



PUBLICACION
NUMERO 70
DE LA
FACULTAD
DE
INGENIERIA

Universidad Nacional Autónoma de México
FACULTAD DE INGENIERIA

*Contribución al estudio de ondas de avenida
en canales*

José Luis SANCHEZ B.
Antonio CAPELLA V.
Ismael HERRERA R.

Sobretiro al No. 2 del Volumen XXXIII
de la
Revista "INGENIERIA"
México, abril de 1963

Contribución al estudio de ondas de avenida en canales

J. L. SANCHEZ BRIBIESCA, A. CAPELLA VIZCAINO e Ismael HERRERA *

INTRODUCCION

El régimen de los numerosos ríos que cruzan el Valle de México está sujeto, en general, al tipo de precipitación predominante, lo que hace que se presenten los gastos máximos en la época de lluvias.

Del crecimiento progresivo de la ciudad de México ha surgido la necesidad de canalizar o entubar estos ríos, por una parte para no entorpecer la circulación cada vez mayor y por otra como una medida de higiene y seguridad contra posibles inundaciones, pues es frecuente que estos ríos se utilicen como estructuras evacuadoras de los colectores pluviales y de aguas negras de la ciudad.

Es muy frecuente, además, que el peligro de desbordamiento se agrave en aquellos tramos en donde hay necesidad de construir pilas de puente que provocan estrangulamientos en las secciones, y como consecuencia un incremento de los tirantes en la proximidad de dichas obstrucciones. Por estas razones, la Comisión Hidrológica de la Cuenca del Valle de México interesó al Instituto de Ingeniería en el estudio de problemas relacionados con el cálculo del tránsito de avenidas a lo largo de este tipo de canales, es decir, el cálculo de la variación de velocidades, gastos y fundamentalmente de tirantes en cada una de las secciones transversales del canal.

Para resolver este problema pueden ser usados métodos teóricos y métodos experimentales. Los métodos teóricos se pueden clasificar en hidráulicos e hidrológicos. Los primeros se basan en la solución de las ecuaciones diferenciales del flujo variado, mientras los hidrológicos no hacen uso directo de esas ecuaciones, aunque en cierto modo se aproximan a su solución. Estos últimos sólo dan resultados aceptables en aquellos problemas que consisten en el estudio del tránsito de una avenida en un río de grandes dimensiones, en el que no se presenten dificultades adicionales, como obstáculos interpuestos, afluentes, etc.

Los métodos hidrológicos parten de las relaciones entre el almacenaje en un tramo del canal y la descarga de sus secciones extremas, (ver [2] pág. 601 y sig. y [3] pág. 676 y sig.), utilizando además una serie de coeficientes cuyo valor no es bien conocido si no se trata de un cauce muy estudiado.

Por estas razones hemos estudiado exclusivamente los métodos hidráulicos, que consisten en

la aplicación directa e integración de las ecuaciones diferenciales del flujo variado. La solución analítica de dichas ecuaciones es demasiado laboriosa, por lo cual se procede en general a una solución por incrementos finitos en el canal; sin embargo, aún con esta solución, existen problemas en los cuales las condiciones de frontera obligan a un proceso de tanteos sumamente largo aunque no inabordable.

Una forma más racional de resolver dichas ecuaciones es el método llamado de las características, del que se ocupan los capítulos siguientes. Se presentan primero los fundamentos del método con la obtención de las "ecuaciones de las características" y en seguida dos métodos para su integración por incrementos finitos. Se propone también un procedimiento que permite aplicar el método de las características en aquellos canales con irregularidades tales como el estrechamiento de su sección.

Como una ilustración de los procedimientos de cálculo descritos, se incluyen también dos ejemplos numéricos de casos particulares, que consisten, el primero en el cálculo del tránsito de una avenida a lo largo de un canal de sección transversal regular, y el segundo a lo largo del mismo canal con una serie de estrechamientos en el cauce.

Finalmente se presenta una comparación de los resultados teóricos con los resultados obtenidos experimentalmente a partir de un modelo hidráulico que se construyó en el Laboratorio de Hidráulica del Instituto de Ingeniería, y con el cual se comprobó la bondad de los métodos propuestos.

I. METODO DE LAS CARACTERISTICAS

Lista de símbolos utilizados

- y — tirante de agua en el canal
- A — área de la sección transversal
- T — ancho de la superficie libre
- $C = \sqrt{gD}$ celeridad
- V — velocidad
- $D = \frac{A}{T}$ — tirante medio
- x — abscisa de la sección transversal
- Δ — incremento
- t — tiempo

* Investigadores del Instituto de Ingeniería.

Q — gasto
 s_0 — pendiente del fondo
 S_f — pendiente hidráulica
 R — radio hidráulico
 n — coeficiente de rugosidad de Manning
 $E = y + \frac{v^2}{2g}$ — energía específica.

Los subíndices u indican características aguas arriba de la sección considerada para un tiempo anterior, los subíndices d indican lo mismo aguas abajo.

Fundamento

El método consiste en una integración numérica, por incrementos finitos, de las dos ecuaciones fundamentales de escurrimiento, es decir, las que expresan el teorema de Bernoulli y el principio de continuidad: (ver [2] págs. 526 y 528).

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = S_0 - S_f \quad (1)$$

$$V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Para realizar esta integración conviene hacer un cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ t &= t(\xi, \eta) \end{aligned}$$

de tal modo que se cumpla (ver [1] pág. 100 y siguientes)

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = (V + C) \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad (3)$$

$$y \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = (V - C) \frac{\partial t}{\partial \eta} \quad (4)$$

Como por otra parte se tiene

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi}$$

$$y \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta}$$

Resolviendo este sistema con respecto a $\frac{\partial y}{\partial x}$ se

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial t}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial t}{\partial \xi}}$$

y en forma análoga puede determinarse $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$ y $\frac{\partial V}{\partial t}$. Al sustituir estas expresiones en las ecuacio-

nes (1) y (2), teniendo en cuenta (3) y (4) y supuesto un canal rectangular o suficientemente ancho, en el que $dy = dD$, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (V + 2C) = g(S_0 - S_f) \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (V - 2C) = g(S_0 - S_f) \frac{\partial t}{\partial \eta} \quad (6)$$

Las ecs. (3), (4), (5) y (6) se llaman ecuaciones de las características.

Las ecuaciones (3) y (4) con $\eta = \text{cte.}$ representan una familia de curvas en el plano $x-t$ con una pendiente $\frac{1}{V+C}$ en cada punto, y con $\xi = \text{cte.}$ otra familia de curvas con pendiente $\frac{1}{V-C}$. Estas curvas reciben el nombre de características.

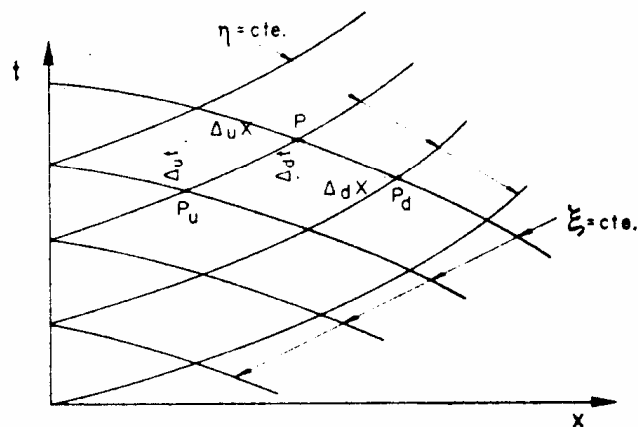


FIG. 1

Las ecuaciones (5) y (6) indican que la derivada de $V + 2C$ a lo largo de una característica $\eta = \text{cte.}$ vale $g(S_0 - S_f) \frac{\partial t}{\partial \xi}$ y que la derivada de $V - 2C$ a lo largo de $\xi = \text{cte.}$ vale $g(S_0 - S_f) \frac{\partial t}{\partial \eta}$.

Con las consideraciones anteriores se puede calcular $V + 2C$ en un punto P de la Fig. 1, en función de V_u y C_u en un punto P_u , y $V - 2C$ en ese punto P en función de V_d y C_d en un punto P_d ; con lo cual resulta inmediato el cálculo de V y C . La posición del punto P se puede determinar con las ecuaciones (3) y (4), y los incrementos de $V \pm 2C$ con las ecuaciones (5) y (6). Como en estas expresiones aparecen elementos que dependen de las características hidráulicas en P que se desean calcular, es necesario proceder por tanteos. Para esto se describirán a continuación diversos métodos para realizar estos tanteos.

Primer método

Al tomar incrementos finitos, las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) quedarían

$$\Delta_u x = (V + C) \Delta_u t \quad (7)$$

$$\Delta_d x = (V - C) \Delta_d t \quad (8)$$

$$\Delta_u (V + 2C) = g (S_0 - S_f) \Delta_u t \quad (9)$$

$$\Delta_d (V - 2C) = g (S_0 - S_f) \Delta_d t \quad (10)$$

Supuesto un intervalo de tiempo

$$\Delta t = \Delta_u t = \Delta_d t = \text{cte.}$$

(ver [2] págs. 587 y sig.) puede procederse al tanteo de las distancias $\Delta_u x$ y $\Delta_d x$ del siguiente modo:

La integración de la ecuación (9) entre P_u y P sería

$$V + 2C = V_u + 2C_u + gS_0 \Delta t - g \frac{S_f + S_{fu}}{2} \Delta t$$

que se puede escribir

$$V + 2C = G_u + K \quad (11)$$

donde

$$G_u = V_u + 2C_u + K_u \quad (12)$$

$$K_u = \frac{1}{2} g (S_0 - S_{fu}) \Delta t \quad (13)$$

$$K = \frac{1}{2} g (S_0 - S_f) \Delta t \quad (14)$$

Análogamente de la ecuación (10) se obtiene

$$V - 2C = G_d + K \quad (15)$$

en la que

$$G_d = V_d - 2C_d + K_d \quad (16)$$

$$K_d = \frac{1}{2} g (S_0 - S_{fd}) \Delta t \quad (17)$$

Al eliminar K y V de las ecuaciones (11) y (15), se tendrá

$$C = \frac{G_u + G_d}{2} \quad (18)$$

y de la eliminación de C

$$V - K = \frac{G_u + G_d}{2} \quad (19)$$

Por otra parte de la fórmula de Manning

$$S_f = \left(\frac{nV}{R^{2/3}} \right)^2$$

sustituida en la ecuación (14), con $R^{2/3} = D^{2/3}$, se obtendrá

$$V = \sqrt{\frac{g \Delta t S_0 - 2K}{n^2 g^{1/3} \Delta t}} C^{4/3} \quad (20)$$

Esta ecuación permite construir dos gráficas auxiliares como las de las figuras 2 y 3.

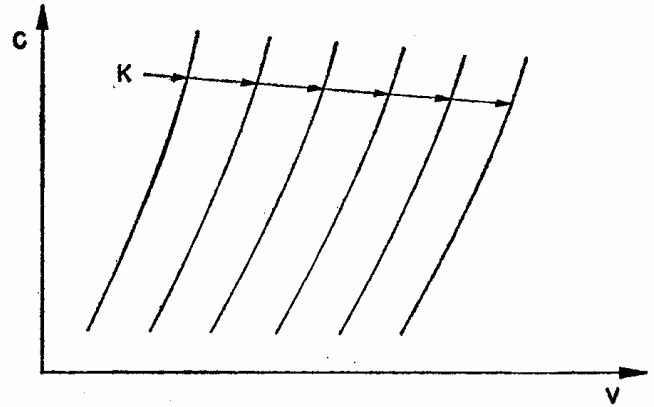


FIG. 2

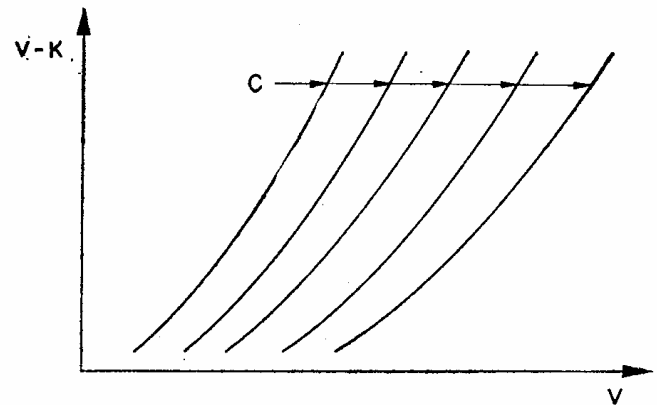


FIG. 3

Al resolver el problema se dibujan simultáneamente gráficas $V = V(x, t)$ $C = C(x, t)$ como en las figuras 4 y 5.

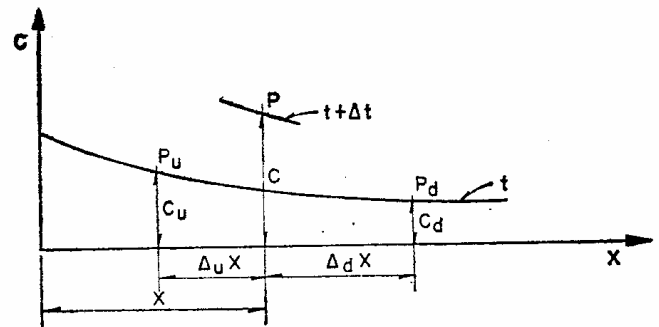


FIG. 4

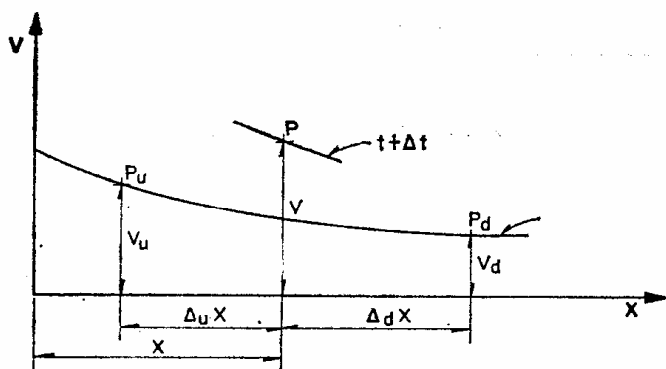


FIG. 5

y en función de las curvas

$$V = V(x, t) \text{ y } C = C(x, t)$$

para un tiempo t , puede generarse las curvas para $t + \Delta t$. Para calcular un punto P , a una distancia x y para un tiempo $t + \Delta t$, se seguirán los pasos descritos a continuación:

- 1o. Se escogen dos distancias $\Delta_u x$ y $\Delta_d x$, con lo cual quedan fijos los puntos P_u y P_d
- 2o. De las Figs. 4 y 5 se obtienen V_u , C_u , V_d y C_d
- 3o. De la Fig. 2 se obtienen K_u y K_d
- 4o. Se calcula C con la ecuación (18)
- 5o. Se calcula $V - K$ con la ecuación (19)
- 6o. Se determina V de la Fig. 3
- 7o. Con los valores de V y de C obtenidos se comprueban las ecuaciones (7) y (8), tomando promedios entre $P_u P$ y $P_d P$

$$\Delta_u x = \frac{(V + C) + (V_u + C_u)}{2} \Delta t$$

$$\Delta_d x = -\frac{(V - C) + (V_d - C_d)}{2} \Delta t$$

Si los valores $\Delta_u x$ y $\Delta_d x$ así calculados no coinciden con los supuestos se repite el procedimiento.

Segundo método

Puede procederse al cálculo sin necesidad de escoger $\Delta t = \text{cte.}$ (ver [3] pág. 700 y sig.)

Si llamamos

$$Y = g(S_0 - S_f) \quad (21)$$

de la fórmula de Manning

$$Y = g(S_0 - n^2 g^{4/3} \frac{V^2}{C^{8/3}}) \quad (22)$$

y además con

$$Z = \frac{V^2}{C^{8/3}} \quad (23)$$

Se tendrá $Y = (gS_0 - n^2 g^{4/3} Z)$ que es la ecuación de una recta en el plano $Y-Z$.

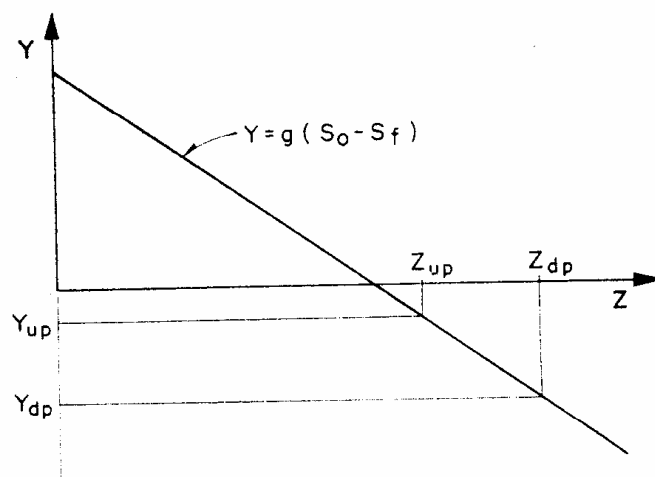


FIG. 6

Con la ecuación (23) puede dibujarse una gráfica en el plano $V - C$, con una familia de curvas con Z como parámetro, como la de la Fig. 7.

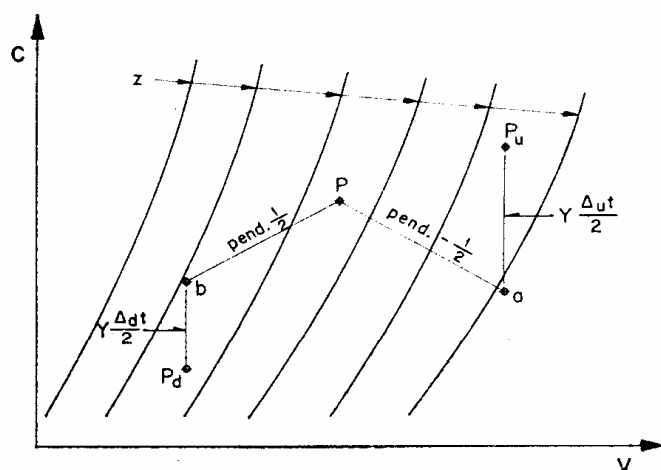


FIG. 7

Las ecuaciones (9) y (10) pueden entonces ser escritas como sigue:

De (9) se obtiene

$$V + 2C - V_u - 2C_u = g(S_0 - S_f) \Delta_u t$$

$$2(C - C_u) = Y \Delta_u t - (V - V_u)$$

de donde

$$C = C_u + \frac{\Delta_u t}{2} Y - \frac{1}{2} (V - V_u); \quad (24)$$

análogamente de (10)

$$C = C_d - \frac{\Delta_d t}{2} Y + \frac{1}{2} (V - V_d). \quad (25)$$

Para calcular C y V en un punto como P de la Fig. 1, a partir de puntos como P_u y P_d , puede procederse como sigue:

1o. La posición de P se puede determinar en el plano $x-t$, trazando rectas de pendiente $\frac{1}{V_u + C_u}$ y $\frac{1}{V_d - C_d}$ a partir de P_u y P_d respectivamente. El tomar los valores de V y de C en los puntos P_u y P_d para determinar la dirección de las características (en lugar de los promedios entre P_u y P y entre P_d y P) no lleva en general a errores de consideración.

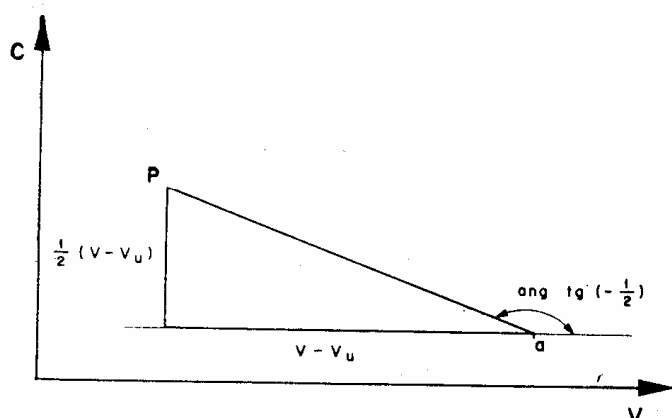
2o. Se encuentran los valores Z_u y Z_d en la Fig. 7, ya que V_u , C_u , V_d y C_d son conocidos, y se marcan en esa misma gráfica los puntos P_u y P_d .

3o. Se supone un valor de Z y se calculan los promedios

$$Z_{up} = \frac{Z_u + Z}{2} \quad Z_{dp} = \frac{Z_d + Z}{2}$$

4o. Con Z_{up} y Z_{dp} se encuentran, de la Fig. 6, los valores Y_{up} y Y_{dp} , y los productos $Y_{up} \frac{\Delta u t}{2}$ y $Y_{dp} \frac{\Delta d t}{2}$

5o. Para encontrar el punto P , se procede entonces a la construcción gráfica mostrada en la Fig. 7, y que queda justificada por la estructura de las ecuaciones (24) y (25). Efectivamente, la ecuación (24) indica que para encontrar C debemos partir de C_u , sumarle a este valor $Y \frac{\Delta u t}{2}$, lo que lleva al punto "a", y restar la mitad de la diferencia $(V - V_u)$. Esto se puede hacer gráficamente como se indica a continuación



Como V no es conocida, sólo puede saberse que el punto P se encuentra sobre la recta que parte de "a" con pendiente $-\frac{1}{2}$. Al hacer la misma operación a partir del punto P_d y con el uso

de la ecuación (25), se determina otra recta de pendiente $1/2$, cuya intersección con la primera, fija el punto P .

6o. Se lee el valor de Z para el punto P determinado y, si no coincide con el supuesto, se repite el cálculo desde el punto 3.

Los dos métodos expuestos son fácilmente sistematizables, si bien el primero requiere mayor cantidad de operaciones aritméticas que el segundo, pero tiene la ventaja sobre éste, de que al dibujar las curvas $V = V(x, t)$ y $C = C(x, t)$ es más fácil detectar los errores que pudieran cometerse, pues éstos dan origen a irregularidades en la curvatura, fáciles de observar. Al aplicar el 2o. método podrían dibujarse estas curvas y tener la misma ventaja, pero esto aumentaría considerablemente el trabajo. Otro inconveniente que presenta el último método es el de la elección conveniente de escalas, sobre todo para dibujar la gráfica de la Fig. 7.

Condiciones de frontera

Para aplicar el método de las características al cálculo del paso de una avenida a lo largo de un canal, es necesario conocer sus características geométricas y su rugosidad.

Las condiciones de frontera que se suelen conocer son: el régimen establecido antes de pasar la avenida, o sea, tirantes y velocidades a lo largo del canal, el hidrograma de la avenida en determinada estación, o bien la curva de tirantes-tiempos, y las condiciones de descarga en el extremo aguas abajo.

Al conocer el régimen inicial puede ser trazada la característica de pendiente $\frac{1}{V + C}$ que parte del origen del plano $x-t$ y asimismo se conocen los valores de V y C sobre ella, que serán los mismos que sobre el eje x , y los correspondientes al estado inicial del canal. Los puntos comprendidos entre esta característica y el eje x , corresponden a secciones todavía no alteradas por la avenida.

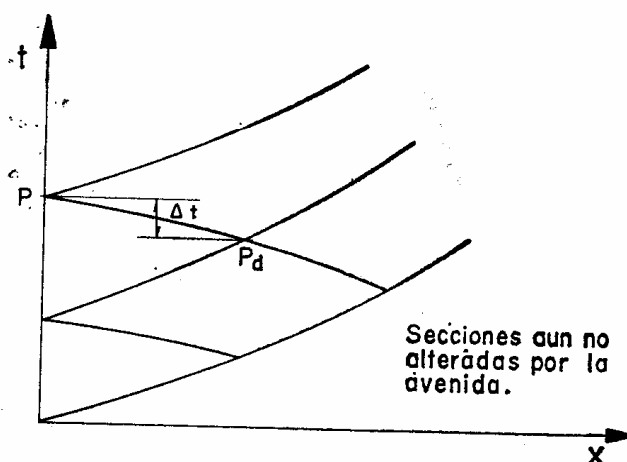


FIG. 8

Si $x = 0$ es la sección donde se conoce la variación de tirantes, y por lo tanto de celeridades, el cálculo de la velocidad en un punto como P de la Fig. 8, puede hacerse con la mitad de las ecuaciones obtenidas para el primero de los métodos expuestos:

- 1o. Se escoge un valor de Δax , con lo que queda fijo el punto P_a para un tiempo Δt anterior.
- 2o. Se determinan V_a y C_a de las Figs. 4 y 5.
- 3o. Se determina K_a de la Fig. 2.
- 4o. Se calcula G_a con la ecuación (16).
- 5o. Como C es conocido, se calcula $V - K$ con la ecuación (15).
- 6o. Con $V - K$ y C se determina V con la gráfica de la Fig. 3.
- 7o. Se calcula Δax con

$$\Delta ax = \frac{(V - C) + (V_a - C_a)}{2} \Delta t.$$

Si este valor no coincide, aproximadamente, con el supuesto en el 1er. paso, se repite el proceso.

Es frecuente que en vez de conocer la variación de tirantes en determinada sección, se conozca la de gastos y en ese caso puede procederse en la forma siguiente:

a) Se supone un tirante, con el cual se conocen celeridad y área

b) Se calcula la velocidad $V = \frac{Q}{A}$

c) Con la celeridad supuesta se continúa con el procedimiento anterior, y si la velocidad en el 6o. paso no coincide con la calculada en b), se repite el proceso con un nuevo tirante desde el paso a).

Pueden presentarse otras condiciones de frontera que pueden tratarse con algún procedimiento parecido [4].

El tratamiento de la sección final depende de las condiciones que allí existan, pero no será fundamentalmente distinto al de la sección inicial; en los ejemplos numéricos al final del artículo, se trata de un caso bastante frecuente.

Aplicación del método a un canal con irregularidades

Los métodos anteriores pueden aplicarse sólo a canales regulares, con una sección transversal invariable y una pendiente constante; sin embargo, pueden hacerse ciertas modificaciones para utilizarlos cuando esto no sucede.

Como ejemplo vamos a tratar el problema de un canal con estrechamientos, que podrían ser producidos por pilas de puente.

Supongamos que en determinada sección del canal existe un estrechamiento como el de la Fig. 9, que produce pérdidas a la salida calculables con la fórmula de Borda, o bien con alguna similar.

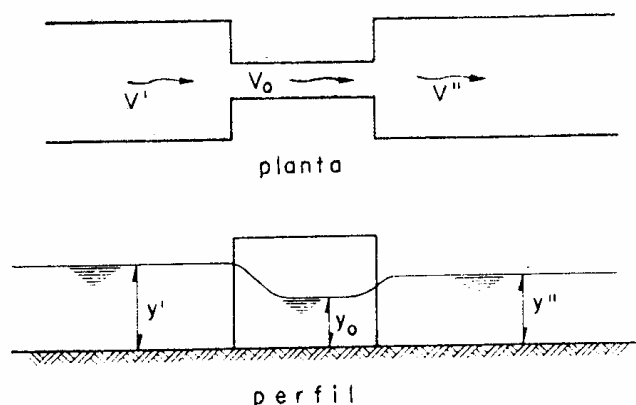


FIG. 9

El cálculo de velocidades y celeridades, antes y después del estrechamiento, puede hacerse para cada tiempo con una pequeña modificación del primer método descrito. Esto consistiría en calcular $V' - 2C'$ en función de los valores en el punto P_u y $V'' - 2C''$ en función de los del punto P_d . Por otra parte, el principio de continuidad y el teorema de Bernoulli establecidos entre los puntos P'' y P' proporcionarían otras dos ecuaciones en V' , V'' , y' y y'' (o lo que es lo mismo C' y C'') y que permitirían determinar las cuatro incógnitas buscadas.

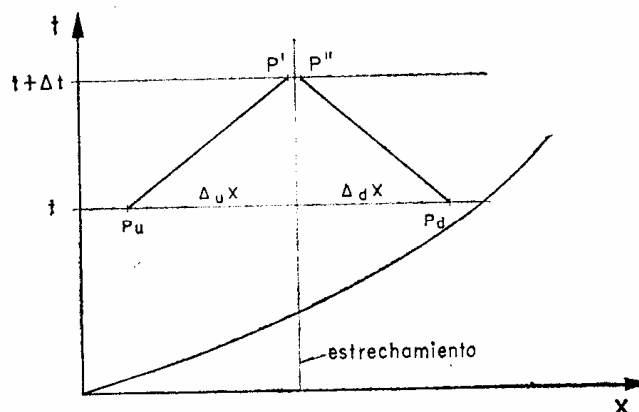


FIG. 10

Las ecuaciones (11) y (15) quedarían ahora

$$V' + 2C' = G_u + K' \quad (11')$$

$$V'' - 2C'' = G_d + K'' \quad (15')$$

en donde,

$$K' = \frac{1}{2} g (S_0 - S'_f) \Delta t$$

y

$$K'' = \frac{1}{2} g (S_0 - S''_f) \Delta t$$

Para encontrar las pérdidas por ampliación es necesario determinar la velocidad en el estrechamiento. Para ello designemos con el subíndice "0"

las características hidráulicas en esta última sección, y supongamos que no existe almacenaje en el tramo de la obstrucción.

Con esto puede escribirse

$$A'V' = A''V'' = A_0V_0 \quad (26)$$

$$y' + \frac{V'^2}{2g} = y_0 + \frac{V_0^2}{2g} = y'' + \frac{V''^2}{2g} + \frac{(V'' - V_0)^2}{2g} \quad (27)$$

$$\left[E' = E_0 = E'' + \frac{(V'' - V_0)^2}{2g} \right]$$

El cálculo correspondiente se realizaría, con el primero de los métodos expuestos, o sea, con $\Delta t = \text{cte}$, para lo cual puede seguirse el procedimiento siguiente:

- 1o. Se escogen dos valores $\Delta_u x$ y $\Delta_d x$
- 2o. De las figuras 4 y 5 se encuentran V_u , V_d , C_u y C_d
- 3o. Se determinan K_u y K_d de la Fig. 2.
- 4o. Se calculan G_u y G_d con las ecuaciones (12) y (16).
- 5o. Se supone C' , con lo que se conocen y' y A' .
- 6o. Se calcula $V' - K'$ con la ecuación (11')
- 7o. Con $V' - K'$ y C' se encuentra V' de la Fig. 3.
- 8o. Se calcula $E' = y' + \frac{V'^2}{2g}$
- 9o. Con A' y V' se calcula el gasto Q , que pasa en ese momento por la sección.
- 10o. Se determinan y_0 y V_0 por tanteos suponiendo valores de y_0 hasta lograr $E_0 = E'$.
 - a) Se supone y_0 , con lo que se tiene A_0 .
 - b) Se calcula $V_0 = \frac{Q}{A_0}$
 - c) Se calcula $E_0 = y_0 + \frac{V_0^2}{2g}$, si este valor no coincide con E' se repite el paso 10o.
- 11o. Se determina y'' por tanteos hasta lograr que
 - a) Se supone y'' , con lo que se conoce A''
 - b) Se calcula $V'' = \frac{Q}{A''}$
 - c) Se calcula

$$E'' + \frac{(V'' - V_0)^2}{2g} = y'' + \frac{V''^2}{2g} +$$

$$+ \frac{(V'' - V_0)^2}{2g}$$

Si el valor encontrado en c) no coincide con E' se repite el paso 11o. hasta lograr dicha igualdad.

12o. Con y'' se conocerá C'' , y con ésta y V'' se determina K'' de la Fig. 2.

13o. Se calcula G_d con la ecuación (15'), ya que todos los otros términos son conocidos.

Si el valor de G_d calculado en 13o. no es igual al calculado en 4o., será necesario repetir el procedimiento desde el paso 5o.

14o. Se calculan

$$\Delta_u x = \frac{(V' + C') + (V_u + C_u)}{2} \Delta t$$

y

$$\Delta_d x = \frac{(V'' - C'') + (V_d - C_d)}{2} \Delta t$$

y se comparan con los valores supuestos en el primer paso, si la diferencia es muy grande será necesario repetir los cálculos desde el principio, suponiendo otros valores.

El procedimiento descrito no es tan laborioso como podría parecer, ya que después de los primeros intervalos se puede tener una idea muy aproximada de los valores que han de suponerse. por otra parte, pequeñas variaciones de C' , acusan generalmente variaciones mayores de G_d , con lo cual puede llegarse rápidamente a la solución.

Es necesario observar que, si las irregularidades en el canal no son precisamente estrechamientos, sino cualesquiera otras como cambios de sección transversal, de rugosidad o de pendiente del fondo, el método de las características puede aplicarse siguiendo la misma idea que en el caso de los estrechamientos, si bien para ello sería preciso dibujar un par de gráficas como las de las figuras 2 y 3 para cada tramo en el que variaran las características geométricas o de resistencia del canal.

II. EJEMPLOS NUMERICOS

Con el fin de mostrar más claramente los procedimientos de cálculo explicados anteriormente, realizaremos dos ejemplos numéricos.

Ejemplo Núm. 1. Haremos la aplicación del primer método descrito, al cálculo del paso de una avenida a lo largo de un canal con las siguientes características:

$S_0 = 0.0002$, Longitud = 25.5 Km, $n = 0.017$
sección transversal trapezoidal
ancho de plantilla = 6 m, taludes 1.5:1

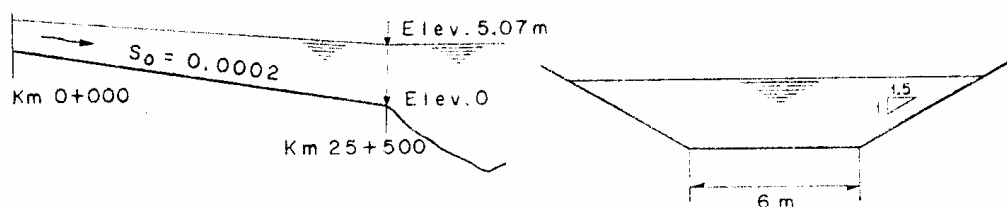


FIG. 11

El canal descarga en un vaso con un nivel constante, como se indica en la figura 11, que produce un remanso pronunciado. El hidrograma de la avenida en la estación Km 0 + 000, es el de la gráfica 1.* En la gráfica 2 aparecen las características geométricas de la sección transversal y de la relación entre D y y puede verse que la hipótesis $dD = dy$ no es aplicable en este caso; pero para los tirantes que se presentarán puede tomarse $dy = 2dD$ pues la curva que las relaciona es aproximadamente una recta de pendiente $\frac{1}{2}$, y a un incremento de D corresponde uno del doble para y , con lo cual las ecuaciones de las características serán:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (V + 4C) = g (S_0 - S_f) \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad (5'')$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (V - 4C) = g (S_0 - S_f) \frac{\partial t}{\partial \eta} \quad (6'')$$

y de las cuales se obtiene:

$$V + 4C = G_u + K \quad (11'')$$

siendo:

$$G_u = V_u + 4C_u + K_u \quad (12'')$$

y

$$V - 4C = G_d + K \quad (15'')$$

siendo:

$$G_d = V_d - 4C_d + K_d \quad (16'')$$

$$C = \frac{G_u - G_d}{8} \quad (18'')$$

En vista de las condiciones de descarga, consideremos que el tirante, y por tanto la celeridad, no varía en la desembocadura, ya que el nivel del agua en ese lugar será el mismo que el del vaso de descarga, que permanece constante, mientras esta sección no se encuentre en las condiciones críticas, condiciones que están muy lejos de presentarse durante el paso de la avenida. Para

calcular las velocidades en esta sección puede utilizarse la ecuación (11'')

$$V - K = G_u - 4C \quad (11'')$$

y proceder como sigue:

- 1o. Se supone $\Delta_u x$
- 2o. Se determinan V_u y C_u de las figuras 4 y 5
- 3o. Se determina K_u de la fig. 2
- 4o. Se calcula G_u con la ecuación (12'')
- 5o. Se calcula $V - K$ con la ecuación (11)
- 6o. Con $V - K$ y C se determina V de la figura 3
- 7o. Se calcula

$$\Delta_u x = \frac{(V_u + C_u) + (V + C)}{2} \Delta t$$

Si este valor es muy diferente del originalmente supuesto se repite el proceso.

Con la ecuación (20), escogiendo $\Delta t = 10$ min = 600 seg., se construyeron las gráficas 4 y 5, correspondientes a las figuras 2 y 3 con los valores de las tablas 2 y 3. Para calcular los valores iniciales de V y C , se calculó la curva de remanso, aplicando el teorema de Bernoulli y el principio de continuidad por tramos desde aguas abajo con el gasto base de 30 m³/seg. El cálculo se hizo gráficamente con el método expuesto en la referencia [5]; la determinación de los tirantes aparece en la gráfica 3, y con estos es inmediato el cálculo de velocidades y celeridades que aparecen en la tabla 1. Con estos valores se pudieron dibujar las curvas iniciales, para $t = 0$, en las gráficas 6 y 7, de $V = V(x, t)$ y $C = C(x, t)$ respectivamente.

A partir de estas primeras curvas de celeridades y velocidades se determinaron las correspondientes a los intervalos siguientes cada 10 min, aplicando paso a paso el procedimiento descrito. En la tabla 4 aparecen los cálculos con los valores aceptados en cada tanteo, estando los puntos señalados por un número que indica el tiempo en minutos del intervalo a que pertenecen y una letra para distinguir puntos a distintos kilometrajes en el mismo intervalo. La tabla 5 muestra los tanteos adicionales para el cálculo en la sección inicial.

De las gráficas 6 y 7 se pueden obtener las variaciones de C y V con el tiempo en cualquier estación, y de éstas las variaciones de y y Q . Esto

* Las tablas y gráficas a las que se refiere este capítulo se encuentran en el Apéndice A.

se hizo para las estaciones Km 0 + 000, 5 + 000, 10 + 000, 15 + 000 y 20 + 000, y con los resultados se dibujaron las gráficas 8 y 9.

Ejemplo Núm. 2. Posteriormente se hizo el cálculo del tránsito de la misma avenida por el mismo canal, pero suponiendo la existencia de estrechamientos en las secciones Km 8 + 000 y 16 + 000, como se indica en la figura 12.

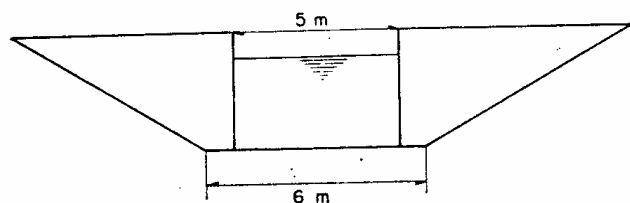


FIG. 12

Los cálculos se realizaron siguiendo los pasos indicados al describir el método correspondiente. Para ello fue necesario calcular primeramente la curva de remanso, en las condiciones de gasto base para lo cual se procedió como antes, con el uso del método gráfico representado en la gráfica 10. En cualquier caso se supuso que los obstáculos producirían sólo pérdidas a la salida, calculables con la fórmula de Borda. De los tirantes iniciales se obtuvieron las velocidades y celeridades para $t = 0$ que aparecen en las gráficas 11 y 12, y calculadas en la tabla 6. En estas mismas gráficas se encuentran las curvas de V y C obtenidas para los intervalos sucesivos y calculados en la tabla 7. Los tanteos adicionales en los obstáculos se encuentran en la tabla 8 y los de la sección inicial en la 9.

Como en el caso anterior se dibujaron las curvas $y - t$ y $Q - t$ para las mismas estaciones; estas curvas se encuentran en las gráficas 13 y 14.

III. ESTUDIO EXPERIMENTAL

Los problemas presentados en los ejemplos numéricos se estudiaron también experimentalmente y se construyó un modelo del canal descrito, con el fin de comprobar por una parte los resultados teóricos y por otra de tener una experiencia en la solución de dichos problemas, con este procedimiento.

Por tratarse de un escurrimiento a superficie libre, el fenómeno ocurrido depende fundamentalmente de las fuerzas de gravedad, por lo que la similitud será establecida a partir de la ley de Froude.

Esta relación tendrá que ser igual en el modelo y en el prototipo, por lo cual, si indicamos con el subíndice r a la relación entre prototipo y modelo, deberá cumplirse:

$$\frac{V_r}{g_r l_r} = 1$$

En ocasiones, las dimensiones del prototipo son tales que si se reprodujera con una sola escala lineal, no podrían apreciarse con exactitud las variaciones del tirante, al mismo tiempo que la escala de rugosidades haría que el coeficiente de rugosidad en el modelo se redujera a tal grado que no podría lograrse con los materiales comúnmente usados. Para solucionar este problema se recurre a la distorsión de escalas, eligiendo una escala lineal vertical menor que la lineal horizontal. Se denomina distorsión a la relación

$$e = l_r / L_r$$

en donde l_r es la escala de líneas verticales y L_r la de líneas horizontales. Esto aporta grandes ventajas para la construcción de un modelo de esta naturaleza; sin embargo se debe cuidar de no sobrepasar ciertos límites en la distorsión, pues podría alterarse el comportamiento hidráulico del modelo al ocurrir fenómenos derivados de la distorsión que en el prototipo no acontecerían.

En el caso particular del problema en estudio, la longitud del modelo quedó fijada por el espacio de que se dispuso en el Laboratorio de Hidráulica del Instituto de Ingeniería, con lo cual quedó de inmediato fijada la escala de líneas longitudinales (L_r). Al tratar de usar la misma escala de líneas en las dos direcciones restantes, las dimensiones de la sección transversal se reducían considerablemente con las consecuencias antes descritas.

No era suficiente entonces escoger una escala de líneas verticales distinta, sino que fue necesaria una nueva forma de distorsión, con una escala de líneas horizontales en el sentido transversal del canal igual a la escala de líneas verticales (l_r). Con esto se podían apreciar mejor las dimensiones en todos los sentidos y se tenía la ventaja de no deformar la sección transversal.

Por tanto, al considerar en la relación de Froude que $g_r = 1$, se tiene que

$$V_r = l_r^{1/2}$$

y escala de tiempos

$$t_r = \frac{L_r}{V_r} = \frac{L_r}{l_r^{1/2}}$$

con una escala de áreas

$$A_r = l_r^2$$

y de radios hidráulicos $R_r = l_r$.

Además, por la ecuación de continuidad se tiene:

$$Q_r = A_r V_r = l_r^2 l_r^{1/2} = l_r^{5/2}$$

Por otra parte de la fórmula de Manning, con

$S_r = \frac{l_r}{L_r}$ la escala de coeficientes de rugosidad resulta

$$n_r = \frac{R_r^{2/3} S_r^{1/2}}{V_r} = \frac{l_r^{2/3} l_r^{1/2} / L_r^{1/2}}{l_r^{1/2}} = \frac{l_r^{2/3}}{L_r^{1/2}}$$

Resumiremos finalmente, las expresiones de las diferentes escalas en función de las escalas lineales l_r y L_r

lineal longitudinal	L_r
lineal vertical y horizontal transversal	l_r
velocidad	$V_r = l_r^{1/2}$
tiempo	$t_r = L_r l_r^{-1/2}$
gasto	$Q_r = l_r^{5/2}$
áreas verticales	$A_r = l_r^2$
radio hidráulico	$R_r = l_r$
pendiente	$S_r = l_r L_r^{-1}$
rugosidad	$n_r = l_r^{2/3} L_r^{-1/2}$

Selección de escalas

El espacio disponible para el modelo permitió reproducir el canal de acuerdo con una escala lineal longitudinal $L_r = 1:250$ y se consideró pertinente escoger una distorsión $e = 5$, con lo que $l_r = 1:50$ y de acuerdo con la L_r escogida las escalas restantes tienen por valores:

$V_r = 7.07$	$Q_r = 17\ 700$
$t_r = 35.50$	$R_r = 50$
$A_r = 2\ 500$	$S_r = 0.20$
$V_r = 0.625$	$n_r = 0.86$

El coeficiente de rugosidad en el modelo se puede determinar a partir de la escala de rugosidades obtenida;

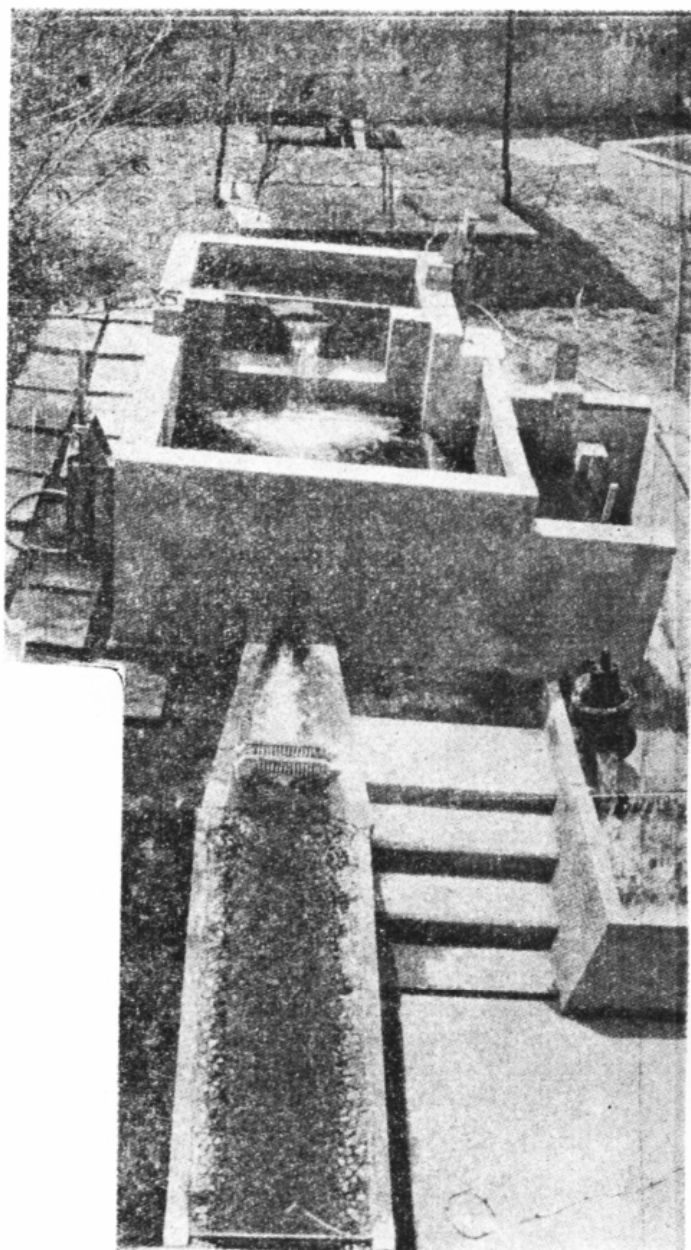
$$n_m = \frac{n_p}{n_r} = \frac{0.017}{0.86} = 0.020$$

Este coeficiente de rugosidad era bastante alto por lo cual fue necesario hacer ensayos preliminares con distintas rugosidades para lograr dicho coeficiente.

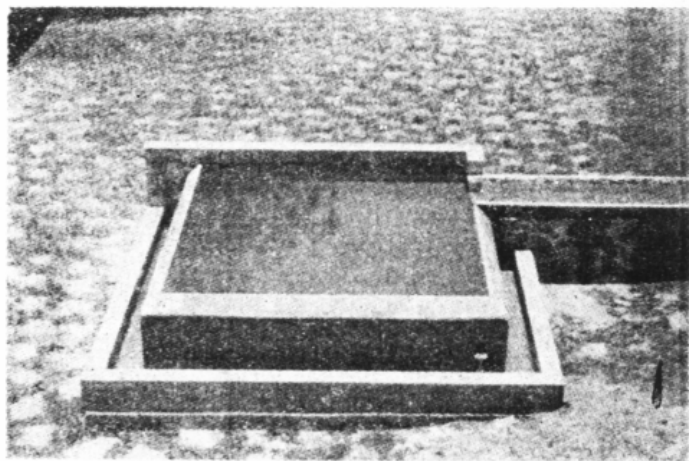
Para realizar estas mediciones se construyeron las paredes del canal con una capa delgada de mortero sobre la cual se colocó grava y posteriormente se hizo funcionar el modelo con distintos gastos, determinando el coeficiente de rugosidad a partir de la fórmula de Manning.

Se construyó además un dispositivo capaz de reproducir el hidrograma de la avenida, representado en la gráfica 1 y que consistía en un tanque con un orificio en su parte baja que alimentaba al canal y además con una compuerta lateral.

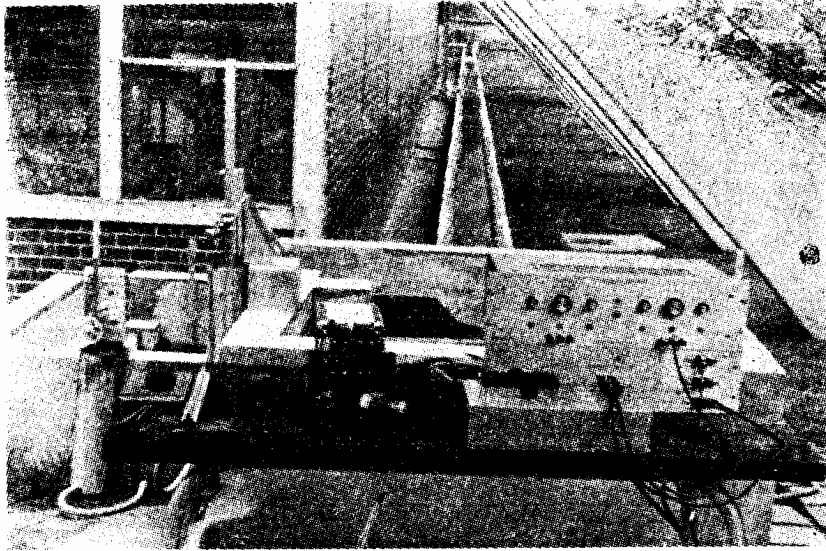
Al hacer pasar determinado gasto a este tanque con la compuerta totalmente abierta, el orifi-



Reproductor de la avenida y parte inicial del canal.



Reproductor de las condiciones de descarga.



Aparatos de medición.

cio descargaba un gasto que era igual al gasto-base del hidrograma, lo cual se lograba mediante una válvula reguladora instalada en un tanque adyacente al principal y al cual desfogaba el gasto descargado por la compuerta. Al cerrar esta compuerta, el nivel del agua en el tanque principal ascendía y con esto se incrementaba el gasto en el orificio hasta lograr que éste se igualara con el máximo del hidrograma.

Para evitar que el nivel en el tanque continuara aumentando, se instaló una cresta vertedora en la parte superior de la división del tanque principal y su adyacente, que permitía el derrame a éste último y con ello se mantenía el gasto máximo durante el tiempo que fuese necesario.

Con esto se logró reproducir aproximadamente la parte del hidrograma desde el gasto base hasta el máximo. Para simular la curva de receso bastaba abrir la compuerta para que el nivel del agua bajara, logrando con ello que el gasto en el orificio disminuyese hasta tener la misma magnitud del gasto base.

Con objeto de medir el gasto de entrada al tanque principal, se construyó atrás de éste un tercer tanque con un vertedor triangular entre los dos. El reproductor fue calibrado mediante la válvula del tanque adyacente y otra colocada en el orificio de alimentación del canal. El hidrograma obtenido finalmente aparece en la gráfica 1, el cual está convertido a dimensiones de prototipo y comparado con el verdadero.

Para reproducir las condiciones de descarga del canal, se construyó al final del mismo un tanque de grandes dimensiones ($3\text{m} \times 3\text{m}$) con cresta vertedora perimetral, con la cual se mantenía el nivel prácticamente constante, aún al variar el gasto de salida durante el paso de la avenida.

Los ensayos se realizaron con dos tipos de mediciones que consistieron en determinar la variación de niveles de agua en función del tiempo, por medio de aparatos electrónicos, y de niveles constantes con el fin de calibrar las mediciones electrónicas.

Las mediciones electrónicas se basan fundamentalmente en la resistencia que ofrece el agua al paso de una corriente eléctrica y a la variación de esta resistencia al variar el nivel del agua. Para registrar estas variaciones se colocaron dos agujas paralelas parcialmente sumergidas en el agua y fijas de tal modo que una variación del nivel del agua hacía variar la corriente eléctrica que conducían. Este cambio se registró por medio de una aguja que dibujaba un trazo sobre una tira de papel que se movía por medio de un mecanismo de reloj.

El circuito usado aparece en el esquema de la figura 13.

Las placas de compensación tienen por objeto eliminar la influencia de la conductividad del agua. Los aparatos constan esencialmente de: filtros para eliminar la variación de la corriente alterna y registrar solamente la envolvente de las

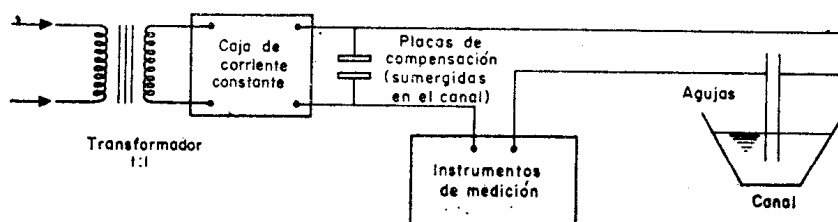


FIG. 13

variaciones, un amplificador para la corriente ya filtrada y un registrador que consiste en un medidor de D'Arsonval adaptado a la aguja registradora.

Para interpretar los trazos de esta aguja, fue necesario conocer la relación entre las variaciones del nivel del agua y los desplazamientos correspondientes de la aguja. Esta relación depende de muchos factores tales como separación, diámetro y profundidad de las agujas así como la longitud del alambre usado en la instalación, tiempo de calentamiento del aparato y tamaño de las placas de compensación.

La calibración del aparato consistió en medir dos niveles distintos en una misma sección con un limnómetro mecánico, además del desplazamiento respectivo de la aguja registradora. Esto se repitió en las cinco estaciones en que fue calculada la variación de tirantes hasta encontrar la escala de conversión de la variación del nivel del agua al desplazamiento de la aguja.

Después de algunos ensayos se comprobó que la escala de conversión era uniforme dentro del rango en que variaban los tirantes, lo que significa que a variaciones sucesivas e iguales del nivel corresponden iguales desplazamientos de la aguja registradora.

Para poder medir al mismo tiempo en las cinco estaciones, se diseñó un selector de cinco canales, que permitía registrar alternadamente la variación del tirante en todas las secciones.

De las mediciones hechas se obtuvieron las variaciones de tirantes que aparecen en las gráficas 8 y 13, comparadas con las resultantes del cálculo.

IV. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos puede afirmarse la bondad del método de las características, cuya aproximación puede mejorarse tanto como se quiera con sólo escoger incrementos finitos más pequeños, y su exactitud depende de la validez de las hipótesis que permiten establecer el teorema de Bernoulli y el principio de continuidad. Las diferencias máximas que se observaron entre las curvas calculadas y las experimentales fueron del orden del 10%, que en dimensiones de modelo se convierten en 2 mm aproximadamente; sin embargo la precisión de las medidas realizadas no permite esperar más aproximación, si se tiene en cuenta además que existe una pequeña diferencia entre el hidrograma utilizado en el cálculo y el reproducido en el modelo, los cuales se separan sobre todo en la curva de receso. Hay que pensar además en la posible influencia de los factores de escala.

En nuestra opinión el Método de las Características es el más aconsejable para resolver problemas del tipo aquí presentado, cuando se trate de aquellos cauces cuyas características hidráulicas no son bien conocidas, como sucede con fre-

cuencia en nuestro país. Para aplicarlo basta conocer la geometría del canal y tener una buena estimación de su coeficiente de rugosidad.

RECONOCIMIENTO

Los autores agradecen la colaboración de los señores Darío de Hoyos P. y Ma. del Rosario Moreno que realizaron las pruebas correspondientes al estudio experimental.

APENDICE A

Tablas y gráficas correspondientes a los ejemplos numéricos. Tablas 1 a 9. Gráficas 1 a 14.

TABLA 1

VALORES INICIALES DE VELOCIDADES Y CELERIDADES DEL PRIMER EJEMPLO

Estación Km	y (m)	C (m/seg)	A (m ²)	V (m/seg)
0	2.62	4.27	26.0	1.155
2.0	2.62	4.27	26.0	1.155
4.0	2.62	4.27	26.0	1.155
6.0	2.63	4.28	26.1	1.15
8.0	2.68	4.31	26.8	1.12
10.0	2.78	4.38	28.0	1.07
12.0	2.96	4.50	30.8	0.975
14.0	3.19	4.64	34.0	0.884
16.0	3.46	4.81	38.4	0.781
18.0	3.78	5.00	44.0	0.682
20.0	4.11	5.18	50.0	0.60
22.0	4.47	5.36	57.0	0.526
24.0	4.83	5.53	64.0	0.469

TABLA 2

VELOCIDADES PARA C y K DE LA FORMULA (20)

.K	(1-1.701K) ^{1/2}	C = 4.0 4.5 5.0 5.5 6.0				
		1.14	1.34	1.54	1.75	1.96
0.50	0.386	0.44	0.517	0.595	0.676	0.756
0.40	0.564	0.644	0.756	0.87	0.987	1.105
0.30	0.699	0.798	0.936	1.075	1.22	1.37
0.20	0.811	0.925	1.09	1.25	1.42	1.59
0.10	0.910	1.04	1.22	1.40	1.59	1.78
0	1.000	1.14	1.34	1.54	1.75	1.96
-0.10	1.082	1.23	1.45	1.66	1.89	2.12
-0.20	1.159	1.32	1.55	1.78	2.02	2.27
-0.30	1.230	1.405	1.65	1.89	2.15	2.41
-0.40	1.297	1.48	1.74	2.00	2.27	2.54
-0.50	1.360	1.55	1.82	2.10	2.38	2.66

TABLA 3

V - K PARA C y K DE LA FORMULA (20)

.K	C=4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
0.50	-0.06	-0.017	-0.095	0.176	0.256
0.40	0.244	0.356	0.47	0.587	0.705
0.20	0.725	0.89	1.05	1.22	1.39
0	1.14	1.34	1.54	1.75	1.96
-0.20	1.52	1.75	1.98	2.22	2.47
-0.40	1.88	2.14	2.40	2.67	2.94

TABLA 4

APLICACION DEL METODO EN EL PRIMER EJEMPLO

Punto	x	$\Delta_U x$	$\Delta_d x$	V_U	C_U	K_U	V_d	C_d	K_d	G_U	C_d	$V \cdot K$	V	C	$\Delta_U x$ calc.	$\Delta_d x$ calc.
10a	0			1850			1.12	4.27	0.12		-15.84	1.28	1.27	4.28		1848
20a	0			1850			1.16	4.27	0.08		-15.84	1.44	1.36	4.32		1821
20b	3300	3300		1850	1.27	4.28	-0.02	1.15	4.27	0.08	18.37	-15.85	1.26	1.27	4.28	3330
30a	0			1800			1.32	4.29	-0.07		-15.91	1.65	1.48	4.39		1764
30b	3500	3500		1800	1.36	4.32	-0.09	1.20	4.28	0.04	18.55	-15.88	1.34	1.32	4.30	3390
30c	6000	3400		1800	1.30	4.28	-0.06	1.13	4.31	-0.06	18.36	-16.17	1.10	1.19	4.32	3327
		3300		1900	1.29	4.28	-0.06	1.12	4.31	-0.12	18.35	-16.00	1.17	1.23	4.29	3327
40a	0			1750			1.40	4.33	-0.12		-16.04	1.88	1.61	4.48		1740
40b	3500	3400		1800	1.48	4.39	-0.18	1.25	4.29	0	18.86	-15.91	1.48	1.37	4.35	3477
40c	7000	3400		1850	1.32	4.30	-0.07	1.12	4.34	0.13	18.45	-16.11	1.17	1.23	4.32	3351
40d	10000	3350		1900	1.20	4.30	0.06	0.98	4.50	0.28	18.46	-16.74	0.86	1.07	4.40	3288
		3300		2000	1.20	4.30	0.06	0.98	4.50	0.28			0.86	1.07	4.40	
50a	0			1700			1.47	4.39	-0.18		-16.26	2.54	1.95	4.70		1701
50b	4000	3500		1800	1.55	4.44	-0.23	1.27	4.32	0	19.08	-16.01	1.54	1.40	4.39	3534
50c	8000	3400		1900	1.32	4.34	-0.05	1.08	4.40	0.18	18.63	-16.34	1.15	1.22	4.37	3375
50d	12000	3300		2100	1.14	4.35	0.12	0.88	4.64	0.35	18.66	-17.33	0.67	0.96	4.50	3285
60a	0			1650			1.66	4.52	-0.30		-16.72	2.60	2.06	4.83		1689
60b	4000	3800		1700	1.91	4.68	-0.48	1.32	4.37	-0.06	20.15	-16.22	1.97	1.67	4.55	3843
60c	8000	3400		1900	1.37	4.38	-0.08	1.12	4.42	0.16	18.81	-16.40	1.21	1.26	4.40	3423
60d	12000	3300		2100	1.19	4.39	0.09	0.89	4.65	0.35	18.84	-17.36	0.74	1.01	4.53	3336
70a	0			1500			2.03	4.68	-0.60		-17.29	2.39	1.98	4.92		1677
70b	4000	4000		1600	2.06	4.83	-0.55	1.70	4.47	-0.37	20.83	-16.55	2.14	1.79	4.67	4005
70c	8000	3800		1900	1.89	4.54	-0.55	1.14	4.43	0.14	19.50	-16.44	1.53	1.43	4.49	3705
70d	12000	3400		2100	1.22	4.40	0.07	0.90	4.67	0.34	18.89	-17.44	0.73	1.01	4.54	3351
80a	0			1800			1.94	4.82	-0.43		-17.77	2.11	1.84	4.97		1803
80b	4100	4100		1700	1.98	4.92	-0.42	1.64	4.55	-0.28	21.24	-16.83	2.20	1.82	4.76	4044
80c	8000	3900		1900	1.78	4.66	-0.35	1.24	4.49	0.08	20.07	-16.64	1.72	1.63	4.59	3798
80d	12000	3500		2100	1.38	4.49	-0.05	0.90	4.69	0.35	19.30	-17.51	0.90	1.11	4.60	3474
80e	16000	3400		2500	0.92	4.67	0.33	0.67	5.06	0.48	19.93	-19.09	0.42	0.81	4.88	3384
90a	0			1800			1.83	4.88	-0.30		-17.99	2.01	1.80	5.00		1875
90b	4000	4000		1750	1.83	4.97	-0.25	1.78	4.67	-0.34	21.46	-17.24	2.11	1.81	4.84	4035
90c	8000	3800		1850	1.82	4.75	-0.25	1.38	4.57	-0.01	20.57	-16.91	1.83	1.64	4.69	3870
90d	12000	3500		2200	1.57	4.58	-0.18	0.93	4.74	-0.34	19.71	-17.96	0.88	1.11	4.71	3591
90e	16000	3400		2500	1.05	4.64	0.25	0.68	5.08	0.48	19.86	-19.16	0.35	0.77	4.86	3402
100a	0			1900			1.81	4.93	-0.27		-18.18	2.02	1.72	5.05		1935
100b	4000	4000		1800	1.80	5.00	-0.12	1.75	4.77	-0.28	21.68	-17.61	2.04	1.78	4.91	4047
100c	8000	3900		1900	1.81	4.84	-0.30	1.41	4.68	0	20.87	-17.31	1.78	1.64	4.77	3918
100d	12000	3650		2250	1.51	4.68	-0.09	0.91	4.78	0.35	20.14	-17.86	1.14	1.26	4.75	3660
100e	16000	3400		2550	1.06	4.73	0.26	0.68	5.09	0.48	20.24	-19.20	0.52	0.90	4.93	3486
100f	20000	3200		2600	0.77	4.95	0.44	0.52	5.42	0.55	21.01	-20.61	0.20	0.68	5.20	3480
		3500		2800	0.78	4.92	0.43	0.51	5.43	0.55	20.89	-20.66	0.12	0.62	5.19	3453
110a	0			2000			1.77	4.99	-0.20		-18.39	1.73	1.66	5.03		1977
110b	4000	4000		1900	1.72	5.05	-0.13	1.75	4.84	-0.25	21.79	-17.86	1.97	1.76	4.96	4047
110c	8000	3900		1900	1.78	4.91	-0.24	1.50	4.75	-0.05	21.18	-17.55	1.82	1.68	4.84	3963
110d	12000	3700		2200	1.63	4.77	-0.17	1.05	4.83	0.29	20.54	-17.98	1.28	1.36	4.82	3774
110e	16000	3500		2600	1.22	4.76	0.17	0.71	5.10	0.47	20.43	-19.22	0.61	0.97	5.00	3585
110f	20000	3500		2800	0.86	4.96	0.40	0.51	5.43	0.55	21.10	-20.66	0.22	0.69	5.22	3519
120a	0			2000			1.75	5.02	-0.18		-18.51	1.49	1.60	5.00		2001
120b	4000	4000		1900	1.66	5.03	-0.09	1.74	4.90	-0.20	21.69	-18.06	1.82	1.68	4.97	4002
120c	8000	4000		1900	1.76	4.96	-0.20	1.55	4.86	-0.05	21.40	-17.94	1.73	1.63	4.92	3981
120d	12000	3900		2200	1.67	4.84	-0.17	1.13	4.91	0.26	20.86	-18.25	1.31	1.38	4.89	3834
120e	16000	3600		2500	1.31	4.83	-0.12	0.79	5.14	0.44	20.75	-19.33	0.71	1.04	5.01	3657
120f	20000	3500		2850	0.93	5.03	0.37	0.55	5.44	0.54	21.42	-20.67	0.38	0.81	5.26	3609
120g	25500	3700			0.60	5.37	0.55				22.60		0.00	0.54	5.65	3650
130a	0			2000			1.67	4.99	-0.11		-18.40	1.48	1.50	4.97		2037
130b	4000	4000		1950	1.60	5.00	-0.05	1.67	4.95	-0.13	21.55	-18.26	1.65	1.59	4.98	3951
130c	8000	4000		2000	1.68	4.97	-0.14	1.53	4.90	-0.03	21.42	-18.10	1.66	1.61	4.94	3960
130d	12000	3900		2200	1.62	4.92	-0.10	1.19	4.94	0.22	21.20	-18.35	1.43	1.47	4.94	3885
130e	16000	3700		2500	1.36	4.90	0.10	0.89	5.16	0.41	21.06	-19.34	0.86	1.13	5.05	3732
130f	20000	3650		2800	1.02	5.03	0.33	0.66	5.46	0.51	21.47	-20.67	0.40	0.83	5.27	3645
130g	25500	3700			0.71	5.39	0.48				22.75		0.15	0.65	5.65	3720
140a	0			2050			1.56	4.99	-0.02		-18.42	1.26	1.37	4.92		2094
140b	4000	4000		2000	1.50	4.97	0.02	1.59	4.96	-0.05	21.40	-18.30	1.55	1.54	4.96	3900
140c	8000	3950		2000	1.59	4.98	-0.05	1.56	4.94	-0.04	21.46	-18.24	1.61	1.57	4.96	3930
140d	12000	3900		2100	1.61	4.94	-0.08	1.30	4.97	0.16	21.29	-18.42	1.44	1.48	4.96	3897
140e	16000	3800		2400	1.45	4.94	0.05	0.95	5.17	0.38	21.26	-19.35	0.96	1.21	5.08	3804
140f	20000	3700		2750	1.10	5.07	0.30	0.70	5.43	0.49	21.68	-20.53	0.58	0.96	5.28	3723
140g	25500	3750			0.74	5.40	0.47				22.81		0.21	0.71	5.65	3750
150a	0			2100			1.50	4.95	0.01		-18.29	0.99	1.19	4.82		2124
150b	4000	3850		2050	1.39	4.92	0.08	1.56	4.96	-0.03	21.15	-18.31	1.42	1.46	4.93	3810
150c	8000	3900		2000	1.54	4.96	-0.01	1.55	4.96	-0.02	21.37	-18.31	1.53	1.53	4.96	3897
150d	12000	3900		2100	1.57	4.96	-0.03	1.35	5.01	0.14	21.38	-18.55	1.42	1.47	4.99	3897
150e	16000	3800		2300	1.47	4.96	0.05	1.05	5.20	0.34	21.36	-19.41	0.98	1.22	5.10	3825
150f	20000	3750		2700	1.19	5.09	0.25	0.82	5.47	0.45	21.80	-20.61	0.60	0.98	5.30	3768
150g	25500	3800			0.87	5.40	0.44				22.91		0.31	0.78	5.65	3810
160a	0			2150			1.35	4.88	0.10		-18.07	0.73	1.03	4.70		2160
160b	4000	3750		2100	1.21	4.83	0.20	1.51	4.96	0.01	20.73	-18.32	1.21	1.33	4.88	3675
160c	8000	3850		2100	1.47	4.93	0.03	1.52	4.97	0	21.22	-18.36	1.43	1.47	4.95	3846
160d	12000	3850		2150	1.53	4.96	0	1.35	5.03	0.14	21.37	-18.63	1.37	1.45	5.00	3862
160e	16000	3850		2400	1.46	4.99	0.05	1.07	5.22	0.34	21.47	-19.47	1.00	1.24	5.12	3843
160f	20000	3800		2650	1.21	5.12	0.25	0.88	5.47	0.44	21.94	-20.56	0.69	1.04	5.38	3804
160g	25500	3850			0.91	5.41	0.42				22.97		0.37	0.82	5.65	3837
170a	0			2200												

TABLA 5

TANTEOS ADICIONALES EN LA SECCION
INICIAL PARA EL PRIMER EJEMPLO

t	y	C	A	Q	V
10	2.63	4.28	26.0	33.0	1.27
20	2.69	4.32	26.8	36.8	1.37
30	2.80	4.39	28.4	42.3	1.49
40	2.93	4.48	30.0	51.5	1.62
50	3.27	4.70	35.2	69.4	1.97
60	3.49	4.83	39.0	80.0	2.05
70	3.65	4.92	40.8	80.0	1.97
80	3.75	4.97	44.0	80.0	1.82
90	3.78	5.00	44.5	80.0	1.79
100	3.88	5.05	46.0	80.0	1.74
110	3.84	5.03	45.2	76.0	1.68
120	3.78	5.00	44.5	70.0	1.57
130	3.74	4.97	43.4	65.0	1.50
140	3.65	4.92	40.8	56.5	1.39
150	3.48	4.82	38.8	46.5	1.20
160	3.27	4.70	35.2	37.0	1.05
170	3.18	4.63	33.8	31.5	0.93
180	3.06	4.56	32.2	30.0	0.94
190	2.99	4.51	30.8	30.0	0.97

TABLA 6

VALORES INICIALES DE VELOCIDADES Y
CELERIDADES DEL SEGUNDO EJEMPLO

Km	Y	C	A	V
0	2.64	4.31	26.0	1.15
2	2.64	4.31	26.0	1.15
4	2.66	4.32	26.2	1.14
6	2.69	4.34	26.6	1.12
8	2.78	4.40	28.0	1.07
10	2.72	4.36	27.0	1.11
12	2.83	4.42	28.6	1.05
14	3.03	4.55	31.5	0.95
16	3.27	4.70	35.2	0.85
18	3.55	4.87	40.0	0.75
20	3.50	4.84	39.0	0.77
22	3.81	5.02	44.6	0.67
24	4.15	5.20	51.0	0.59
26	4.48	5.37	57.6	0.52
28	4.83	5.54	64.0	0.47
30	5.01	5.63	68.2	0.44

TABLA 7
APLICACION DEL METODO EN EL SEGUNDO EJEMPLO

Pro.	x	Δx_u (sup)	Δx_d (sup)	V_u	C_u	K_u	V_d	C_d	K_d	G_u	G_d	V-K	V	C	Δx_u (calc)	Δx_d (calc)
10a	0		1860				1.15	4.31	0.10		-15.99	1.29	1.28	4.32		1860
20a	0		1900				1.18	4.32	0.08		-16.02	1.38	1.32	4.35		1851
20b	3300	3300	1850	1.28	4.32	0	1.13	4.33	0.12	18.56	-16.07	1.25	1.26	4.33	3357	1881
30a	0		1800				1.30	4.33	-0.02		-16.04	1.64	1.48	4.42		1791
30b	4000	3300	1900	1.31	4.34	-0.03	1.14	4.35	0.12	18.64	-16.14	1.25	1.27	4.35	3381	1887
40a	0		1800				1.39	4.36	-0.10		-16.15	1.93	1.65	4.52		1752
40b	4000	3400	1900	1.46	4.39	-0.17	1.18	4.38	0.10	18.85	-16.24	1.31	1.30	4.39	3462	1887
40c	8000	3300	2000	1.23	4.36	0.05	1.04	4.42	0.21	18.72	-16.43				3342	1777
50a	0		1750				1.45	4.41	-0.14		-16.33	2.27	1.82	4.65		1737
50b	4000	3500	1900	1.60	4.48	-0.27	1.20	4.41	0.09	19.25	-16.35	1.45	1.39	4.45	3576	1881
50c	8000	3400	2000	1.27	4.39	0.02	1.06	4.44	0.21	18.85	-16.49				3378	1974
50d	12000	3300	2250	1.13	4.40	0.14	0.84	4.72	0.38	18.87	-17.66	0.61	0.94	4.57	3317	2253
60a	0		1700				1.58	4.50	-0.23		-16.65	2.43	1.95	4.77		1722
60b	4000	3700	1850	1.75	4.60	-0.35	1.26	4.45	0.05	19.80	-16.49	1.66	1.53	4.54	3726	1860
60c	8000	3400	2000	1.35	4.45	-0.03	1.07	4.46	0.21	19.12	-16.56				3450	1974
60d	12000	3300	2300	1.15	4.41	0.13	0.83	4.73	0.38	18.92	-17.71	0.61	0.95	4.58	3327	2259
70a	0		1700				1.75	4.60	-0.35		-17.00	2.48	2.01	4.87		1713
70b	4000	3900	1850	1.94	4.75	-0.50	1.36	4.55	0	20.44	-16.84	1.80	1.61	4.66	3838	1872
70c	8000	3550	2000	1.49	4.53	-0.13	1.10	4.48	0.19	19.48	-16.63				3567	1944
70d	12000	3350	2300	1.20	4.45	0.10	0.84	4.74	0.38	19.10	-17.74	0.68	0.97	4.61	3369	2262
80a	0		1700				1.83	4.72	-0.37		-17.42	2.30	1.92	4.93		1770
80b	4000	3950	1900	2.01	4.84	-0.50	1.43	4.61	-0.05	20.87	-17.06	1.91	1.70	4.74	3987	1866
80c	8000	3650	1950	1.57	4.65	-0.15	1.14	4.52	0.18	20.02	-16.76				3672	1947
80d	12000	3450	2300	1.28	4.49	0.04	0.84	4.75	0.39	19.28	-17.77	0.76	1.03	4.63	3429	2253
80e	16000	3300	2500	0.92	4.66	0.33	0.65	5.06	0.49	19.89	-19.10				3375	2535
90a	0		1800				1.83	4.84	-0.30		-17.83	2.09	1.83	4.98		1848
90b	4000	4000	1850	1.92	4.93	-0.35	1.55	4.70	-0.11	21.29	-17.36	1.97	1.74	4.83	4026	1872
90c	8000	3750	1950	1.68	4.73	-0.23	1.23	4.56	0.10	20.37	-16.91				3759	1941
90d	12000	3450	2250	1.40	4.55	-0.04	0.88	4.76	0.37	19.56	-17.79	0.89	1.11	4.67	3519	2232
90e	16000	3400	2500	0.98	4.66	0.30	0.62	5.06	0.50	19.92	-19.12				3399	2538
100a	0		1900				1.80	4.90	-0.26		-18.06	1.98	1.80	5.01		1893
100b	4000	4000	1900	1.83	4.98	-0.25	1.59	4.80	-0.11	21.50	-17.72	1.89	1.72x	4.90	4029	1917
100c	8000	3850	1950	1.73	4.83	-0.23	1.29	4.61	0.08	20.82	-17.07				3846	1932
100d	12000	3600	2200	1.45	4.62	-0.05	0.93	4.78	0.34	19.88	-17.85	1.02	1.20	4.72	3597	2211
100e	16000	3450	2550	1.06	4.70	0.25	0.69	5.08	0.47	20.11	-19.16				3450	2535
110a	0		1950				1.79	4.94	-0.24		-18.21	1.87	1.73	5.02		1932
110b	4000	4000	1950	1.80	5.02	-0.20	1.58	4.89	-0.08	21.68	-18.06	1.81	1.58	4.97	4041	1980
110c	8000	3800	1950	1.71	4.90	-0.18	1.40	4.67	0	21.13	-17.28				3888	1935
110d	12000	3700	2200	1.55	4.69	-0.12	0.98	4.83	0.33	20.19	-18.01	1.09	1.24	4.78	3678	2217
110e	16000	3500	2500	1.15	4.75	0.21	0.69	5.08	0.47	20.36	-19.16				3519	2526
110f	20000	3500	2850	0.80	4.93	0.43	0.50	5.44	0.53	20.95	-20.71	0.12	0.62	5.21	3648	2859
120a	0		1950				1.73	4.99	-0.17		-18.40	1.64	1.60	5.01		2001
120b	4000	4000	2000	1.72	5.02	-0.14	1.55	4.96	-0.02	21.66	-18.31	1.68	1.63	5.00	4011	2034
120c	8000	3950	1950	1.68	4.97	-0.13	1.43	4.76	0.01	21.43	-17.60				3927	1959
120d	12000	3750	2200	1.57	4.77	-0.10	1.04	4.88	0.30	20.55	-18.18	1.19	1.32	4.84	3750	2208
120e	16000	3550	2500	1.20	4.80	0.20	0.72	5.09	0.48	20.60	-19.16				3588	2496
120f	20000	3600	2800	0.86	4.95	0.40	0.50	5.44	0.55	21.06	-20.71	0.18	0.67	5.22	3510	2847
120g	25500	3700		0.54	5.36	0.54				22.52	-0.08	0.47	5.65		3606	
130a	0		2000				1.64	4.99	-0.08		-18.40	1.52	1.52	4.98		2043
130b	4000	4000	2100	1.59	5.01	-0.03	1.53	5.02	0.02	21.60	-18.53	1.54	1.56	5.02	3954	2085
130c	8000	3950	2000	1.63	5.00	-0.07	1.48	4.82	0	21.56	-17.80				3927	1989
130d	12000	3800	2200	1.62	4.83	-0.13	1.13	4.92	0.26	20.81	-18.29	1.26	1.36	4.89	3810	2196
130e	15000	3650	2450	1.29	4.85	0.14	0.79	5.11	0.44	20.83	-19.21				3654	2481
130f	20000	3550	2850	0.96	4.98	0.35	0.55	5.44	0.53	21.23	-20.68	0.28	0.74	5.24	3576	2817
130g	25500	3650		0.58	5.37	0.53				22.59	-0.01	0.53	5.65		3639	
140a	0		2100				1.56	5.00	-0.02		-18.46	1.22	1.35	4.92		2103
140b	4000	3900	2100	1.51	4.93	0	1.48	5.05	0.05	21.23	-18.67	1.28	1.39	4.99	3846	2151
140c	8000	3900	2000	1.56	5.02	-0.01	1.50	4.87	-0.01	21.63	-17.99				3918	2007
140d	12000	3850	2200	1.59	4.88	-0.08	1.17	4.97	0.24	21.03	-18.47	1.28	1.38	4.94	3837	2208
140e	16000	3700	2450	1.34	4.90	0.12	0.84	5.15	0.43	21.06	-19.33				3705	2484
140f	20000	3600	2800	1.00	5.02	0.34	0.63	5.46	0.51	21.42	-20.70	0.36	0.80	5.27	3627	2790
140g	25500	3700		0.66	5.38	0.50				22.68	-0.08	0.59	5.65		3684	
150a	0		2150				1.39	4.99	0.10		-18.47	0.97	1.18	4.86		2184
150b	4000	3750	2200	1.37	4.93	0.10	1.39	5.05	0.12	21.19	-18.69	1.25	1.38	4.99	3801	2181
150c	8000	2900	2050	1.39	4.99	0.10	1.51	4.92	0	21.45	-18.17				3837	2040
150d	12000	3850	2200	1.59	4.92	-0.07	1.20	5.02	0.24	21.20	-18.64	1.28	1.38	4.98	3861	2226
150e	16000	3750	2500	1.36	4.95	0.12	0.88	5.18	0.42	21.28	-19.42				3750	2475
150f	20000	3650	2750	1.03	5.05	0.33	0.68	5.47	0.50	21.56	-20.70	0.43	0.85	5.28	3663	2766
150g	25500	3750		0.73	5.40	0.47				22.77	-0.17	0.66	5.65		3729	
160a	0		2200				1.32	4.94	0.14		-18.30	0.70	1.00	4.75		2211
160b	4000	3750	2200	1.20	4.87	0.21	1.37	5.04	0.13	20.89	-18.66	1.12	1.29	4.94	3690	2196
160c	8000	3750	2100	1.38	5.00	0.11	1.46	4.95	0.04	21.49	-18.30				3831	2094
160d	12000	3900	2250	1.49	4.92	0.01	1.21	5.06	0.24	21.18	-18.79	1.20	1.35	5.00	3828	2250
160e	16000	3800	2450	1.37	4.99	0.13	0.94	5.19	0.39	21.46	-19.43				3783	2454
160f	20000	3700	2750	1.09	5.08	0.30	0.74	5.48	0.47	21.71	-20.71	0.50	0.91	5.30	3714	2739
160g	25500	3750		0.77	5.41	0.46				22.87	-0.27	0.75	5.65		3774	
170a	0		2250				1.21	4.86	0.20		-18.03	0.61	0.93	4.66		2214
170b	4000	3600	2200	1.05	4.77	0.27	1.30	5.03	0.18	20.40	-18.64	0.88	1.13	4.88	3549	2244
170c	8000	3800	2150	1.29	4.95	0.16	1.42	4.92	0.07	21.25	-18.19				3768	2097
170d	12000	3750	2275	1.45	4.95	0.05	1.20	5.09	0.25	21.30	-18.91	1.20	1.45	5.03	3834	2271
170e	16000	3800	2425	1.34	5.01	0.15	1.00	5.21	0.36	21.53	-19.48				3789	2442
170f	20000	3750	2700	1.14	5.10	0.28	0.81	5.49	0.45	21.82	-20.70	0.56	0.96	5.32	3756	2712
170g	25500	3800		0.86	5.42	0.43				22.97	-0.37	0.83				

TABLA 8

TANTEOS ADICIONALES EN LAS SECCIONES CON OBSTACULOS PARA EL SEGUNDO EJEMPLO

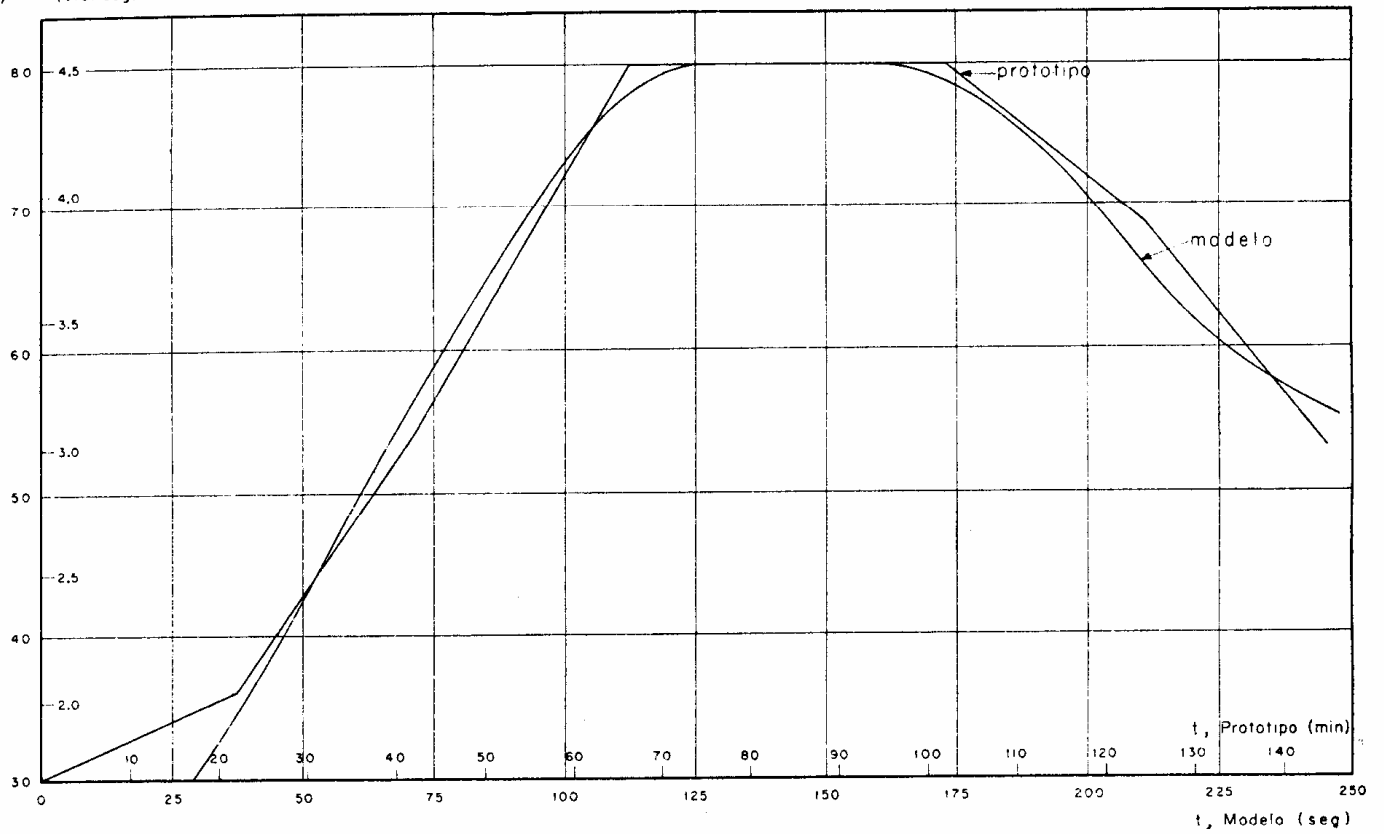
Pto	C'	V'-K'	V'	y'	V' ² /2g	A'	Q	E'	y ₀	A ₀	V ₀	V ₀ ² /2g	E ₀	y"	A"	V"	$\frac{(V_0-V'')^2}{2g(\Delta h)}$	$\frac{V''^2}{2g}$	E''+Δh	C''	K''	G _d
30c	4.42	0.90	1.09	2.81	0.06	28.4	31.0	2.87	2.56	12.80	2.44	0.30	2.86	2.73	27.2	1.14	0.09	0.07	2.88	4.36	0.12	-16.42
40c	4.44	0.96	1.11	2.85	0.06	29.0	32.3	2.91	2.58	12.90	2.50	0.32	2.90	2.76	27.6	1.17	0.09	0.07	2.92	4.38	0.10	-16.45
50c	4.47	0.97	1.13	2.90	0.06	29.6	33.5	2.96	2.62	13.10	2.56	0.34	2.96	2.79	28.0	1.20	0.10	0.07	2.96	4.40	0.08	-16.48
60c	4.52	1.04	1.18	2.98	0.07	30.8	36.3	3.05	2.66	13.30	2.73	0.38	3.04	2.85	29.0	1.25	0.12	0.08	3.05	4.44	0.05	-16.56
70c	4.59	1.12	1.28	3.10	0.08	32.6	41.7	3.18	2.65	13.20	3.16	0.51	3.16	2.93	30.0	1.39	0.16	0.10	3.19	4.49	-0.05	-16.52
80c	4.69	1.26	1.33	3.26	0.09	35.2	46.8	3.35	2.79	13.95	3.35	0.57	3.36	3.07	32.1	1.46	0.18	0.11	3.36	4.57	-0.09	-16.73
80e	4.88	0.37	0.79	3.57	0.03	40.4	31.9	3.60	3.40	17.00	1.88	0.18	3.58	3.52	39.4	0.81	0.06	0.03	3.61	4.85	0.41	-19.00
90c	4.78	1.25	1.34	3.40	0.09	37.4	50.1	3.49	2.90	14.50	3.46	0.61	3.51	3.17	33.6	1.49	0.20	0.11	3.48	4.63	-0.09	-16.94
90e	4.89	0.36	0.80	3.59	0.03	40.7	32.6	3.62	3.43	17.10	1.91	0.19	3.62	3.52	39.4	0.83	0.06	0.04	3.62	4.85	0.40	-18.97
100c	4.88	1.30	1.38	3.57	0.10	40.3	55.6	3.67	2.89	14.40	3.86	0.77	3.66	3.27	35.2	1.58	0.27	0.13	3.67	4.70	-0.14	-17.08
100e	4.93	0.39	0.81	3.65	0.03	41.7	33.8	3.68	3.49	17.50	1.94	0.19	3.68	3.58	40.6	0.83	0.06	0.04	3.68	4.89	0.41	-19.14
110c	4.96	1.29	1.39	3.70	0.10	42.6	59.2	3.80	3.00	15.00	3.95	0.79	3.79	3.38	37.2	1.59	0.29	0.13	3.80	4.77	-0.03	-17.36
110e	4.97	0.48	0.86	3.72	0.04	43.0	37.0	3.76	3.53	17.60	2.10	0.23	3.76	3.65	41.8	0.89	0.07	0.04	3.76	4.92	0.38	-19.17
120c	5.04	1.27	1.40	3.85	0.10	45.3	63.4	3.95	3.08	15.40	4.12	0.87	3.95	3.49	39.0	1.63	0.32	0.14	3.95	4.83	-0.14	-17.55
120e	5.00	0.60	0.96	3.77	0.05	44.0	42.2	3.82	3.52	17.60	2.40	0.30	3.82	3.68	42.2	1.00	0.10	0.05	3.83	4.95	0.33	-19.13
130c	5.08	1.24	1.38	3.92	0.10	46.6	64.3	4.02	3.16	15.80	4.07	0.85	4.01	3.57	40.4	1.59	0.32	0.13	4.02	4.88	-0.09	-17.84
130e	5.05	0.63	0.99	3.87	0.05	45.7	45.2	3.92	3.60	18.00	2.51	0.32	3.92	3.75	43.5	1.04	0.11	0.06	3.92	4.99	0.31	-19.23
140c	5.10	1.23	1.38	3.96	0.10	47.4	65.4	4.06	3.22	16.10	4.06	0.84	4.06	3.62	41.2	1.59	0.31	0.13	4.06	4.91	-0.07	-17.98
140e	5.10	0.66	1.01	3.96	0.05	47.4	47.9	4.01	3.65	18.25	2.62	0.35	4.00	3.83	45.0	1.06	0.12	0.06	4.01	5.03	0.31	-19.37
150c	5.07	1.15	1.32	3.91	0.09	46.5	61.5	4.00	3.28	16.43	3.75	0.72	4.00	3.62	41.5	1.49	0.26	0.12	4.00	4.91	-0.02	-18.15
150e	5.14	0.72	1.05	4.03	0.06	48.8	51.2	4.09	3.71	18.55	2.76	0.39	4.10	3.88	46.0	1.11	0.14	0.06	4.08	5.06	0.29	-19.42
160c	5.10	1.09	1.29	3.96	0.08	47.4	61.1	4.04	3.35	16.75	3.65	0.68	4.03	3.68	42.2	1.45	0.25	0.11	4.04	4.94	0.04	-18.35
160e	5.17	0.78	1.08	4.09	0.06	50.0	54.0	4.15	3.72	18.60	2.90	0.43	4.15	3.93	46.8	1.15	0.16	0.07	4.16	5.08	0.27	-19.44
170c	5.04	1.09	1.28	3.85	0.08	45.3	58.0	3.93	3.33	16.60	3.49	0.61	3.94	3.61	41.0	1.41	0.22	0.10	3.93	4.90	0.06	-18.25
170e	5.19	0.77	1.09	4.13	0.06	50.7	55.3	4.19	3.75	18.75	2.95	0.44	4.19	3.96	47.3	1.17	0.16	0.07	4.19	5.10	0.26	-19.49
180c	4.99	0.99	1.21	3.76	0.08	43.7	52.9	3.84	3.31	16.55	3.20	0.52	3.83	3.57	40.6	1.30	0.18	0.09	3.84	4.89	0.14	-18.40
180e	5.21	0.81	1.12	4.17	0.06	51.6	57.8	4.23	3.74	18.70	3.09	0.49	4.23	3.98	47.9	1.21	0.18	0.07	4.23	5.11	0.24	-19.47
190c	4.95	0.92	1.16	3.65	0.07	41.8	48.5	3.72	3.27	16.35	2.97	0.45	3.72	3.49	39.0	1.24	0.15	0.08	3.72	4.83	0.17	-18.25
190e	5.21	0.76	1.10	4.17	0.06	51.6	56.8	4.23	3.77	18.85	3.01	0.47	4.24	3.99	48.0	1.18	0.17	0.07	4.23	5.12	0.26	-19.56
200c	4.90	0.87	1.14	3.61	0.07	41.1	46.8	3.68	3.27	16.33	2.87	0.42	3.68	3.47	38.6	1.21	0.14	0.08	3.68	4.81	0.19	-18.24
200e	5.17	0.73	1.07	4.09	0.06	50.0	53.5	4.15	3.73	18.65	2.89	0.43	4.15	3.93	46.9	1.14	0.16	0.07	4.16	5.09	0.28	-19.50

TABLA 9

TANTEOS ADICIONALES EN LA SECCION INICIAL PARA
EL SEGUNDO EJEMPLO

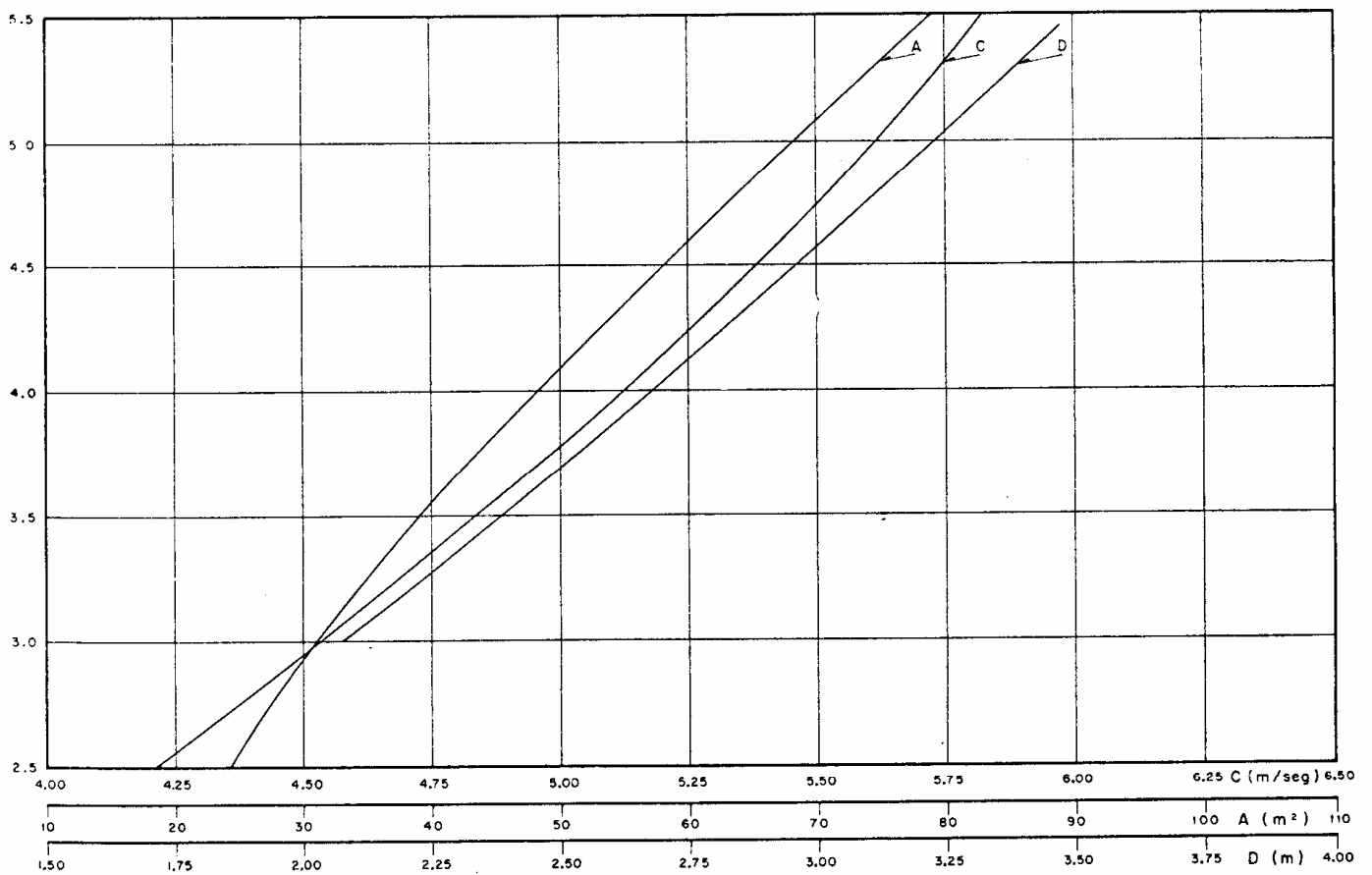
f	y	C	Q	A	V
10	2.63	4.32	33.0	26.0	1.27
20	2.70	4.35	35.5	26.8	1.32
30	2.81	4.42	42.5	28.4	1.50
40	2.99	4.52	51.4	30.8	1.67
50	3.19	4.65	61.5	34.0	1.81
60	3.39	4.77	72.5	37.2	1.95
70	3.56	4.87	80.0	40.0	2.00
80	3.65	4.93	80.0	41.7	1.92
90	3.74	4.98	80.0	43.4	1.84
100	3.79	5.01	80.0	44.2	1.81
110	3.81	5.02	76.0	44.4	1.71
120	3.79	5.01	70.0	44.2	1.58
130	3.74	4.98	65.0	43.4	1.50
140	3.64	4.92	56.5	41.6	1.36
150	3.54	4.86	46.5	39.9	1.17
160	3.36	4.75	37.0	36.8	1.01
170	3.21	4.66	31.5	34.3	0.92
180	3.11	4.60	30.0	32.7	0.92
190	3.05	4.56	30.0	31.8	0.94
200	2.98	4.52	30.0	30.8	0.97

Q (Prototipo) Q (Modelo)
(m³/seg) (lts/seg)



GRAFICA N° 1

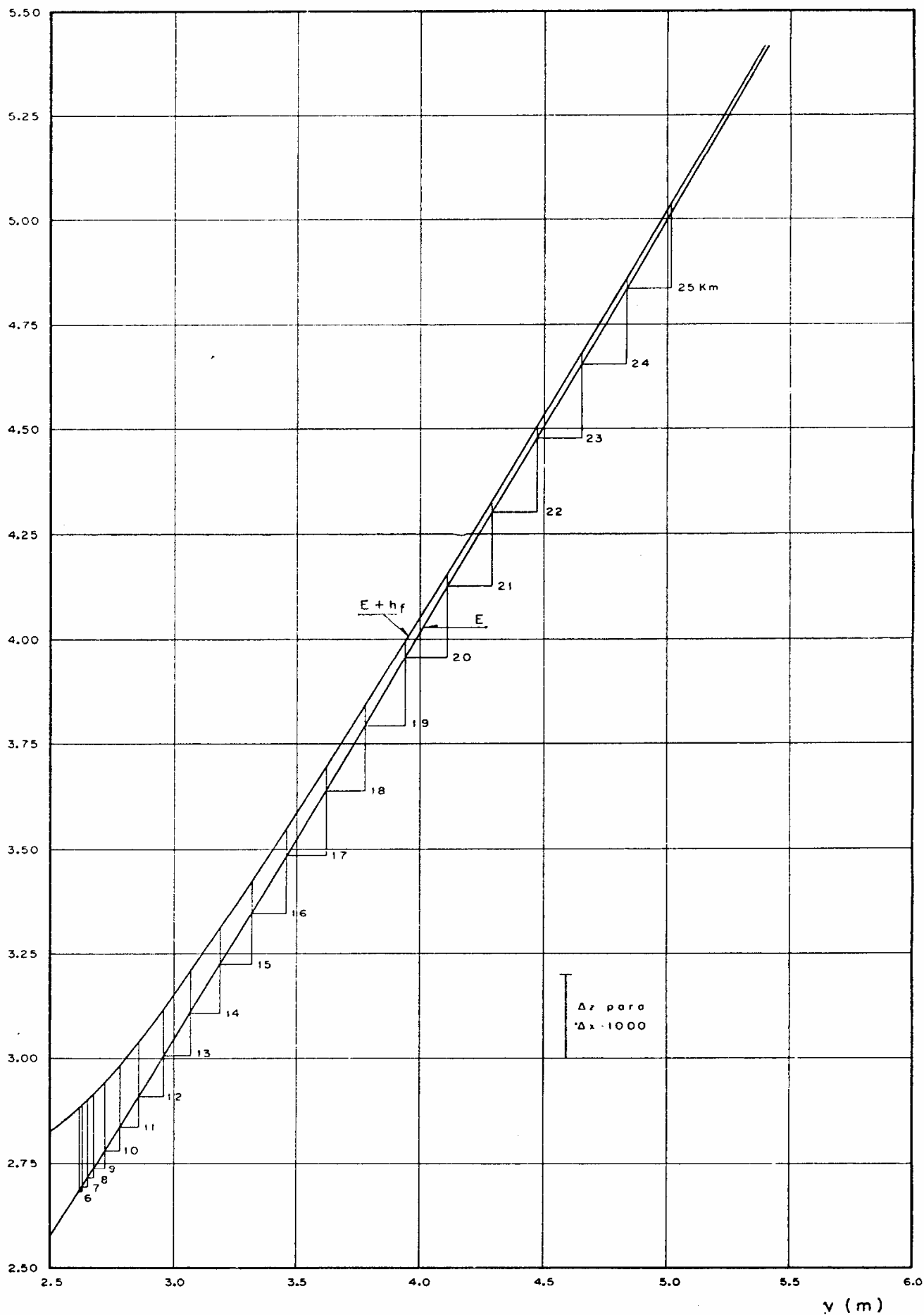
/ (m)



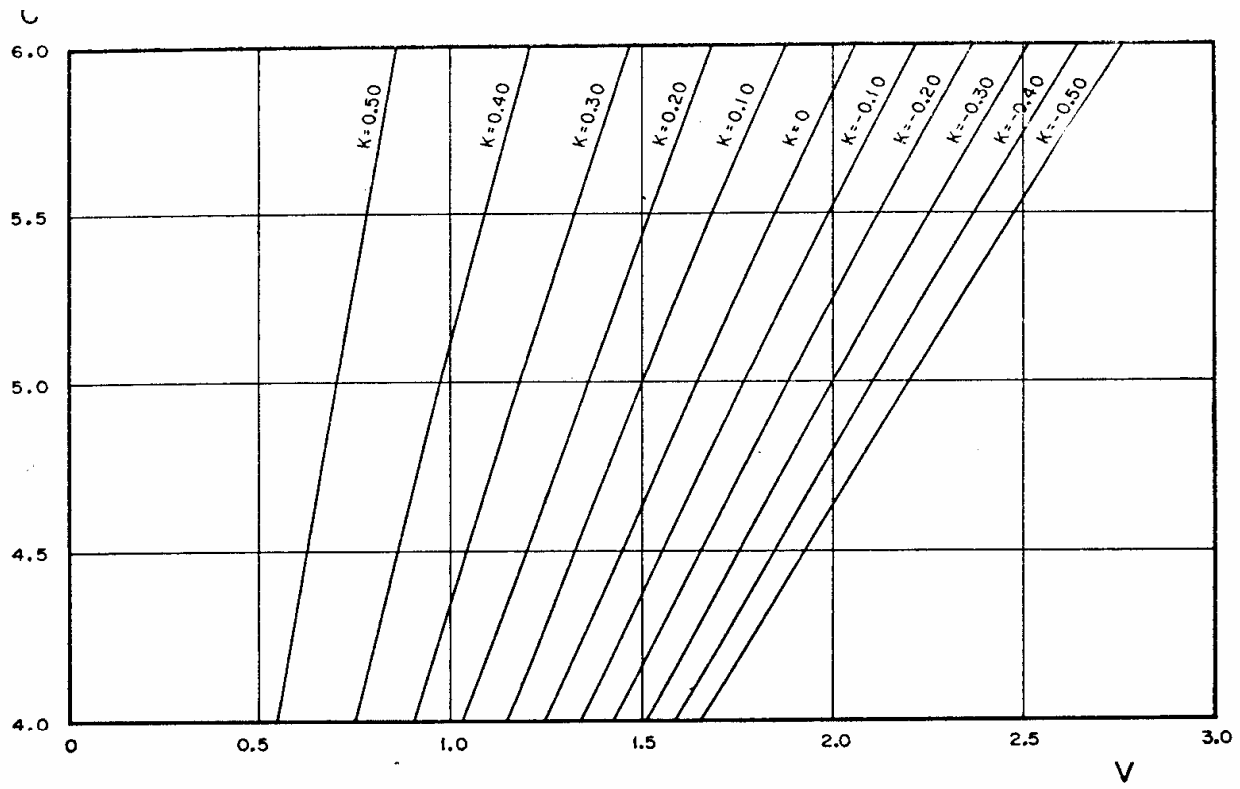
GRAFICA N° 2

E
 (m)

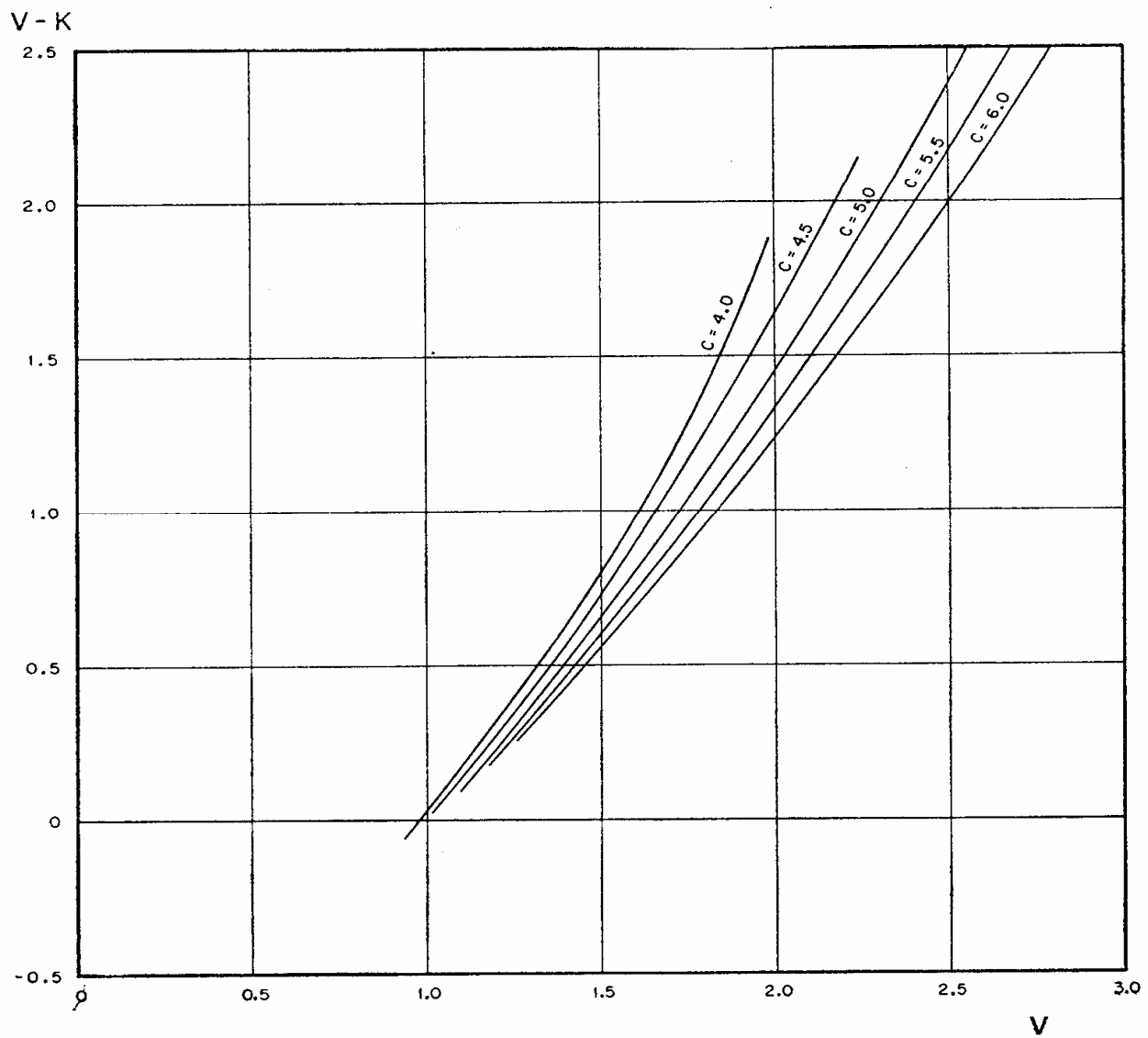
$E + h_f$
 (m)



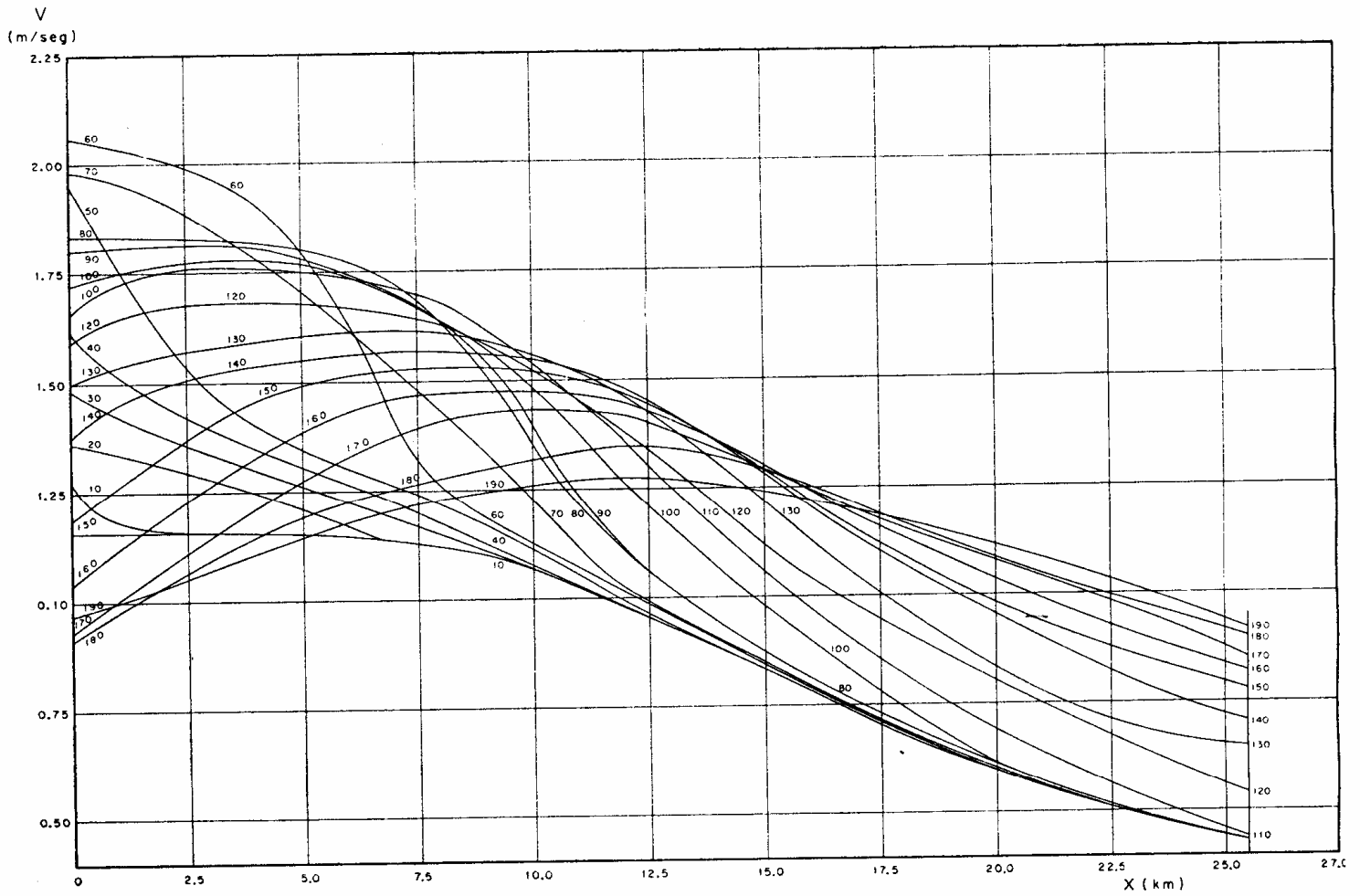
GRAFICA Nº 3



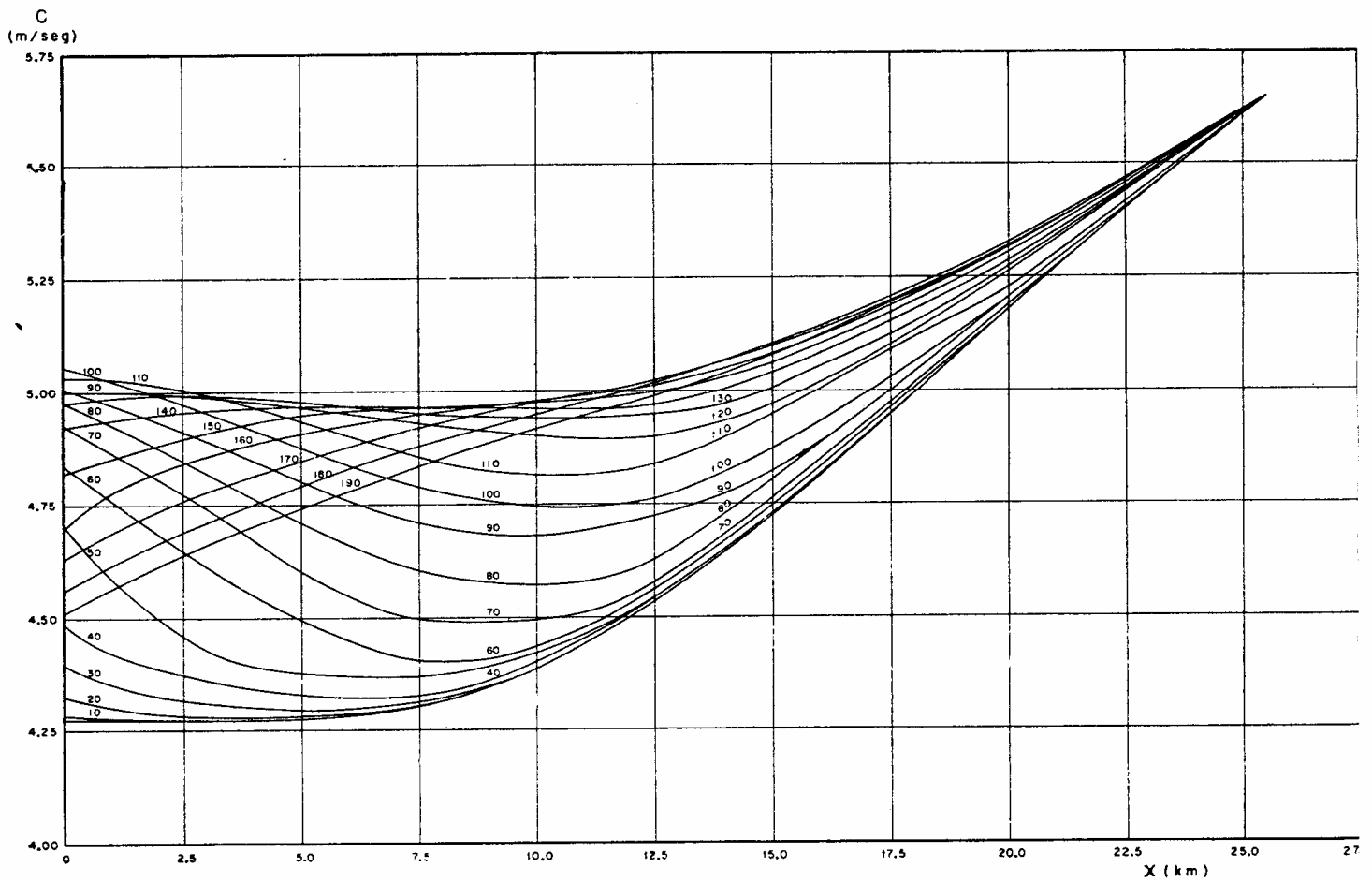
GRAFICA N° 4



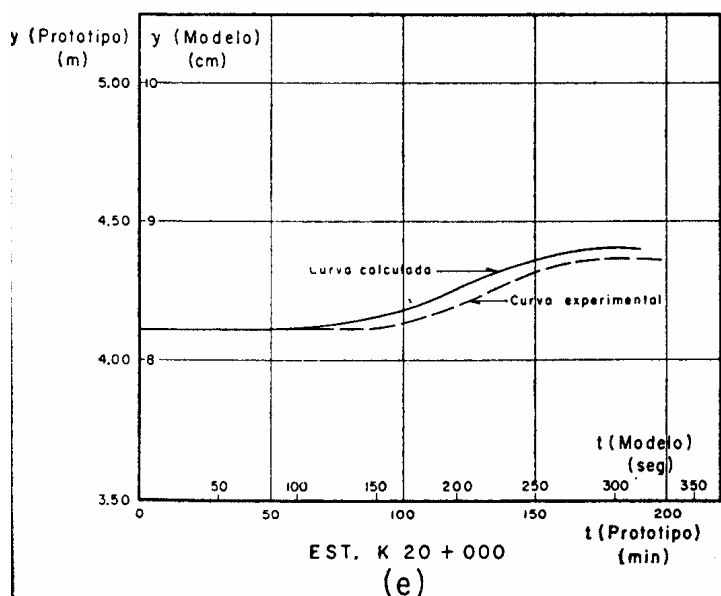
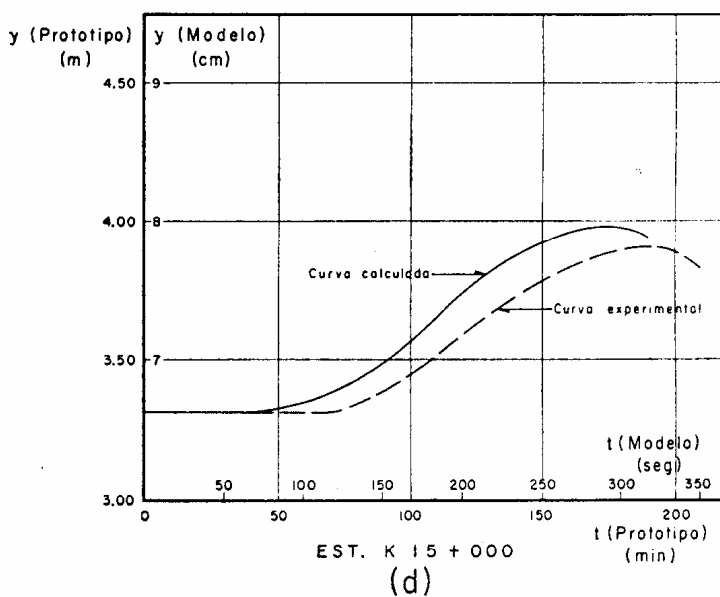
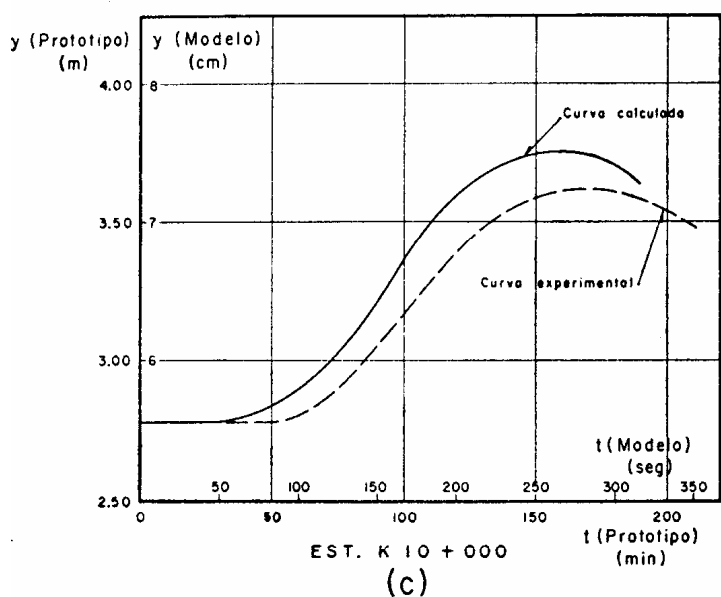
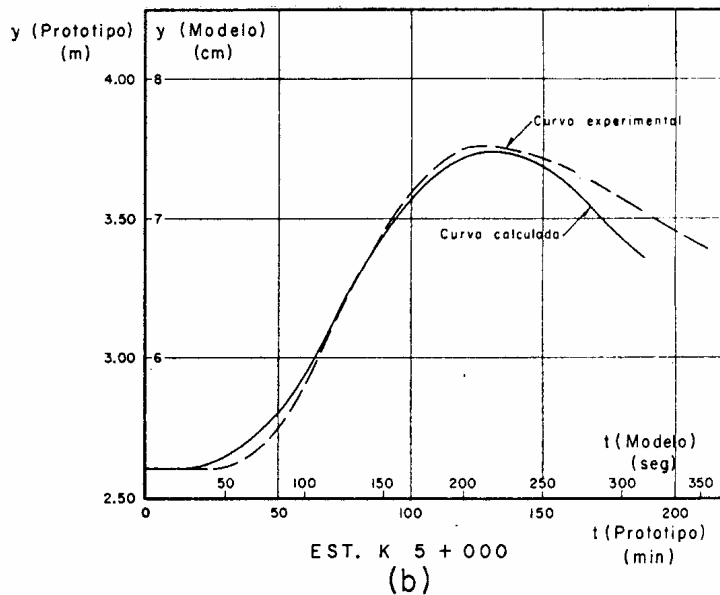
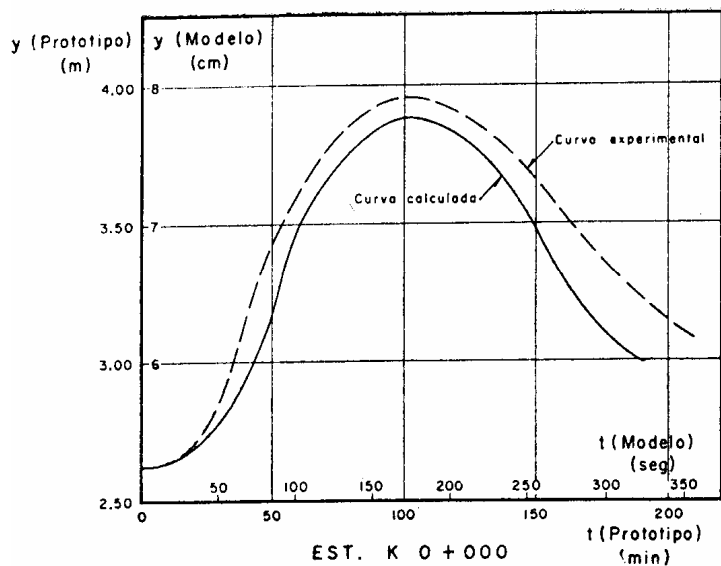
GRAFICA N° 5



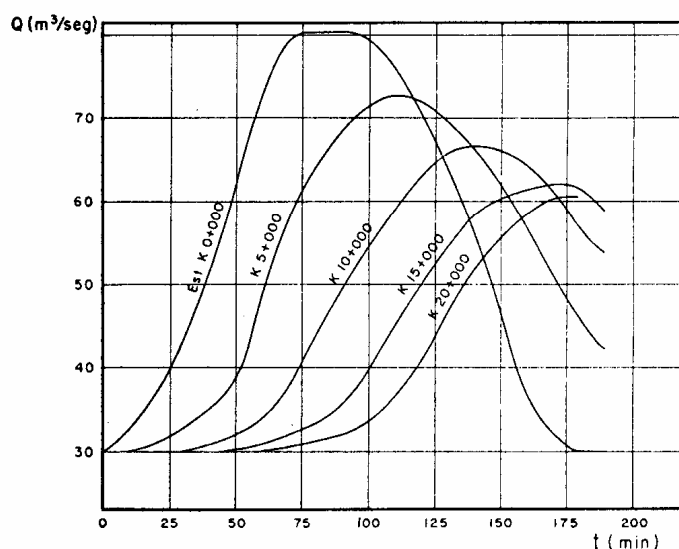
GRAFICA Nº 6



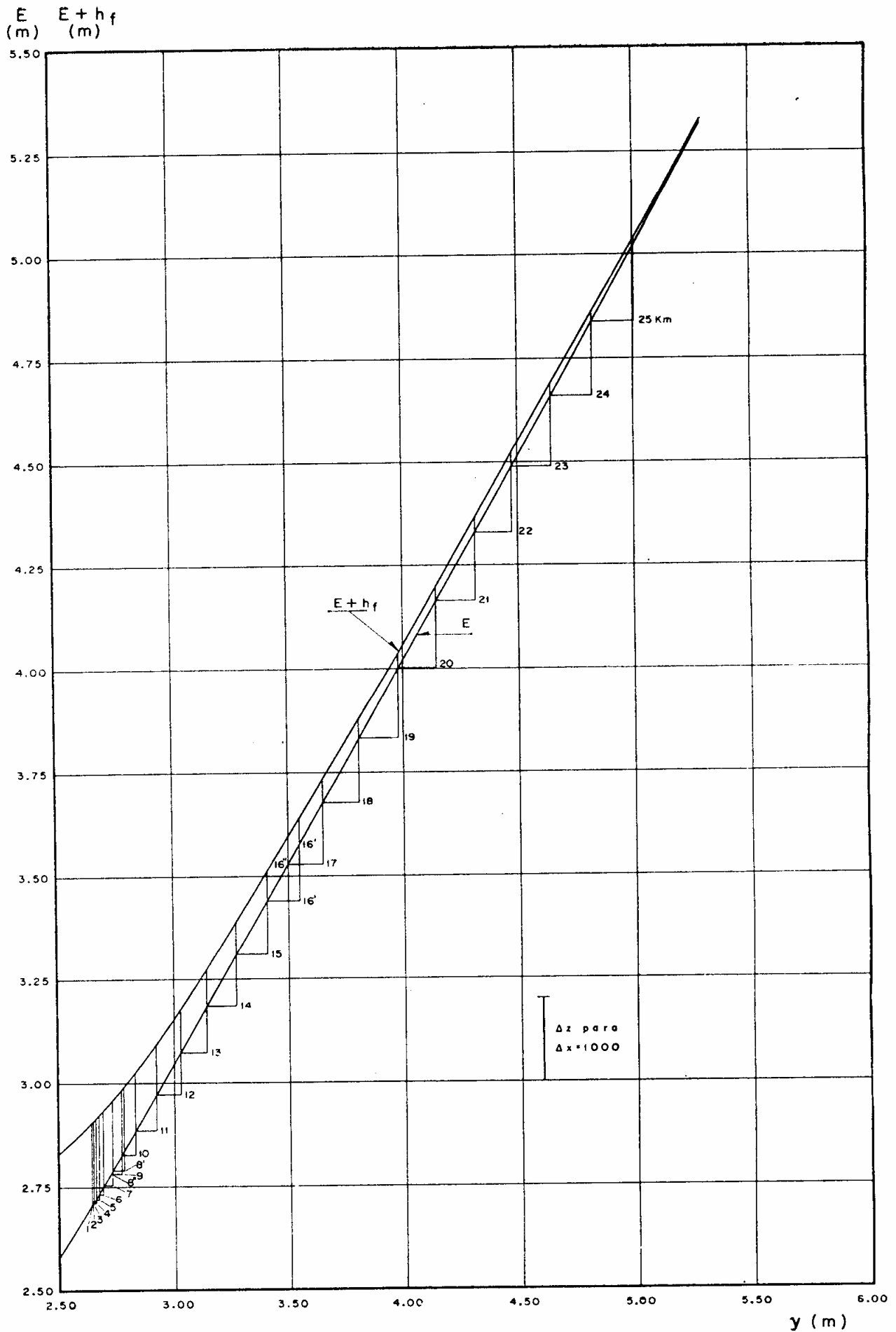
GRAFICA Nº 7



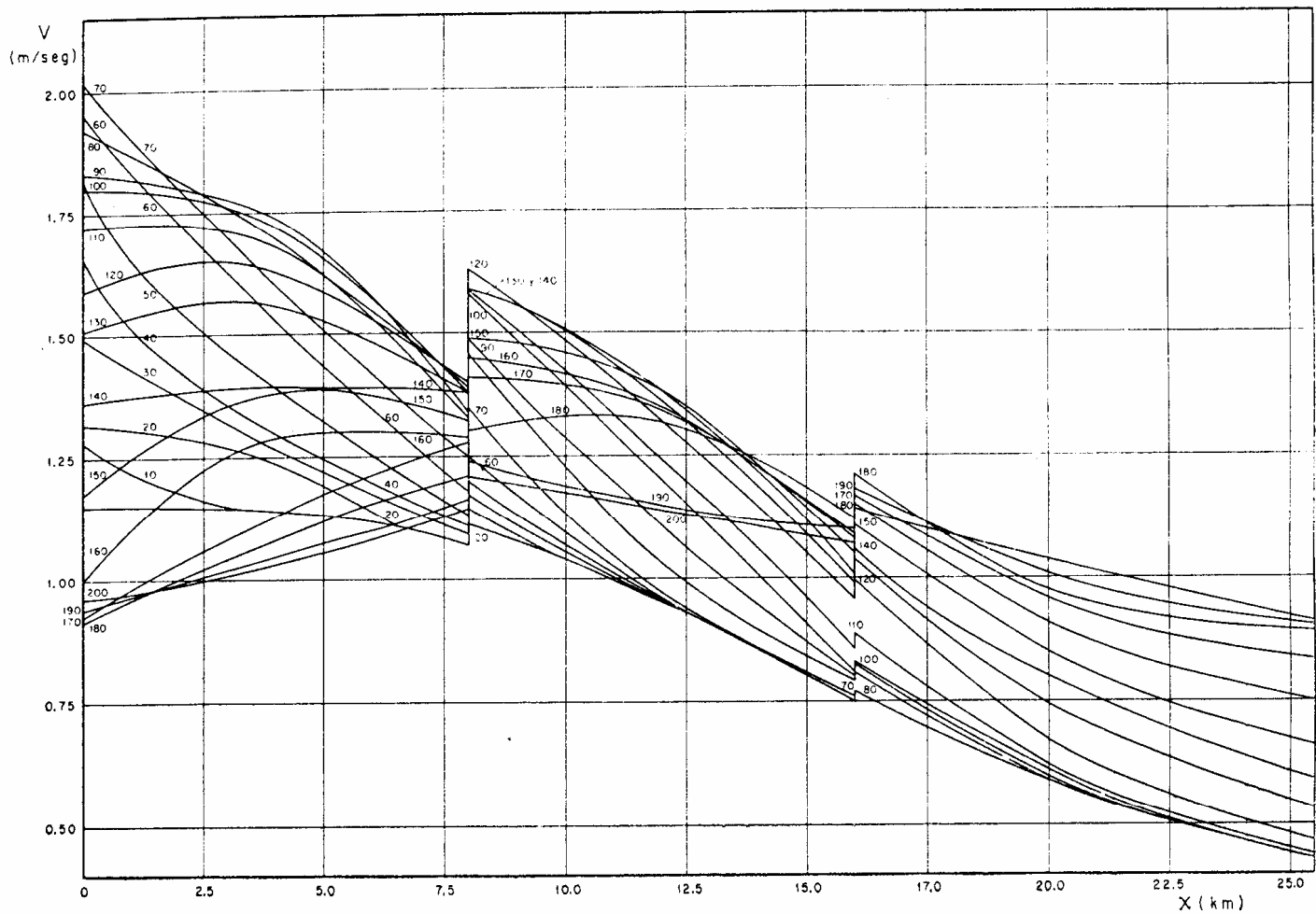
VARIACION DE TIRANTES
EN DIFERENTES SECCIONES
(1er EJEMPLO)
GRAFICA Nº 8



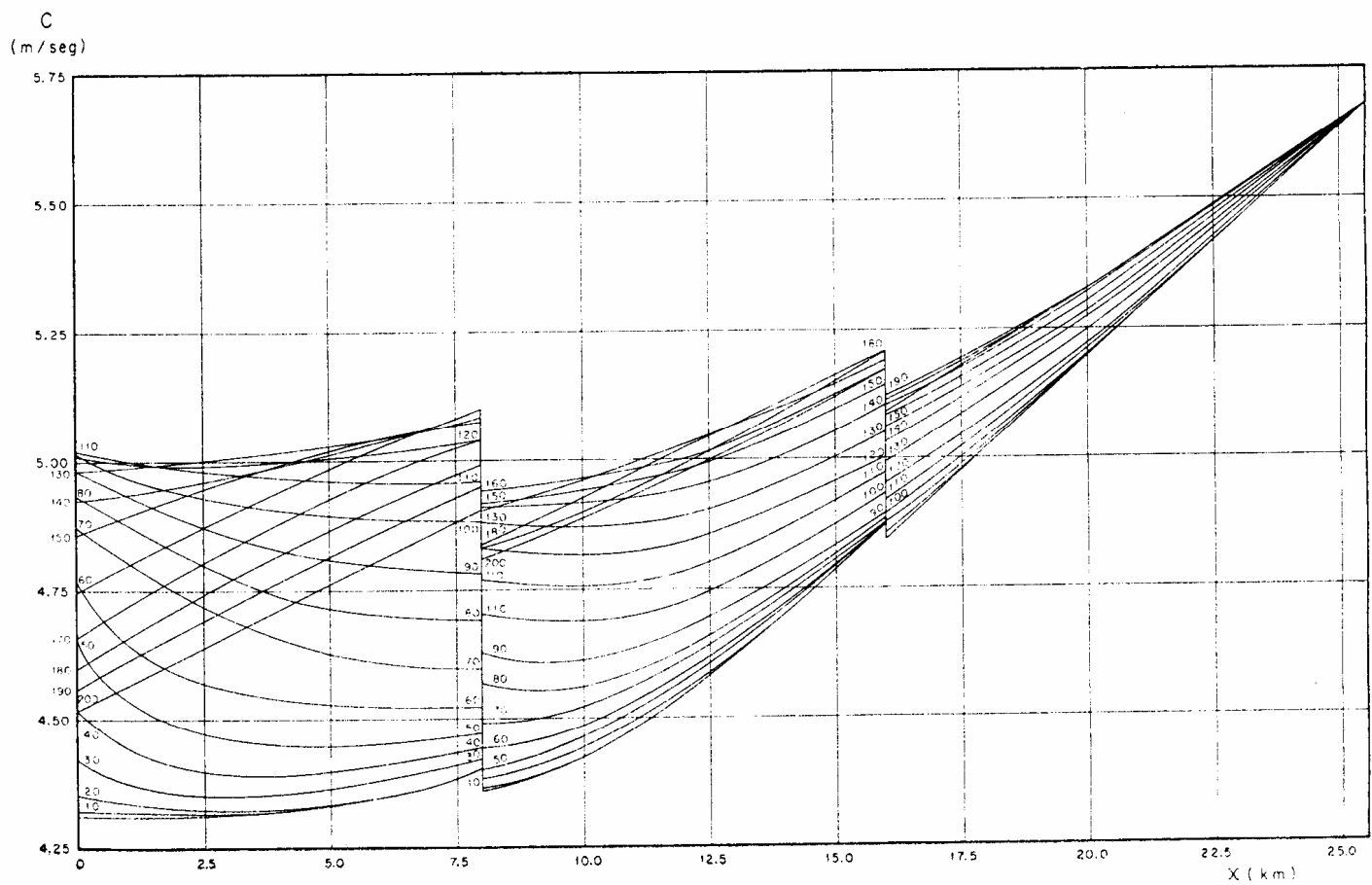
VARIACION DE GASTOS
EN DIFERENTES SECCIONES
(1er EJEMPLO)
GRAFICA Nº 9



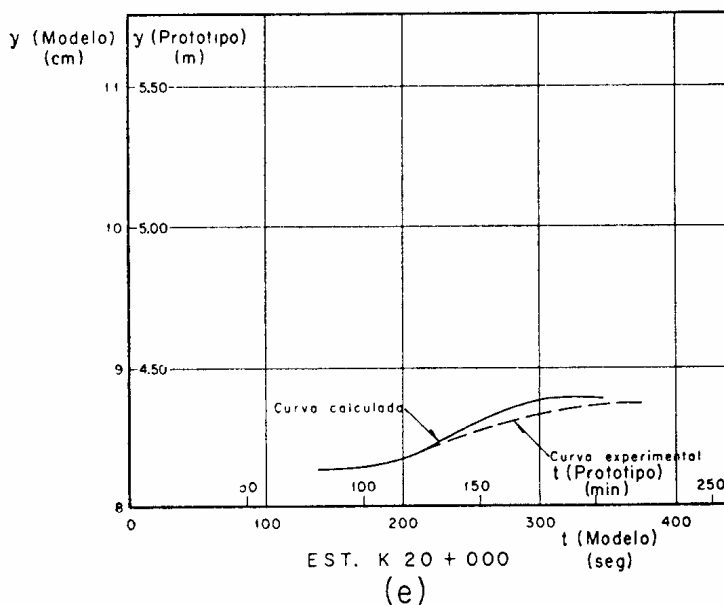
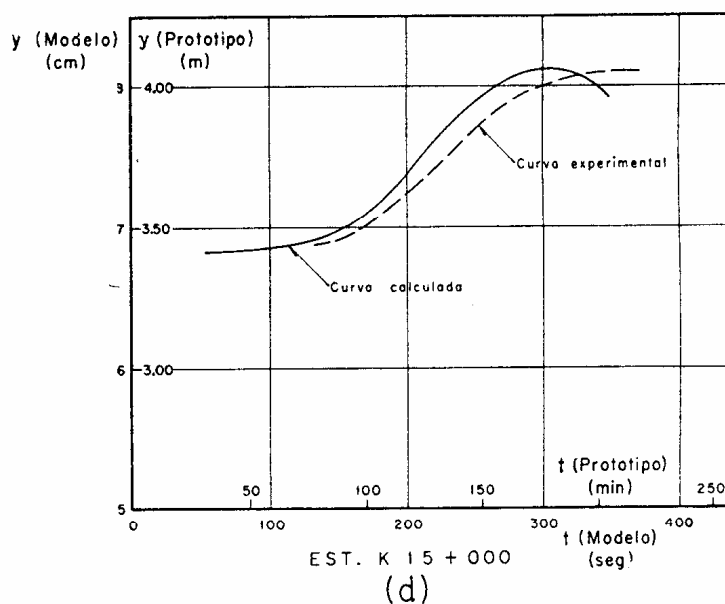
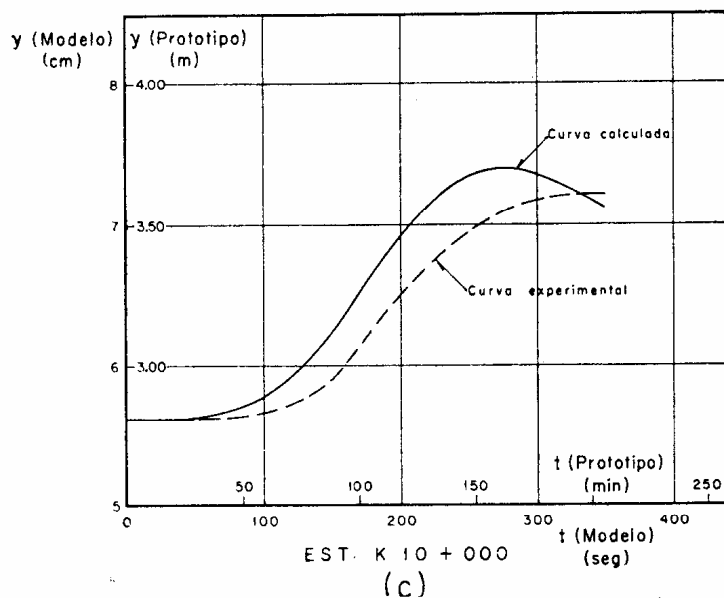
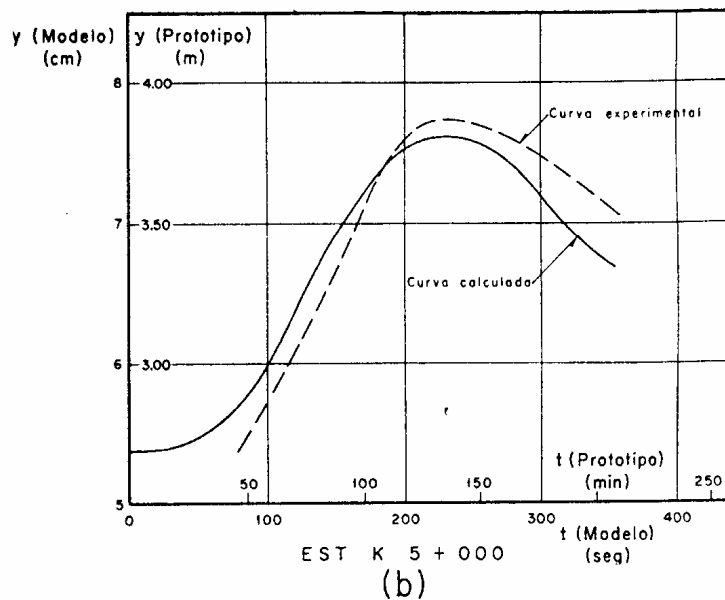
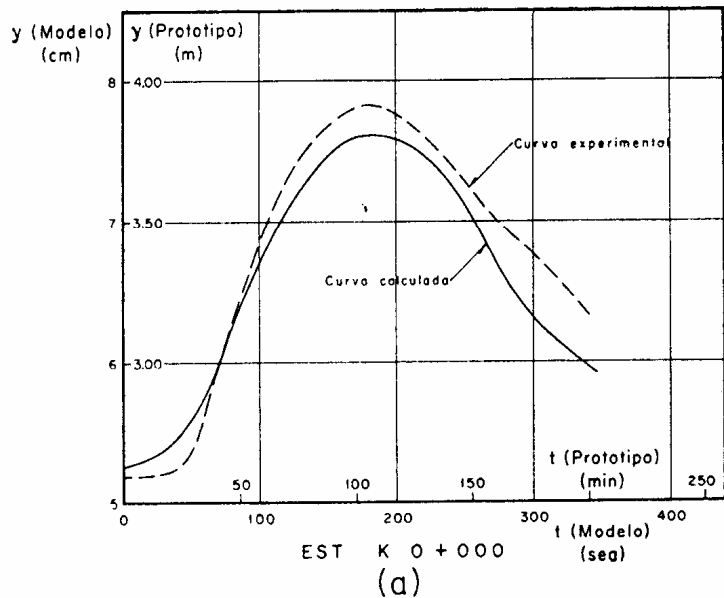
GRAFICA Nº 10



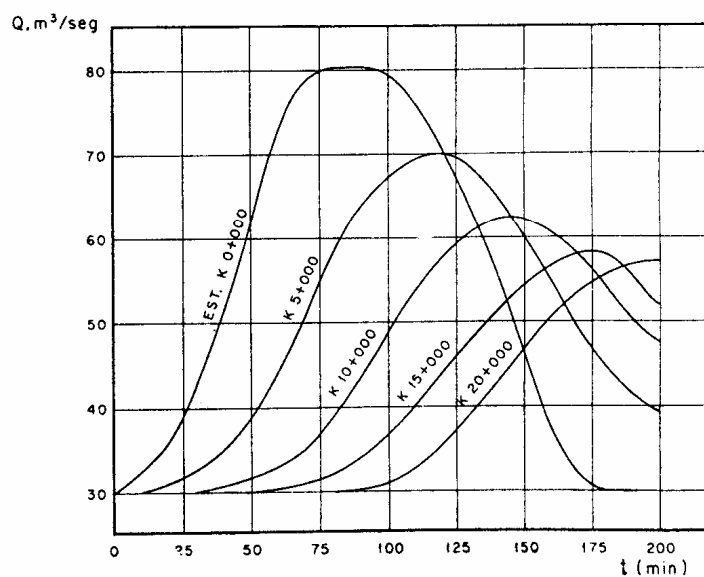
GRAFICA Nº 11



GRAFICA Nº 12



VARIACION DE TIRANTES
EN DIFERENTES SECCIONES
(2º EJEMPLO)
GRAFICA Nº 13



VARIACION DE GASTOS
EN DIFERENTES SECCIONES
(2º EJEMPLO)
GRAFICA Nº 14

APENDICE B ADAPTACION DEL METODO DE CARACTERISTICAS AL USO DE CALCULADORAS ELECTRONICAS

por *Ismael HERRERA* *

El método de características descrito anteriormente puede ser adaptado, mediante ligeros cambios, al uso de calculadoras electrónicas. Para este objeto es necesario eliminar todos los cálculos gráficos y además es conveniente eliminar los tanteos.

Por lo mismo, el método se basaría en los dos principios siguientes:

1. Las velocidades y celeridades se obtendrán en puntos que no serán fijados de antemano, sino que surgirán como parte de los resultados de los cálculos.
2. El cálculo se hará paso a paso en la retícula formada por las características en el plano $x-t$. En cada paso se eliminará todo tanteo, al suponer que el uso de calculadoras permitirá tomar intervalos suficientemente pequeños como para desprestigiar las variaciones de las velocidades y celeridades en dichos intervalos.

Para proceder de una manera sistemática es conveniente adoptar una notación adecuada.

Tenemos dos clases de curvas características, aquellas a lo largo de las cuales

$$\frac{dx}{dt} = V + C,$$

que llamaremos características de avance, y aquellas a lo largo de las cuales

$$\frac{dx}{dt} = V - C,$$

que llamaremos de retroceso. Es decir, las primeras son las curvas $\eta = \text{cte}$ y las segundas $\xi = \text{cte}$, de la figura 1. Consideremos a una familia de características de avance, las cuales se numeran de acuerdo con el orden en que ocurren a la entrada del canal.

Así la 0 será aquella que ocurre cuando $t = 0$; la 1, la que ocurre inmediatamente después, etc.

Las características de retroceso serán numerados de acuerdo con el orden en que se crucen, al avanzar por la característica cero de avance, hacia el canal aguas abajo.

Los puntos en los cuales vamos a determinar las velocidades y celeridades son los puntos de

intersección de las dos familias de características. Estos los denotaremos por la pareja ordenada de números correspondiente a las características que pasan por el punto, escribiendo primero el número correspondiente a la de retroceso.

Así el punto (2,1) será aquel determinado por la segunda característica de retroceso y la número uno de avance, como se indica en la figura 14.

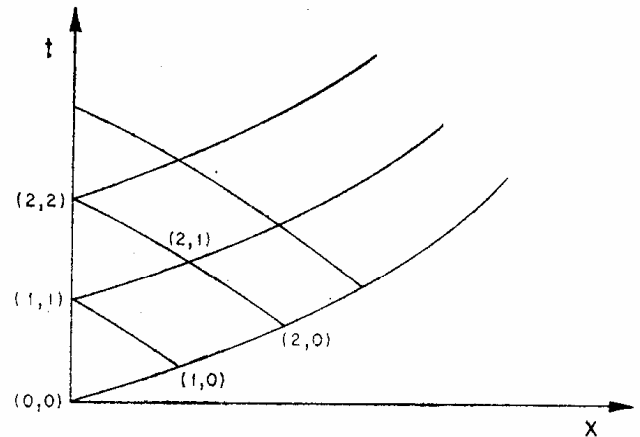


FIG. 14

Supongamos que a la entrada del canal se conoce el gasto para todo tiempo y que en la característica cero de avance se conocen tanto las celeridades como las velocidades.

Si V_{nm} , C_{nm} , X_{nm} , t_{nm} y Q_{nm} son la velocidad, celeridad, posición, tiempo y gasto respectivamente en el punto (n, m) , entonces los datos conocidos son Q_{n0} , X_{n0} , t_{n0} , V_{n0} , C_{n0} , X_{n0} , y t_{n0} para toda n .

Las ecuaciones diferenciales (3 a 6), que gobiernan el movimiento, implican que

$$\frac{d(V + 2C)}{dt} = g(S_0 - S_f) \quad (28.a)$$

a lo largo de las curvas

$$\frac{dx}{dt} = V + C \quad (28.b)$$

y

$$\frac{d(V - 2c)}{dt} = g(S_0 - S_f) \quad (29.a)$$

a lo largo de las curvas

$$\frac{dx}{dt} = V - C \quad (29.b)$$

Reemplacemos el sistema de ecuaciones (28) y (29) por el sistema de ecuaciones en diferencias finitas (7) a (10). El operador Δ_u usado antes, aplicado a cualquier función, nos da el incremento de esa función al alcanzar un intervalo a lo largo de una de las características de avance. Así

$$\Delta_u f = f_{n,m} - f_{n-1,m} \quad (30.a)$$

* Investigador del Instituto de Ingeniería.

En forma análoga

$$\Delta_d f = f_{n,m} - f_{n,m-1} \quad (30.b)$$

Con esta notación y tomando en cuenta las ecuaciones (28) y (29) puede escribirse:

$$\Delta_u X = (V + C)_{n-1,m} \quad (31.a)$$

$$\Delta_d X = (V - C)_{n,m-1} \quad (31.b)$$

De las ecuaciones (30) tenemos que

$$\Delta_u X - \Delta_d X = X_{n,m-1} - X_{n-1,m} \quad (32.a)$$

$$\Delta_u t - \Delta_d t = t_{n,m-1} - t_{n-1,m} \quad (32.b)$$

Las ecuaciones (31) y (32) permiten determinar $\Delta_u X$, $\Delta_u t$, $\Delta_d X$ y $\Delta_d t$ y por lo mismo $X_{n,m}$ y $t_{n,m}$ cuando se conocen $X_{n,m-1}$, $t_{n,m-1}$, $X_{n-1,m}$ y $t_{n-1,m}$.

Al usar nuevamente las ecuaciones (28) y (29) se tiene que:

$$\Delta_u (V + 2C) = g(S_0 - S_f)_{n-1,m} \Delta_u t \quad (33.a)$$

$$\Delta_d (V - 2C) = g(S_0 - S_f)_{n,m-1} \Delta_d t \quad (33.b)$$

que nos permiten obtener $V_{n,m}$ y $C_{n,m}$ cuando se conocen $C_{n,m-1}$, $V_{n,m-1}$, $C_{n-1,m}$ y $V_{n-1,m}$.

Las ecuaciones anteriores nos permiten avanzar paso a paso a lo largo de características de avance. Sin embargo, un procedimiento especial debe ser empleado para determinar las posiciones, tiempos, celeridades y velocidades en el punto inicial de cada característica de avance, es decir, para determinar, $t_{n,n}$, $C_{n,n}$ y $V_{n,n}$.

Para determinar estas cantidades será necesario conocer $X_{n,n-1}$, $t_{n,n-1}$, $C_{n,n-1}$ y $V_{n,n-1}$. Ya que suponemos que el gasto a la entrada del canal se conoce, tenemos la ecuación

$$f(V_{n,n}, C_{n,n}) = Q_{n,n}$$

donde f es cierta función conocida.

Por otra parte

$$\Delta_d x = -x_{n,n-1}$$

ya que $x_{n,n} = 0$. Además por (31.b)

$$\Delta_d t = \frac{1}{(V - C)_{n,n-1}} \Delta_d x$$

que nos permite calcular $\Delta_d t$ y por lo mismo $t_{n,n}$. Finalmente en vista de (33.b) tenemos que

$$\Delta_d (V - 2C) = g(S_0 - S_f)_{n,n-1} \Delta_d t$$

que nos permite calcular $(V - 2C)_{n,n}$ lo cual junto con la ecuación (34) nos da $V_{n,n}$ y $C_{n,n}$.

Sugestión para mejorar la convergencia del método. Como la convergencia del método depende en gran medida de la estimación que se haga de $S_0 - S_f$ en las ecuaciones (5) y (6), para mejorar la aproximación dada por (33) parece conveniente usar como una primera estimación de $V_{n,m}$ y $C_{n,m}$ la dada por

$$(V + 2C)_{n,m} \approx (V + 2C)_{n-1,m} + (V + 2C)_{n-1,m-1} - (V + 2C)_{n-2,m-1} \quad (36.a)$$

$$(V - 2C)_{n,m} \approx (V - 2C)_{n,m-1} + (V - 2C)_{n-1,m-1} - (V - 2C)_{n-1,m-2} \quad (36.b)$$

Entonces en lugar de usar en (33) los valores de $S_0 - S_f$ calculados con los valores de V y C en los extremos de los respectivos intervalos, úsense los valores de $S_0 - S_f$ calculados con los promedios de V y C en los respectivos intervalos.

REFERENCIAS

- 1 - Richard von Mises, "Mathematical theory of compressible fluid flow", Vol. III.
- 2 - Ven Te Chow, "Open Channel Hydraulics".
- 3 - Hunter D. Rouse, "Engineering Hydraulics".
- 4 - Pin Nam Lin, "Numerical Analysis of continuous unsteady flow in open channels", Trans. A. G. U. (Abril 1952).
- 5 - Gilberto Sotelo A., "Cálculo de tanques de amortiguación de sección trapecial", revista Ingeniería Hidráulica en México" (1961).