

Procesos estocásticos de sistemas mecánicos*

Ismael HERRERA **

INTRODUCCION

La teoría de los movimientos brownianos o más generalmente de los procesos estocásticos se ha desarrollado extensamente desde el principio de este siglo; se planteó originalmente en conexión con los procesos de difusión pero posteriormente ha resultado adecuada para explicar problemas cuya variedad aumenta cada día.

Actualmente el tema es interesante en ingeniería porque la respuesta de sistemas dinámicos a una excitación de carácter aleatorio se presenta en ramas como el diseño sísmico.

En este trabajo nos ocuparemos de procesos markofianos exclusivamente. El método se basará en la ecuación de Fokker-Planck.

La relación entre la función de distribución y una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico fue usada por Einstein¹ en 1905 para estudiar el movimiento browniano de una partícula sujeta a fricción viscosa, cuya ecuación de movimiento es

$$M \frac{dv}{dt} = -fv + F$$

donde f es una constante y F una fuerza aleatoria. La ecuación que Einstein obtuvo para la densidad P es

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1)$$

donde D es una constante. Esta ecuación es válida cuando $t \gg f/M$. La ecuación válida para todo tiempo es

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} - f \frac{\partial}{\partial v} (vP) = m \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \quad (2)$$

donde m es una constante.

Kramers, trabajando en el espacio fase, obtuvo en 1940 la ecuación diferencial que gobierna la distribución de una partícula en movimiento browniano cuando está sujeta a un campo de fuerza que es función de su posición y velocidad y del tiempo². La ec. 2 es un caso particular de la ecuación de Kramers. El largo tiempo transcurrido entre el trabajo de Einstein y la obtención de (2) se debe probablemente a que el proceso es no markofiano cuando la atención se restringe a la posición. Kramers evitó esta dificultad trabajando en el espacio fase (aquel en que las coordenadas son la posición y la velocidad de la partícula), ya que en éste el proceso sí es markofiano. La ecuación de Kramers se generalizó posteriormente³.

*Artículo publicado en el volumen I, número 2 del Boletín de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, octubre de 1963.

** Asesor del Instituto de Ingeniería, Director Interino del Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México.

Aquí presentamos una forma general de la ecuación de Kramers que es válida para cualquier sistema de partículas cuyas aceleraciones son funciones de su posición y velocidad y del tiempo. Aunque las ecuaciones son bien conocidas, el método para obtenerlas parece ser nuevo y tiene sobre el clásico la ventaja de dar lugar a ecuaciones integrales que son aplicables aun cuando las aceleraciones sean funciones discontinuas de los puntos del espacio fase. Esta situación se presenta en el movimiento browniano de una partícula que descansa sobre una superficie rugosa, ya que la aceleración es una función escalón de la velocidad con su discontinuidad en $v = 0$. T. K. Caughey y J. K. Dienes⁴ han estudiado algunas de las propiedades de la distribución de la velocidad correspondiente a una partícula en estas condiciones. Mencionaremos algunos de los resultados de ese trabajo, y plantearemos el problema de la distribución de la posición y velocidad de la partícula; además, ilustraremos el uso de la ecuación de Kramers en conexión con un trabajo reciente de E. Rosenbluth y J. I. Bustamante. Mientras se preparaba este manuscrito, se publicó una discusión semejante de T. K. Caughey y A. H. Gray⁵.

1. UNA CLASE DE PROCESOS ESTOCASTICOS

En esta sección vamos a obtener las ecuaciones que gobiernan cierto tipo de procesos estocásticos; los movimientos brownianos de que nos ocuparemos posteriormente son un caso particular de esta clase general.

En lo que sigue consideraremos una partícula en un espacio de n dimensiones. Conviene denotar el vector (x_1, \dots, x_n) por \bar{x} , el vector (x_2, \dots, x_n) por \bar{x} y los elementos de volumen $dx_1 \dots dx_n$, $dx_2 \dots dx_n$ por $d\bar{x}$ y $d\bar{x}'$ respectivamente. Además, $P(\bar{x}, t)$ representará la probabilidad de que la partícula se encuentre en el punto \bar{x} cuando el tiempo es t , y por lo mismo, si R es una región del espacio de n dimensiones,

$$\iiint_R P(\bar{x}, t) d\bar{x}$$

es la probabilidad de que la partícula esté en R en el instante t .

Para simplificar, supondremos inicialmente que la partícula está en reposo, pero que da un salto repentino en la dirección x_1 al final de cada intervalo de tiempo Δt . Sea $F(\eta/\epsilon)$ la distribución de probabilidad de estos saltos, es decir, $F(\eta/\epsilon)$ es la probabilidad de que $\Delta x_1 \leq \eta$. Supondremos que F es función de \bar{x} y t , pero que la densidad de probabilidad es simétrica, es decir,

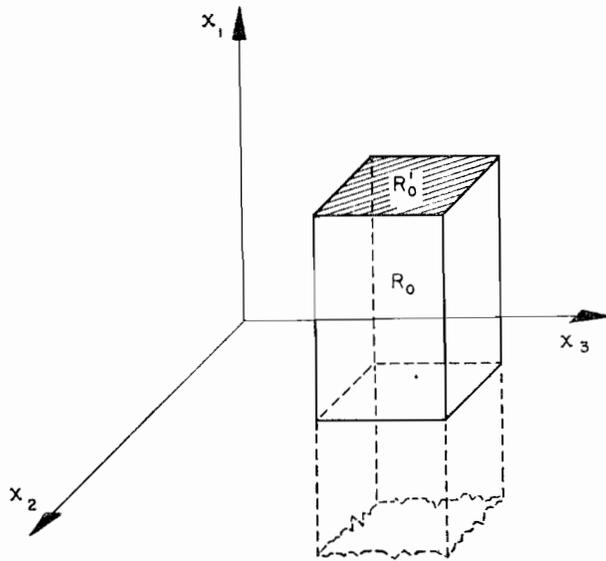


FIGURA 1

$$F(\eta/\epsilon) + F(-\eta/\epsilon) = 1 \quad (3)$$

El caso de distribución asimétrica puede tratarse de manera similar.

Supondremos que

$$m = 2 \int_0^\infty \xi F(-\xi) d\xi \quad (4)$$

existe, y que R_0 es la región $d_i \leq x_i \leq d_i + L_i$, $x_i \leq x$, $i = 2, 3, \dots, n$; y sea R'_0 la parte superior de su frontera como se indica en la fig. 1 para $n = 3$. Sea $H(t)$ la probabilidad de que la partícula esté en R_0 en el tiempo t . Entonces

$$H(t) = \iiint_{R_0} P(\bar{x}, t) d\bar{x} = \iiint_{R'_0} \left\{ \int_{-\infty}^x P(\bar{x}, t) d\bar{x}_1 \right\} d\bar{x}' \quad (5)$$

Por otra parte,

$$\int_{-\infty}^x P(\bar{x}, t + \Delta t) dx_1 = \int_0^\infty P(x - \xi, \bar{x}', t) F(x - \xi, \bar{x}', t, \xi/\epsilon) d\xi + \int_0^\infty P(x + \xi, \bar{x}', t) F(x + \xi, \bar{x}', t, -\xi/\epsilon) d\xi \quad (6)$$

La ec. 6 se obtuvo observando que la probabilidad de que la partícula se encuentre en R_0 en $t + \Delta t$ es igual a la probabilidad de que la partícula estuviera en R_0 en t y hubiese tenido un salto insuficiente para salir, más la probabilidad de que estuviera fuera de R_0 y tuviera un salto suficientemente grande para entrar en la región $x < R_0$.

Usando la ec. 3, la (4) se transforma en

$$\int_{-\infty}^x P(\bar{x}, t + \Delta t) dx_1 = \int_{-\infty}^x P(\bar{x}, t) dx_1 + \int_0^\infty \{ P(x + \xi, \bar{x}', t) F(x + \xi, \bar{x}', t, -\xi/\epsilon) - P(x - \xi, \bar{x}', t) F(x - \xi, \bar{x}', t, \xi/\epsilon) \} d\xi$$

Hasta ahora ϵ ha aparecido como un parámetro que rotula una familia de procesos estocásticos. Relacionemos ahora ϵ con el intervalo de tiempo Δt , de manera que $\epsilon^2 = \Delta t$. Nos interesaremos en el proceso estocástico obtenido haciendo que Δt tienda a cero. De la ec. 6 obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^x P(\bar{x}, t) dx_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \left\{ P(x + \xi, \bar{x}', t) F(x + \xi, \bar{x}', t, -\xi/\epsilon) - P(x - \xi, \bar{x}', t) F(x - \xi, \bar{x}', t, \xi/\epsilon) \right\} \frac{d\xi}{\epsilon^2}$$

Definamos $\xi = \epsilon \eta$ para obtener

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \left\{ P(x + \epsilon \eta, \bar{x}', t) F(x + \epsilon \eta, \bar{x}', t, -\eta) - P(x - \epsilon \eta, \bar{x}', t) F(x - \epsilon \eta, \bar{x}', t, \eta) \right\} \frac{d\eta}{\epsilon} = 2 \int_0^\infty \eta \frac{\partial P F}{\partial x_1} d\eta = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[2P(\bar{x}, t) \int_0^\infty \eta F(\bar{x}, t, -\eta) d\eta \right] = \frac{\partial m P}{\partial x_1} (x, \bar{x}', t)$$

de acuerdo con la definición de la ec. 4. Aquí hemos supuesto suficiente regularidad de P y F como para que las operaciones realizadas sean válidas. En vista de la ec. 5 y de este resultado, tenemos

$$\frac{dH}{dt} = \iiint_{R'_0} \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^x P(\bar{x}, t) dx_1 \right\} d\bar{x}' = \iiint_{R_0} \frac{\partial m P}{\partial x_1} (x, \bar{x}', t) d\bar{x}'$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{dH}{dt} = \iiint_{R_0''} \frac{\partial m P}{\partial x_1} (\bar{x}, t) d\bar{x}' \quad (7)$$

donde R_0'' es la frontera completa de R_0 y la integral debe interpretarse como una integral de superficie,

Una vez establecida la ec. 7 para la forma particular de la región R_0 considerada, se puede ver por un proceso de límite, que lo mismo sucede

para una región arbitraria R con una frontera regular. Por tanto

$$\frac{d}{dt} \iint_{R \dots} P(\bar{x}, t) d\bar{x} = \iint_{R' \dots} \frac{\partial mP}{\partial x_1} d\bar{x}' \quad (8)$$

donde R es una región arbitraria y R' es su frontera.

Supongamos ahora que la partícula entre un salto y el siguiente lleva a cabo un movimiento determinístico, cuyas ecuaciones son

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x, t); \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

Sea $R(t)$ la región definida por los puntos de $R(t_0)$ cuando se mueven de acuerdo con la ec. 9. Puesto que ahora la partícula, después de que ha dado un salto, se mueve de acuerdo con (9) durante el intervalo de tiempo Δt , el razonamiento anterior nos conduce otra vez a la ec. 8, pero ahora R es una función del tiempo t .

Con la ayuda del teorema de Green, de la ec. 8 se deduce

$$\frac{d}{dt} \iint_{R \dots} P(\bar{x}, t) d\bar{x} = \iint_{R \dots} \frac{\partial^2 mP}{\partial x_1^2} d\bar{x} \quad (10)$$

Un razonamiento similar al usado en mecánica de fluidos para establecer la ecuación de continuidad nos lleva ahora a la ecuación diferencial parcial deseada. Introduzcamos primeramente coordenadas de Lagrange, ξ_1, \dots, ξ_n , de tal manera que ahora R esté fija en el espacio ξ_i . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{R \dots} P d\bar{x} &= \frac{d}{dt} \iint_{R \dots} P J d\bar{\xi} = \\ &= \iint_{R \dots} \frac{\partial P J}{\partial t} d\bar{\xi} = \iint_{R \dots} J \frac{\partial^2 mP}{\partial x_1^2} d\bar{\xi} \end{aligned}$$

donde $J = \partial(x_1, \dots, x_n) / \partial(\xi_1, \dots, \xi_n)$ y hemos intercambiado el orden de integración y diferenciación puesto que R es independiente de t .

Ya que R es arbitraria,

$$\begin{aligned} \text{Entonces} \quad \frac{1}{J} \left(\frac{\partial P J}{\partial t} \right)_{\xi_i = \text{const}} &= \frac{\partial^2 mP}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}P) &= \frac{\partial^2 mP}{\partial x_1^2} \quad (11) \end{aligned}$$

puesto que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{\xi_i = \text{const}} = \frac{\partial P}{\partial t} + \bar{u} \text{grad} P$$

y

$$\frac{1}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)_{\xi_i = \text{const}} = \text{div} \bar{u}$$

Si las coordenadas x_1, \dots, x_k sufren saltos simultáneos cuyas funciones de distribución son independientes, la ec. 11 se puede generalizar a

$$\frac{d}{dt} \iint_{R \dots} P d\bar{x} = \iint_{R \dots} \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 mP}{\partial x_i^2} d\bar{x} \quad (12)$$

de donde se deduce que

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}P) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 mP}{\partial x_i^2} \quad (13)$$

La ec. 8 se puede generalizar aún más, para cubrir el caso en que los saltos en el espacio ocurren en la dirección del vector unitario \bar{e} que puede ser una función de x y t . El razonamiento anterior nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{R \dots} P(\bar{x}, t) d\bar{x} &= \\ &= \iint_{R' \dots} [\bar{e} \cdot \text{grad}(mP)] \bar{e} \cdot d\bar{S} \quad (14) \end{aligned}$$

donde $d\bar{S}$ es el elemento de área, el cual se toma dirigido hacia afuera. Aplicando a esta ecuación el teorema de la divergencia, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{R \dots} P(\bar{x}, t) d\bar{x} &= \\ &= \iint_{R \dots} \text{div} \{ [\bar{e} \cdot \text{grad}(mP)] \bar{e} d\bar{x} \} \quad (15) \end{aligned}$$

y esta ecuación implica

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}P) = \text{div} \{ [\bar{e} \cdot \text{grad}(mP)] \bar{e} \} \quad (16)$$

Cuando los saltos ocurren simultáneamente y con la misma intensidad en las direcciones x_1, \dots, x_k , tenemos que $\bar{e} = k^{-1/2} (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ y la ec. 16 se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}P) &= \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 (mP) \quad (17) \end{aligned}$$

2. LAS ECUACIONES DE KRAMERS

En lo que sigue estudiaremos el movimiento browniano de un sistema de n partículas cuando sobre él actúan fuerzas que son funciones de sus posiciones y velocidades y del tiempo. Es decir, consideraremos un sistema mecánico que se mueve de acuerdo con las ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i \quad (18)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = a_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

donde x_i, v_i, a_i son las posiciones, velocidades y aceleraciones de las partículas que forman el sistema. Supondremos que a_i son funciones solamente de las posiciones y velocidades y del tiempo.

Por otra parte, el estado del sistema en cualquier tiempo está determinado por las posiciones y velocidades de sus partículas, es decir, por un punto en un espacio de $2n$ dimensiones. Por lo mismo, el estudio del movimiento browniano del

sistema equivale al estudio del proceso estocástico que efectúa una partícula en un espacio de $2n$ dimensiones, cuando ésta sufre cambios bruscos de tipo aleatorio en las coordenadas v_i y está sujeta al movimiento determinístico dado por las ecs. 18 y 19.

De lo anterior se deduce que los resultados de la sección precedente son aplicables si $u = (v_1, \dots, v_n, a_1, a_2, \dots, a_n)$ y m se liga a la intensidad de la fuerza aleatoria en forma conveniente.

Cuando los pulsos actúan simultáneamente en las partículas $1, 2, \dots, k$, produciendo cambios bruscos de la misma magnitud en las velocidades v_1, \dots, v_k la densidad de probabilidad $P(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n, t)$, satisface la ec. 17, es decir

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}P) = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial v_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial v_k} \right)^2 (mP) \quad (20)$$

donde

$$\text{div}(\bar{u}P) = \frac{\partial v_1 P}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n P}{\partial x_n} + \frac{\partial a_1 P}{\partial v_1} + \dots + \frac{\partial a_n P}{\partial v_n}$$

Cuando solo la velocidad v_1 está sujeta a cambios aleatorios, la ec. 10 implica

$$\frac{d}{dt} \iint_{R \dots} P dx_1 \dots dx_n dv_1 \dots dv_n = \iint_{R \dots} \frac{\partial P m}{\partial v_1} dx_1 \dots dx_n dv_2 \dots dv_n \quad (21)$$

donde R es una región arbitraria del espacio fase que se mueve de acuerdo con las ecs. 18 y 19 y R' es su frontera.

La forma diferencial de esta ecuación está dada por la ec. 11 y es

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}P) = \frac{\partial^2 m P}{\partial v_1^2} \quad (22)$$

Cuando las aceleraciones a_i son independientes de las posiciones, la ecuación para $P(v_1, \dots, v_n, t)$ es más sencilla y se obtiene de las ecuaciones precedentes escribiendo

$$\bar{u} = (a_1, \dots, a_n)$$

Si las velocidades v_1, \dots, v_k están sujetas a pulsos estadísticamente independientes, la ec. 13 es aplicable, obteniéndose

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}P) = \frac{\partial^2 m_1 P}{\partial v_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 m_k P}{\partial v_k^2} \quad (23)$$

El caso en que el sistema tiene restricciones en su movimiento puede tratarse en forma semejante. Si se usa la formulación de Hamilton,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (24)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

donde q_i y p_i son las coordenadas y momentos generalizados respectivamente. En este caso, si los pulsos producen saltos en el espacio fase sólo en la dirección del vector unitario \bar{e} , que es función de q_i, p_i y t , la ec. 16 de la sección precedente se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}P) = \text{div} \left\{ [\bar{e} \cdot \text{grad}(mP)\bar{e}] \right\} \quad (25)$$

donde, de acuerdo con la ec. 24,

$$\bar{u} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$

En general, m será una función de la métrica del espacio fase, cuya determinación, así como la de \bar{e} , requieren un análisis posterior de la situación particular que se considere.

3. UNA PARTICULA SOBRE UNA SUPERFICIE RUGOSA

Como una aplicación de la teoría presentada en la sección anterior, estudiaremos ahora el movimiento browniano de una partícula sujeta a fricción de contacto. Sea $\alpha(v)$ la aceleración de esa partícula. Entonces

$$\alpha(v) = \begin{cases} -a & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{si } v = 0 \\ a & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (26)$$

donde $a \geq 0$ es una constante. El vector velocidad en el espacio fase es $\bar{u} = (v, \alpha)$. La sustitución de esta expresión en la ec. 22 nos da

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha \frac{\partial P}{\partial v} = m \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \quad (27)$$

Ya que α no es continua, la ecuación de Kramers no es válida cuando $v = 0$. Allí debe usarse la ecuación integral 21. Una forma límite de esta expresión es

$$m \left[\frac{\partial P}{\partial v} \right] + 2aP = 0 \quad \text{cuando } v = 0 \quad (28)$$

donde

$$\left[\frac{\partial P}{\partial v} \right] = \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_+ - \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_-$$

es decir

$$\left[\frac{\partial P}{\partial v} \right]$$

es el salto de

$$\frac{\partial P}{\partial v}$$

al cruzar el eje x .

En este caso, las trayectorias de las partículas en el espacio fase son dos semiparábolas que se

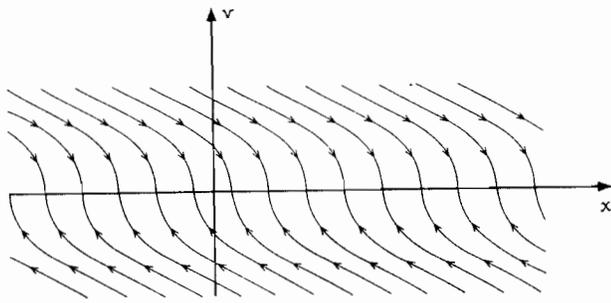


FIGURA 2

abren en direcciones opuestas (fig. 2). El problema es similar a la determinación de la temperatura de un fluido cuyas líneas de flujo son las parábolas mencionadas que convergen en un canal situado en el eje x . Tal fluido debería ser anisotrópico, porque tendría conductividad cero en la dirección x , pero distinta de cero en la dirección v .

Ya que la aceleración es una función de v solamente, la ecuación que gobierna a $P(v,t)$ es, en vista de la ec. 22,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha \frac{\partial P}{\partial v} = m \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \quad (29)$$

o alternativamente se puede obtener por integración de la ec. 27 desde $-\infty$ hasta $+\infty$. La ec. 28 no cambia de forma, pero puede ser simplificada cuando la condición inicial es

$$P(v,0) = \delta(v) \quad (30)$$

(δ es la delta de Dirac), ya que en este caso $P(v,t) = P(-v,t)$ y la ec. 28 puede sustituirse por

$$m \frac{\partial P}{\partial v} + aP = 0 \quad \text{cuando } v = 0 \quad (31)$$

Este problema tiene un estado estacionario, al que el estado transitorio puede aproximarse con el transcurso del tiempo. El estado estacionario está dado por

$$P = \frac{a}{2m} e^{-\frac{a}{m}|v|} \quad (32)$$

La solución estacionaria es única, ya que tiene que satisfacer además la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dv = 1$$

En la ref. 4 se dan resultados más generales para la distribución de la velocidad.

En ingeniería sísmica el problema consiste en encontrar la probabilidad de que la estructura no exceda el desplazamiento máximo admisible L , es decir, se necesita encontrar una $P(x,v,t)$ que satisfaga las ecs. 27 y 28:

$$P(x,v,0) = \delta(x)\delta(v) \quad (33)$$

$$P(-L,v,t) = 0 \quad \text{cuando } v > 0 \quad (34)$$

$$P(L,v,t) = 0 \quad \text{cuando } v < 0 \quad (35)$$

En estas condiciones la probabilidad deseada se obtiene de

$$\int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\infty} P(x,v,t) dv dx$$

Las ecs. 34 y 35 podrán comprenderse mejor con la ayuda de la fig. 1. En el espacio fase existen dos barreras absorbentes, localizadas en $x = \pm L$. Debido a las direcciones de las corrientes, la barrera en $x = -L$ no se deja sentir en la región $v < 0$ y, similarmente, la barrera localizada en $x = L$ no influye en la región $v > 0$.

La solución de las ecs. 27, 28 y 33 a 35 debe ser simétrica con respecto al origen, es decir

$$P(x,v,t) = P(-x, -v,t)$$

El tratamiento de barreras absorbentes, tales como las dadas por las ecs. 34 y 35, es difícil. Una aproximación a la probabilidad de que el desplazamiento L no sea excedido antes del tiempo t se puede obtener para los casos en que el estado estacionario de la distribución de la velocidad se alcanza rápidamente. En tal caso la probabilidad de escape debe estar dada aproximadamente por la probabilidad de que la partícula tenga una velocidad que exceda L/t en el estado estacionario. La probabilidad de no exceder L antes del tiempo t es en estas condiciones

$$1 - e^{-\frac{aL}{m}} \quad (36)$$

4. EL OSCILADOR ARMONICO

La solución al problema del oscilador armónico en movimiento browniano ha sido publicado por Wang y Uhlenbeck⁶. Una idealización común de estructuras con un grado de libertad consiste en tratarlas como osciladores armónicos.

En ingeniería sísmica, el estudio del movimiento browniano de estos osciladores debe incluir dos barreras absorbentes en el espacio fase. El problema resultante es mucho más complicado que el resuelto por Wang y Uhlenbeck. E. Rosenblueth⁷, y E. Rosenblueth y J. I. Bustamante⁸ han obtenido una solución aproximada. La ecuación de que partieron es

$$\frac{\partial P}{\partial t} = K e^{2ht} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) \quad (36)$$

En esta sección demostraremos que la ec. 36 puede obtenerse como una aproximación a la ecuación de Kramers. Mientras se preparaba este manuscrito, T. K. Caughey y H. A. Gray⁵ publicaron una deducción similar.

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un oscilador armónico con amortiguamiento viscoso son

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \frac{dv}{dt} = -p_0^2 x - 2hv \quad (37)$$

así que

$$\bar{u} = (v, -p_0^2x - 2hv)$$

y la ec. 22 se transforma en

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} - (p_0^2x + 2hv) \frac{\partial P}{\partial v} - 2hP = m \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \quad (38)$$

Mediante el cambio de variables

$$\begin{aligned} y &= e^{ht} [px \cos pt - (v + hx) \sin pt] \\ w &= e^{ht} [px \sin pt + (v + hx) \cos pt] \\ t &= t \end{aligned} \quad (39)$$

donde $p^2 = p_0^2 - h^2$, se obtiene

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = me^{2ht} \left(\cos pt \frac{\partial}{\partial w} - \sin pt \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 P' \quad (40)$$

donde

$$P' = \frac{e^{-2ht}}{p} P \quad (41)$$

de manera que la densidad de probabilidad en el plano (w, y) está dada por P' , ya que

$$\frac{\partial(x, v)}{\partial(y, w)} = \frac{e^{-2ht}}{p'}$$

Obsérvese que la ec. 40 se puede obtener a partir de la (25) sustituyendo \bar{e} , \bar{u} y m por $(\cos pt, -\sin pt)$, $(0, 0)$ y me^{-2ht} , respectivamente. Integremos ahora la ec. 40 con respecto a t de $t - \pi/p$ a $t + \pi/p$. Cuando p es suficientemente grande,

$$p/2\pi \int_{t-\pi/p}^{t+\pi/p} \frac{\partial P'}{\partial t} dt \approx \frac{\partial P'}{\partial t}$$

$$p/2\pi \int_{t-\pi/p}^{t+\pi/p} \frac{\partial^2 P'}{\partial y^2} e^{2ht} \sin^2 ptdt \approx$$

$$\approx (p/2\pi) e^{2ht} \frac{\partial^2 P'}{\partial y^2} \int_{t-\pi/p}^{t+\pi/p} \sin^2 ptdt = \frac{e^{2ht}}{2} \frac{\partial^2 P'}{\partial y^2}$$

$$p/2\pi \int_{t-\pi/p}^{t+\pi/p} \frac{\partial^2 P'}{\partial w^2} e^{2ht} \cos^2 ptdt \approx$$

$$\approx (p/2\pi) e^{2ht} \frac{\partial^2 P'}{\partial w^2} \int_{t-\pi/p}^{t+\pi/p} \cos^2 ptdt = \frac{e^{2ht}}{2} \frac{\partial^2 P'}{\partial w^2}$$

$$p/2\pi \int_{t-\pi/p}^{t+\pi/p} \frac{\partial^2 P'}{\partial y \partial w} e^{2ht} \sin pt \cos ptdt \approx$$

$$\approx (p/\pi) e^{2ht} \frac{\partial^2 P'}{\partial y \partial w} \int_{t-\pi/p}^{t+\pi/p} \sin 2ptdt = 0$$

así que,

$$\frac{\partial P'}{\partial t} \approx \frac{m}{2} e^{2ht} \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P'}{\partial w^2} \right)$$

Cuando P' tiene además simetría axial esta ecuación se reduce a la ec. 36 si se define

$$k = m/2,$$

$$r = \sqrt{w^2 + y^2} = e^{ht} \sqrt{(px)^2 + (v + hx)^2}$$

REFERENCIAS

1. A. Einstein, *Ann. D. Physik* 17 (1905) p. 549.
2. H. A. Kramers, "Brownian motion in a field of force and the diffusion model of Chemical Reactions", *Physics* VII, No. 4 (Abr. 1940), pp. 284-304.
3. S. Chandrasekhar, "Stochastic problems in physics and astronomy", *Reviews of Modern Physics*, Vol. 15, No. 1 (Ene. 1943), pp. 4-91.
4. T. K. Caughey y J. K. Dienes, "Analysis of a nonlinear first-order system with a white noise input", *Journal of Applied Physics*, Vol. 32, No. 11, (Nov. 1961).
5. T. K. Caughey y A. H. Gray, Discusión de "Distribution of structural response to earthquakes" por E. Rosenblueth y J. I. Bustamante, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, (Abr. 1963), pp. 158-168.
6. M. Ch. Wang y G. E. Uhlenbeck, "On the theory of brownian motion II", *Reviews of Modern Physics*, Vol. 17, Nos. 2 y 3 (Abr.-Jul. 1945), pp. 323-342.
7. E. Rosenblueth, "Some applications of probability theory in aseismic design", *Proceedings of the World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, California* (Jun. 1956).
8. E. Rosenblueth y J. I. Bustamante, "Distribution of structural response to earthquake", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* (Jun. 1962), pp. 75-106.