (1984), 12
Marone & Kilgore (1993), 142
Mikumo & Miyatake (1978), 231
Mikumo & Miyatake (1979), 166
Mikumo & Miyatake (1995), 278
Mikumo & Yagi (2003), 142
Mikumo et al. (1987), 174
Mikumo et al. (2000), 278
Mikumo et al. (2003), 142
Mikumo (1994), 278
Minkoff (2002), 13, 44, 54
Mitchell (1969), 33, 34, 41
Miyatake et al. (2004), 278
Miyatake (1980), 166
Miyatake (1992), 278
Moczo et al. (1997), 13
Moczo et al. (1999), 12, 44
Moczo et al. (2000), 42, 54
Moczo et al. (2001), 12, 44, 54
Moczo et al. (2002), 12, 85, 89
Moczo et al. (2006), 13, 85, 86
Moczo (1989), 45
Moore & Lockner (1995), 135
Morton & Mayers (1994), 37, 39
Mufti (1985), 25
Nielsen & Carlson (2000), 192
Nielsen & Knopoff (1998), 230
Nielsen & Olsen (1998), 178
Nielsen et al. (2000), 142
Nielsen (1998), 166, 230
Oglesby & Archuleta (2003), 231
Oglesby et al. (1998), 166, 230
Oglesby et al. (2000), 166, 174, 230
Oglesby et al. (2003), 166, 174, 230
Oglesby (1999), 231
Ohminato & Chouet (1997), 52, 54, 86, 88
Ohnaka & Shen (1999), 142
Ohnaka (1992), 142
Okubo (1989), 142
Olsen et al. (1995), 44
Olsen et al. (1997), 150, 167, 176, 177, 196, 209, 278, 297, 298, 301, 305
Olsen et al. (2006), 13
Olsen (2000), 12, 54, 85, 174, 198
Operto et al. (2002), 41, 110
Palmer & Rice (1973), 148, 245
Parisi & Ball (2002), 247, 265, 282
Peng & Toksöz (1995), 99
Peyrat & Olsen (2004), 209, 278
Peyrat et al. (2001), 166, 176, 209, 278, 298, 300–302, 305
Peyrat et al. (2004), 278
Peyrat (2003), 89
Piroux & Lombard (2001), 91
Pitarka & Irikura (1996), 86
Pitarka (1999), 12, 44, 45, 54
Poliakov et al. (2002), 231, 278
Reches & Lockner (1994), 135

- Rice et al. (2005), 148, 241
Rice (1993), 142
Richards (1976), 140, 160
Richtmyer & Morton (1967), 41
Ripperger & Mai (2004), 278
Rivera & Kanamori (2005), 155
Robertsson (1996), 86, 90
Rosakis et al. (1999), 167
Ruina (1983), 142, 192
Saenger & Bohlen (2004), 13, 55, 87
Saenger & Shapiro (2002), 95
Saenger et al. (2000), 4, 13, 42, 43, 55–57, 73–80, 100, 174–177, 203, 233, 234, 315
Saenger et al. (2004), 13, 42, 55, 88
Saenger (2000), 73, 76, 87
Sanchez-Sesma & Luzon (1995), 12
Sanchez-Sesma (1983), 12
Schneider & Wagner (1999), 31
Scholz (1998), 142, 190
Scholz (2002), 138
Shapiro et al. (2000), 174, 198
Shibazaki & Matsu'ura (1998), 142
Slawinski & Krebes (2002), 84
Spudich et al. (1998), 278
Spudich (1992), 278
Stephen (1983), 53
Tada & Yamashita (1997), 136
Taflove & Hagness (2000), 13, 29, 31, 40, 41, 45, 53
Tessmer et al. (1992), 12
Tinti et al. (2005a), 278
Tinti et al. (2005b), 142
Toomey & Bean (2000), 13
Trifu & Radulian (1985), 93, 189, 209
Tsuboi et al. (2003), 11, 12
Vilotte et al. (2005), 169, 231, 299
Virieux & Madariaga (1982), 51, 93, 97, 160, 176, 177, 189, 208–210, 231, 234, 292
Virieux (1984), 41, 53
Virieux (1986), 12, 42, 50, 53, 73, 77, 78, 85, 176
Virieux (1996), 11
Voisin et al. (2002), 142
Voisin (2002), 142
Vossen et al. (2002), 86
Wald & Heaton (1994), 297, 298, 300–302
Wang & Tang (2003), 100
Wang et al. (2001), 12, 45
Wang (1999), 89
Weertman (2002), 167, 230
Wibberley & Shimamoto (2005), 143, 241
Xia et al. (2004), 167, 168
Xia et al. (2005), 167, 168, 230, 294
Xie et al. (2002), 13, 45
Yamashita et al. (2004), 278
Yamashita (1983), 160
Yee (1966), 53
Zahradník et al. (1993), 86
Zahradnik & Priolo (1995), 85
Zhang & Tielin (1999), 13, 44, 55, 56, 74
Zhang et al. (2003), 278
Zhang (1997), 13, 44, 56
Zhang (2005), 13, 45, 55, 56
Zheng & Rice (1998), 142

Rupture Dynamique des Failles Non-Planaires en Différences Finies

Ce travail est divisé en deux parties : la première est consacrée à la propagation des ondes et la seconde à la rupture dynamique des séismes. Dans la première partie je propose une révision des concepts de base des méthodes en différences finies (DF). Un accent particulier est fait sur la méthode choisie en DF, basée sur une grille partiellement en quinconce (GPQ), utilisée dans la deuxième partie du travail pour étudier la rupture des séismes. Les conditions aux limites sur la surface libre ainsi qu'à l'intérieur d'une fracture plane sont traitées, en discutant certaines approches déjà établies dans chaque cas. La formulation et la mise au point des conditions de radiation « *Perfectly Matched Layer* » (PML) sont abordées en trois dimensions (3D). Des tests d'absorption sont ainsi présentés en milieux de propagation homogènes et hétérogènes.

Dans la deuxième partie, je propose premièrement une autre révision, cette fois-ci sur la mécanique de la rupture. Une fois ainsi posé le problème central de ce travail, j'aborde la modélisation numérique de la rupture dynamique de failles non-planaires en deux dimensions (2D). Une nouvelle approche en DF permettant de résoudre ce problème complexe est donc introduite. Une loi d'échelle, reliant le pas de discrétisation et le nombre de points à l'intérieur de la source, permet d'augmenter la précision des solutions en réduisant les oscillations numériques. Le passage à la géométrie 3D est fait. Sa précision et sa convergence sont analysées en termes de la résolution de la zone de cohésion. La méthode est validée dans le cas de ruptures spontanées planes et non-planaires (*i.e.* curvilignes) grâce à la comparaison des résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes numériques indépendantes.

Finalement, la méthode est appliquée le long de failles non-planaires sous l'effet d'une charge tectonique biaxiale. La géométrie de la faille s'est avérée un facteur déterminant dans la propagation de la rupture. L'analyse de la rupture du séisme de Landers (1992) illustre ce fait, où des simulations faites en tenant compte de la vraie géométrie du séisme sont fondamentalement différentes de celles réalisées par d'autres auteurs où la faille a été considérée comme plane.

Mots-clés : rupture dynamique, failles non-planaires, différences finies, séisme de Landers, loi d'échelle, loi de frottement, énergie, source sismique, propagation des ondes, conditions d'absorption PML.

Finite Differences Modeling of Dynamic Rupture on Nonplanar Faults

This work is separated into two parts : the first part is devoted to wave propagation, and the second part treats the dynamic rupture of earthquakes. In the first part I propose a general review of the basic concepts concerning finite difference (FD) methods. Based on a partly staggered grid, the FD technique used in the second part of the work to study the rupture of earthquakes is analyzed in detail. The free surface and the planar crack boundary conditions are treated in separated sections. Several approaches, previously introduced by different authors, are discussed for each problem. The formulation and implementation of the Perfectly Matched Layer (PML) absorbing boundary conditions in three dimensions (3D) are described. Different tests to illustrate the performance of these boundary conditions are presented in homogeneous and heterogeneous media.

In the second part I firstly provide an overview of rupture mechanics. After formulating the main problem of this study, I tackle the numerical modeling of nonplanar faults in two dimensions (2D). A new approach allowing these kinds of complex simulations is then introduced. A scaling law, relating the grid size to the amount of grid points discretizing the source, allows an increase in the precision of solutions by reducing the numerical oscillations. The extension of the rupture model to 3D is performed. Both numerical precision and convergence are analyzed in terms of the cohesive zone resolution. The model is validated for the spontaneous rupture along planar and nonplanar (*i.e.* curvilinear) faults by comparing solutions with those yielded by two independent numerical approaches.

Finally, the method is applied to the case of nonplanar faults loaded in a biaxial tectonic stress regime. The fault geometry becomes an extremely important factor for rupture propagation under these conditions. A dynamic rupture analysis of the 1992 Landers earthquake confirms the importance of the fault geometry, since fundamentally different results are obtained when considering the real rupture surface with respect to those reported by previous authors where the fault was assumed to be planar.

Key-words : dynamic rupture, nonplanar faults, finite differences, Landers earthquake, scaling law, friction law, energy, seismic source, wave propagation, PML absorbing conditions.

Printing instructions

- Print double-sided on A4 paper.
- Cut all the sheets along this line.