

Presión hidrodinámica en presas y depósitos †

Jorge I. BUSTAMANTE,* Emilio ROSENBLUETH,** Ismael HERRERA ***
y Armando FLORES ****

INTRODUCCION

Este trabajo se realizó por encargo de la Comisión Federal de Electricidad y en colaboración con ella.

Originalmente Lamb en su Hidrodinámica estudió las características del movimiento natural de un fluido en un recipiente rígido y fijo, analizando ciertos tipos de movimientos forzados. Fue Westergaard (1933) el primer autor que estableció resultados aplicables al diseño de presas. Para ello consideró el efecto bidimensional de un movimiento armónico estacionario en una cortina rígida, normal a un vaso de longitud y ancho infinitos. Tomando en cuenta la compresibilidad del agua y suponiendo el nivel libre inalterado, encontró que la distribución de presiones se asemeja a una parábola; propuso fórmulas aproximadas, válidas para relaciones altura del nivel libre de reposo H entre periodo T del movimiento menores que el primer valor crítico correspondiente. Hoskins y Jacobsen (1934) verificaron experimentalmente en tanque rectangular los resultados de Westergaard, haciendo notar la poca influencia que tiene la relación de la longitud L del vaso a la altura H del agua, L/H , para valores superiores a 2.5 cuando las paredes se mueven en fase. Observaron que la flexibilidad de las paredes parece ser un factor que disminuye bastante las presiones ejercidas. Hinds, Creager y Justin (1945) aprovecharon los resultados obtenidos anteriormente. Propusieron un criterio para el caso de pared inclinada, la cual, hacen ver, debe estar sujeta a presiones menores que una pared vertical.

Jacobsen (1949) estudió teóricamente el caso de un tanque circular y el de una pila, también circular, sometidos a movimientos cualesquiera. Tomando el líquido como incompresible calculó masas equivalentes (o virtuales) del mismo, que han de suponerse siguen el movimiento del recipiente o pila. Confirmó experimentalmente los valores de dichas masas y propuso fórmulas y gráficas para cálculo directo.

Werner y Sundquist (1949) consideraron los efectos de una perturbación armónica horizontal para diversos tipos de recipientes y formas de aplicación del movimiento. Incluyeron en su estudio los siguientes casos; vaso rectangular con movimiento de una o dos paredes; vaso cilíndrico con movimiento paralelo y transversal a las generatrices; vaso triangular, cilindro y pila circulares, y semiesfera. Se nota en ese trabajo que si ocurre una falla del vaso, que origine el movimiento

de una sola pared, aumentan bastante las presiones, al menos para el caso $L/H < 2$. Se concluye también que la inclinación de las laderas disminuye las presiones sobre la cortina.

Jacobsen y Ayre (1951) describen experimentos en tanques cilíndricos. Encontraron que el oleaje es mínimo para frecuencias de excitación alejadas de la primera frecuencia crítica del nivel libre del agua. Confirieron atención a las masas de agua equivalentes y al efecto de la cubierta del tanque. De su estudio se concluye que, si más del 2 por ciento del volumen está ocupado por aire, el tanque se puede considerar abierto. Como resultado de sus experiencias, encontraron que es mínimo el efecto del amortiguamiento debido a la viscosidad del agua.

Chow (1951), a partir de los resultados de Westergaard, propone un método para calcular la presión hidrodinámica en cortinas con paramento inclinado.

Graham y Rodríguez (1952) estudiaron analíticamente el efecto del movimiento de traslación, inclinación y giro en tanques rectangulares para su aplicación en diseño de aviones. En su estudio consideran el líquido incompresible, y proponen un sistema mecánico equivalente.

Zangar y Haefeli (1952), por medio de analogías eléctricas y redes de flujo, estudiaron el movimiento de una cortina rígida con paramento inclinado en un vaso de longitud infinita, suponiendo que el líquido es incompresible. Obtuvieron las distribuciones de presiones que corresponden al paramento con diversas inclinaciones. En todos los casos resultan presiones menores que con paramento vertical. Estos autores concluyeron que, si más de la mitad superior de la cortina es vertical, se puede considerar la pantalla como pared vertical sin introducir errores excesivos.

Zangar (1953) también utilizando una analogía eléctrica y redes de flujo, amplió el trabajo anterior para diversas inclinaciones y dos planos del paramento de la cortina. Comparó el efecto de la compresibilidad y propuso una fórmula aproximada para cálculo.

Housner (1957) idealizó el líquido como incompresible y planteó y resolvió el problema en forma aproximada y sencilla con resultados aceptables. Para ello descompuso el movimiento en impulsivo y de oscilación. Aplicó los resultados a tanques rectangulares, cilíndricos y elípticos y a paredes inclinadas rígidas y estudió el efecto de la flexibilidad de la cortina. Concluyó que las presiones

† Artículo publicado en el volumen I, número 2 del Boletín de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, octubre de 1963.

* Investigador del Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México

** Director del mismo Instituto

*** Asesor del mismo Instituto e Investigador del de Geofísica

**** Ayudante de investigador del Instituto de Ingeniería

son función decreciente de la flexibilidad de la pantalla.

Ambraseys (1957), en un vaso de longitud finita con líquido incompresible estudió, mediante analogías eléctricas, el efecto de una falla del vaso, para pantallas inclinadas. Comparó sus resultados con los de Zangar (1953). Concluyó que el efecto de una falla del vaso disminuye muy rápidamente al aumentar el cociente L/H , pero dicho efecto es muy notorio aún para relaciones L/H del orden de la unidad. Le atribuye poca importancia al oleaje por sismo.

Napedvaridze (1959) estudió analíticamente el caso de líquido incompresible en un vaso de longitud infinita con una cortina de paramento inclinado. Estimó los efectos de movimientos horizontales y verticales y de su combinación. Halló como resultado de estos análisis que el movimiento vertical tiene menor influencia que el horizontal.

Kotsubo (1959), en forma analítica, consideró la compresibilidad del agua en lo concerniente a empujes sobre presas rectangulares y presas de arco. Estudió el comportamiento del sistema en estado transitorio para perturbaciones arbitrarias. A continuación calculó los efectos que tendría un sismo específico y hace notar las diferencias de fase entre las presiones y la perturbación, encontrando fuertes diferencias con resultados de análisis que suponen que la perturbación es un movimiento armónico simple y que el sistema se halla en estado estacionario. Finalmente propuso una fórmula aproximada de carácter práctico.

Ferrandon (1960) consideró la compresibilidad del agua en un vaso de longitud infinita, con presa rígida de paramento vertical, respondiendo ante perturbaciones cualesquiera. Incluyó el caso de que la perturbación sea un pulso o bien sea armónica. Introdujo en el borde libre una condición de Poisson en lugar de suponer la altura del agua fija como había sido usual. Consideró también el caso de vaso finito.

Kotsubo (1961) hizo un estudio amplio, de naturaleza teórica y experimental en presas de arco tomando en cuenta la compresibilidad del agua, movimientos longitudinales y transversales al vaso, laderas radiales inclinadas y verticales y laderas no radiales. Los resultados de los experimentos están de acuerdo con la teoría. Encontró que las presiones aumentan en los apoyos de la presa y son menores que el caso bidimensional, aclarando así numerosos factores que no se habían estudiado previamente con claridad.

Chen'Chzhen'-Chen (1961) dedicó su atención al movimiento en estado estacionario, de una cortina rígida vertical, con vaso de longitud infinita y fluido incompresible. Consideró la influencia de la altura del oleaje, y analizó de manera especial las olas superficiales.

Chen'Chzhen'-Chen (1961) amplió el estudio anterior para sismo inclinado; concluyó que el efecto del movimiento vertical no es importante salvo para sismos de intensidad excepcional.

Tadjbakhsh y Keller (1961) estudiaron analíticamente la frecuencia de ondas finitas estacio-

narias producidas por la gravedad para el caso bidimensional incompresible. Concluyeron que la frecuencia aumenta al aumentar la amplitud de la ola para relaciones pequeñas de la altura del agua en reposo a la longitud de onda (y por tanto a la longitud del vaso), mientras que dicha frecuencia disminuye para valores altos de esta relación. El cociente crítico que encontraron es 0.17. Posteriormente Fultz (1962) confirmó experimentalmente estas conclusiones, pero halló que el cambio de comportamiento ocurre para un cociente cercano a 0.14.

NOTACION

Los símbolos usados se definen donde aparecen por primera vez en el texto y se ordenan alfabéticamente en el Apéndice I. Las funciones referidas con la letra A y un número aparecen en el Apéndice II.

HIPOTESIS Y ECUACIONES GENERALES

En los desarrollos que siguen consideraremos que el agua es compresible y que el movimiento del agua es irrotacional y está limitado a desplazamientos pequeños; se despreciará la viscosidad del líquido.

Supondremos que la excitación dinámica obedece a un movimiento armónico estacionario de la cortina de la presa. Admitiremos que la rigidez de la cortina es suficiente para prevenir vibraciones de la misma, es decir, que sus desplazamientos son sensiblemente iguales a los del terreno. Supondremos que el ancho del vaso es tal que un análisis bidimensional represente adecuadamente el movimiento del agua.

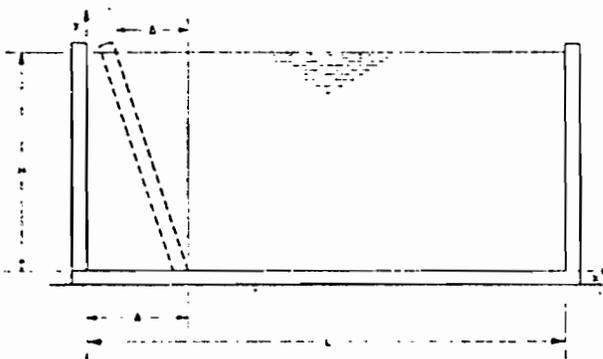


Fig. 1. Vaso bidimensional y movimiento de la cortina.

La fig. 1 representa el vaso y el movimiento de la cortina considerados. Usando una aproximación lineal, el problema consiste en resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma_0}{gH} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

son función decreciente de la flexibilidad de la pantalla.

Ambraseys (1957), en un vaso de longitud finita con líquido incompresible estudió, mediante analogías eléctricas, el efecto de una falla del vaso, para pantallas inclinadas. Comparó sus resultados con los de Zangar (1953). Concluyó que el efecto de una falla del vaso disminuye muy rápidamente al aumentar el cociente L/H , pero dicho efecto es muy notorio aún para relaciones L/H del orden de la unidad. Le atribuye poca importancia al oleaje por sismo.

Napedvaridze (1959) estudió analíticamente el caso de líquido incompresible en un vaso de longitud infinita con una cortina de paramento inclinado. Estimó los efectos de movimientos horizontales y verticales y de su combinación. Halló como resultado de estos análisis que el movimiento vertical tiene menor influencia que el horizontal.

Kotsubo (1959), en forma analítica, consideró la compresibilidad del agua en lo concerniente a empujes sobre presas rectangulares y presas de arco. Estudió el comportamiento del sistema en estado transitorio para perturbaciones arbitrarias. A continuación calculó los efectos que tendría un sismo específico y hace notar las diferencias de fase entre las presiones y la perturbación, encontrando fuertes diferencias con resultados de análisis que suponen que la perturbación es un movimiento armónico simple y que el sistema se halla en estado estacionario. Finalmente propuso una fórmula aproximada de carácter práctico.

Ferrandon (1960) consideró la compresibilidad del agua en un vaso de longitud infinita, con presa rígida de paramento vertical, respondiendo ante perturbaciones cualesquiera. Incluyó el caso de que la perturbación sea un pulso o bien sea armónica. Introdujo en el borde libre una condición de Poisson en lugar de suponer la altura del agua fija como había sido usual. Consideró también el caso de vaso finito.

Kotsubo (1961) hizo un estudio amplio, de naturaleza teórica y experimental en presas de arco tomando en cuenta la compresibilidad del agua, movimientos longitudinales y transversales al vaso, laderas radiales inclinadas y verticales y laderas no radiales. Los resultados de los experimentos están de acuerdo con la teoría. Encontró que las presiones aumentan en los apoyos de la presa y son menores que el caso bidimensional, aclarando así numerosos factores que no se habían estudiado previamente con claridad.

Chen'Chzhen'-Chen (1961) dedicó su atención al movimiento en estado estacionario, de una cortina rígida vertical, con vaso de longitud infinita y fluido incompresible. Consideró la influencia de la altura del oleaje, y analizó de manera especial las olas superficiales.

Chen'Chzhen'-Chen (1961) amplió el estudio anterior para sismo inclinado; concluyó que el efecto del movimiento vertical no es importante salvo para sismos de intensidad excepcional.

Tadjbakhsh y Keller (1961) estudiaron analíticamente la frecuencia de ondas finitas estacio-

narias producidas por la gravedad para el caso bidimensional incompresible. Concluyeron que la frecuencia aumenta al aumentar la amplitud de la ola para relaciones pequeñas de la altura del agua en reposo a la longitud de onda (y por tanto a la longitud del vaso), mientras que dicha frecuencia disminuye para valores altos de esta relación. El cociente crítico que encontraron es 0.17. Posteriormente Fultz (1962) confirmó experimentalmente estas conclusiones, pero halló que el cambio de comportamiento ocurre para un cociente cercano a 0.14.

NOTACION

Los símbolos usados se definen donde aparecen por primera vez en el texto y se ordenan alfabéticamente en el Apéndice I. Las funciones referidas con la letra A y un número aparecen en el Apéndice II.

HIPOTESIS Y ECUACIONES GENERALES

En los desarrollos que siguen consideraremos que el agua es compresible y que el movimiento del agua es irrotacional y está limitado a desplazamientos pequeños; se despreciará la viscosidad del líquido.

Supondremos que la excitación dinámica obedece a un movimiento armónico estacionario de la cortina de la presa. Admitiremos que la rigidez de la cortina es suficiente para prevenir vibraciones de la misma, es decir, que sus desplazamientos son sensiblemente iguales a los del terreno. Supondremos que el ancho del vaso es tal que un análisis bidimensional represente adecuadamente el movimiento del agua.

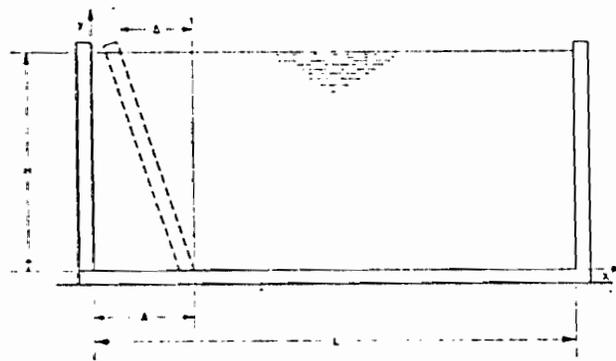


Fig. 1. Vaso bidimensional y movimiento de la cortina.

La fig. 1 representa el vaso y el movimiento de la cortina considerados. Usando una aproximación lineal, el problema consiste en resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma_0}{g L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

donde $\phi(x,y,t)$ es un potencial de velocidades tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3)$$

donde u y v son las componentes del desplazamiento del agua en las direcciones x y y respectivamente, de los ejes coordenados del sistema de referencia cartesiano ortogonal fijo (fig. 1). t la variable tiempo, γ_0 el peso volumétrico del agua, g la aceleración de la gravedad y E_v el módulo elástico volumétrico del agua.

Las condiciones de frontera, referidas a la fig. 1 son

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0,t) = 0 \quad (4)$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,H,t) + g \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,H,t) = 0 \quad (5)$$

$$u(0,y,t) = \left(A - \Delta \frac{y}{H} \right) \text{sen } \omega t$$

De aquí,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \left(A - \Delta \frac{y}{H} \right) \omega \cos \omega t \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(L,y,t) = 0 \quad (7)$$

donde A representa la componente de traslación y Δ/H la de rotación del movimiento de la cortina; H es la altura del agua en reposo; Δ la amplitud del desplazamiento de la corona de la cortina por rotación de la misma, y L la longitud del vaso (fig. 1).

A continuación sustituiremos la condición de frontera (5), que toma en cuenta el movimiento ondulatorio de la superficie, por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,H,t) = 0 \quad (8)$$

La sustitución implica la hipótesis de que, durante el movimiento, la superficie libre permanece al nivel del agua en reposo. Los límites de aplicabilidad de esta condición se discuten más adelante en base a las ecuaciones que estableceremos en el Apéndice II.

La presión dinámica del agua, $p = p(x,y,t)$, satisface la ecuación diferencial

$$p = -E_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (9)$$

y, en términos del potencial ϕ ,

$$p = \frac{\gamma_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (10)$$

Las soluciones estacionarias de este sistema de ecuaciones diferenciales se consignan en las ecs. A38.1 y 4 del Apéndice II para las condiciones $L \neq \infty$ y $L = \infty$ respectivamente. A partir de las series que contienen dichas expresiones se calcularon los valores máximos de las presiones que discutiremos en los párrafos siguientes. Hemos calculado además la presión total Q_0 (fuerza cortante en la base de la cortina) y el momento de volteo M_0 (momento flexionante en la base) que corresponden a dichas presiones máximas. Los resultados se expresan en forma de los cocientes p/aH , Q_0/aH^2 y M_0/aH^3 , donde ag es la amplitud de la aceleración del movimiento de traslación y g es la aceleración de la gravedad.

El cálculo de Q_0 y M_0 se llevó a cabo mediante las fórmulas de integración de Newmark empleando 20 intervalos iguales para la coordenada vertical.

Los valores críticos de H/T , a los que haremos referencia en el texto, se consignan en el Apéndice II; en este cociente, H representa la altura del agua en reposo, en tanto que T representa el período del movimiento de traslación o rotación de la cortina.

COMPRESIBILIDAD DEL AGUA

La importancia de considerar la compresibilidad del agua en las ecuaciones empleadas para obtener la presión hidrodinámica no se ha establecido hasta la fecha con bases comparativas suficientemente extensas. Unos autores la han tomado en cuenta en sus análisis^{2, 6, 8, 15-17}, mientras otros han supuesto al líquido incompresible^{3, 5, 6, 9-14, 18 y 19}. Ciertos estudios experimentales³ y teóricos¹¹ atribuyen poca importancia a la compresibilidad.

A fin de establecer el efecto de la compresibilidad del agua, se hicieron cálculos numéricos para un vaso de longitud ilimitada, considerando dos valores de la compresibilidad del agua, diferentes períodos de excitación T y diferentes alturas de la presa, H .

El error relativo, e_Q , en la presión dinámica total hasta la primera frecuencia crítica ($H/T \leq 359.6$ m/seg) se muestra en la fig. 2. Veamos que dicho error es pequeño para valores de H/T menores

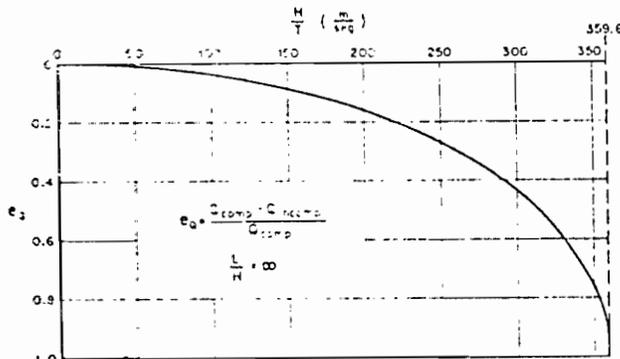


Fig. 2. Error relativo en el empuje dinámico total al despreciar la compresibilidad del agua.

que 100; el error aumenta hasta hacerse igual a la unidad para $H/T = 359.6$ m/seg. En efecto, Zangar¹¹ concluyó que el error relativo debido a considerar el agua incompresible era pequeño, lo cual obedece a que su estudio correspondió al intervalo $23 < H/T < 183$.

Los cálculos del error relativo se hicieron valuando la serie de la ec. A38.4. Para líquido compresible tomamos $E_v = 2.1 \times 10^5$ ton/m², que concuerda con el módulo elástico del agua a 21°C.

El efecto de despreciar la compresibilidad del agua no sólo introduce errores relativos de hasta 100 por ciento, sino que llega a cambiar completamente la naturaleza del problema hidrodinámico al dar origen a una solución que no depende del periodo del movimiento excitador. Esto es particularmente importante en el estudio del tamaño de un vaso finito puesto que el número de periodos críticos de la presión dinámica, para un intervalo de H/T dado, aumenta al crecer la longitud del vaso.

LONGITUD DEL VASO

Para estudiar el efecto de la longitud del vaso, estipulamos un movimiento de traslación de la cortina mientras suponemos que el resto del vaso se mantiene en reposo. Esta condición equivale a tomar $\Delta = 0$ en la ec. A38.1. Los estudios disponibles muestran que para una misma altura y aceleración máximas, las presiones totales que corresponden a vaso infinito son sensiblemente iguales a las que se obtienen para una relación de longitud a altura mayor que 3. Dichos resultados se limitan al primer valor crítico del cociente H/T de la presión (≤ 359.6 m/seg). En el presente trabajo cubrimos el intervalo $0 \leq H/T \leq 1000$ m/seg.

En la fig. 3 se muestra el valor de la fuerza cortante en la base $L/H = 1$, y $L/H \geq 5$, como respuesta a un movimiento de traslación de la cortina. La figura señala que para valores de L/H mayores que cinco, y posiblemente aun menores, los resultados no difieren sensiblemente de los que corresponden a longitud infinita. (Tal conclusión

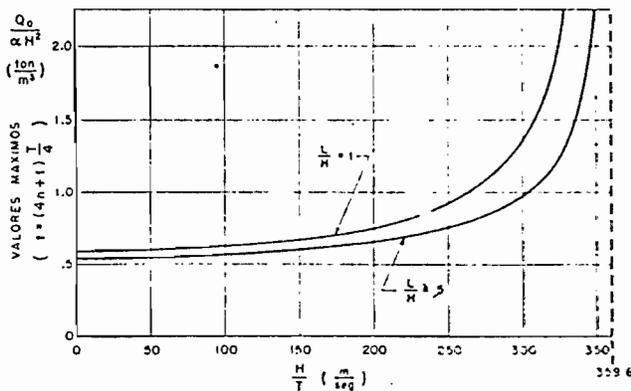


FIG. 3. Influencia del tamaño del vaso sobre la presión dinámica total, para frecuencias menores que la fundamental.

se halla anticipada en trabajos previos). Los resultados en cuestión son válidos únicamente hasta la primera frecuencia crítica ($H/T = 359.6$ m/seg^{*}). Para valores mayores de H/T las presiones llegan a diferir totalmente de las primeras, como apreciamos en las figs. 4 y 5 donde se re-

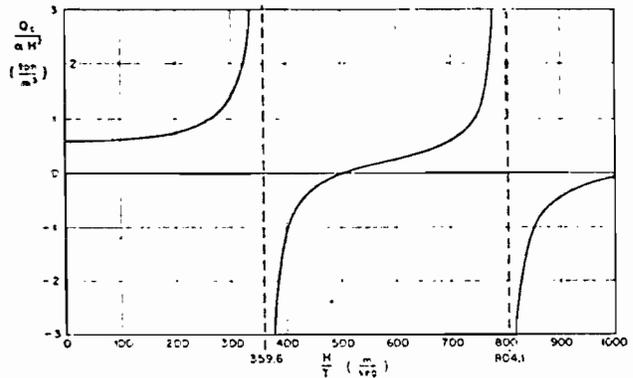


FIG. 4. Empuje dinámico total para $L/H = 1$ en el instante $t = (4n + 1)T/4$

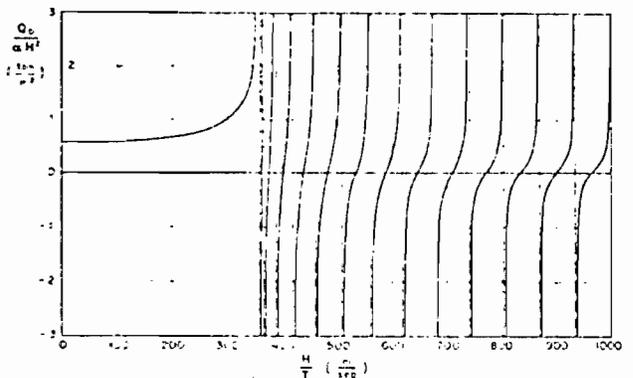


FIG. 5. Empuje dinámico total para $L/H = 10$ en el instante $t = (4n + 1)T/4$

presentan los empujes hidrodinámicos totales máximos correspondientes a $L/H = 1$ y 10. Dichos empujes ocurren en los instantes definidos por $t = (4n + 1)T/4$, donde n es un número entero. Para otros tiempos los empujes son proporcionales a los anteriores, y el factor de proporcionalidad vale $\sin \omega t$.

En las dos figuras anteriores apreciamos la diferencia de comportamiento arriba de la primera frecuencia crítica al cambiar la longitud del vaso. Las líneas verticales punteadas marcan los valores críticos superiores de H/T .

Las variaciones de la presión en la base, p_0 , para diferentes relaciones L/H son análogas a las de la fuerza cortante Q_0 . En la fig. 6 se representan diagramas de presiones máximas referidas a la presión de la base, p/p_0 , para $L/H = 1$, correspondientes a movimiento de traslación de la cortina. Observamos que las distribuciones de presio-

* La primera frecuencia crítica, o frecuencia fundamental de vibración del líquido almacenado, en vaso rectangular, corresponde a este valor del cociente H/T , a su vez a la cuarta parte de la velocidad del sonido en el agua.

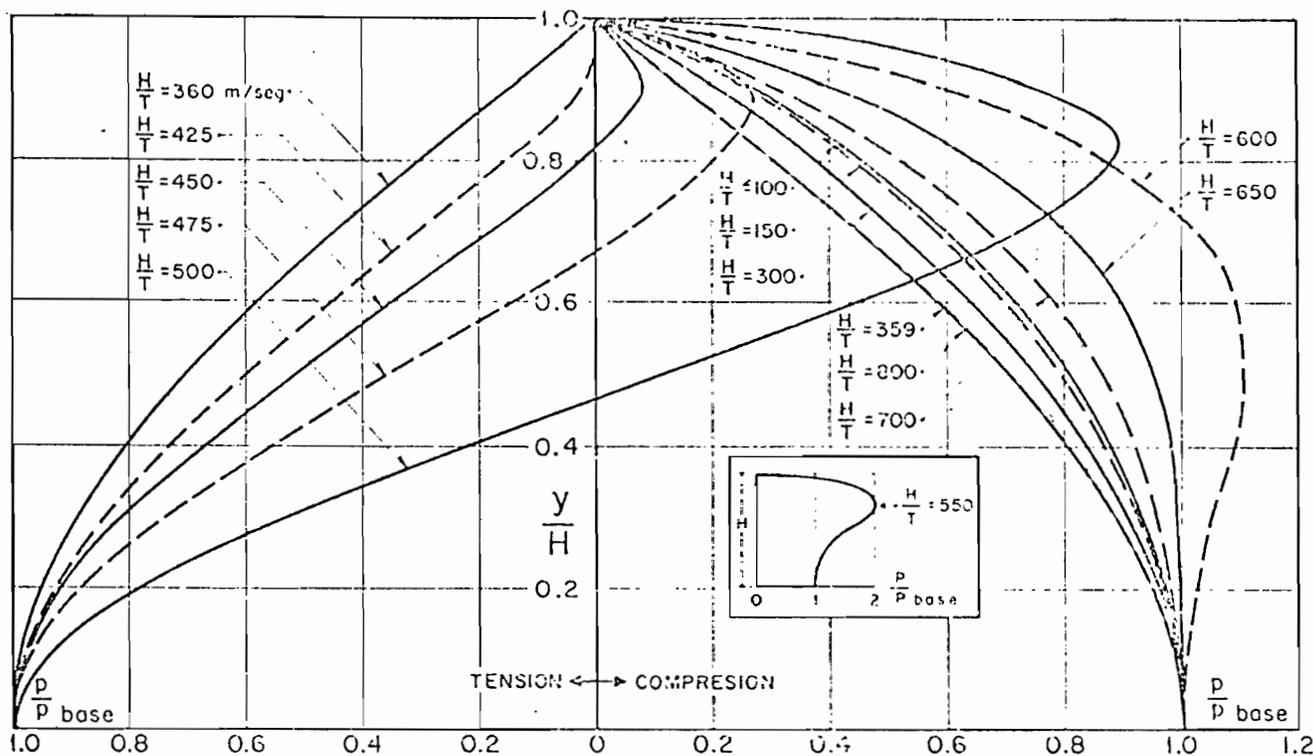


Fig. 6. Diagrama de presiones respecto a la presión en la base en el mismo instante $L/H = 1$. Movimiento de translación de la cortina

nes abajo de la primera frecuencia crítica adoptan formas parecidas entre sí. Diversos autores han aprovechado este hecho^{2, 4, 8, 12, 15 y 17} para proponer fórmulas aproximadas. Tratándose de valores mayores de H/T las distribuciones cambian notablemente. El mismo comportamiento se observa para otros valores finitos de L/H . El cambio que ocurre al pasar de $H/T = 359$ a 360 m/seg se debe a que se tomaron los mismos tiempos para valuar las presiones. Pudimos haber anticipado el resultado a partir de la fig. 4; este hecho señala por otra parte que el movimiento del agua cambia de fase en 180° con respecto a las aceleraciones de la cortina al sobrepasar la primera frecuencia crítica.

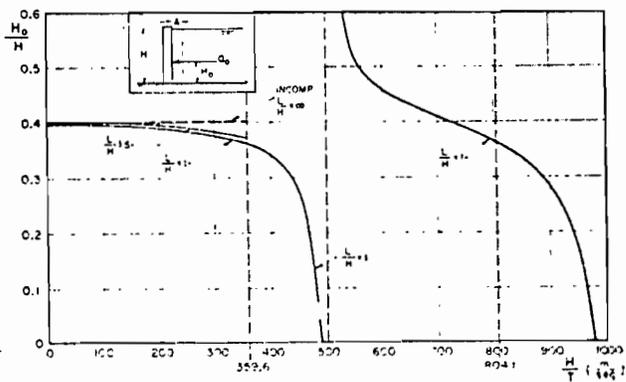


Fig. 7. Altura del centro de presiones. Movimiento de translación de la cortina

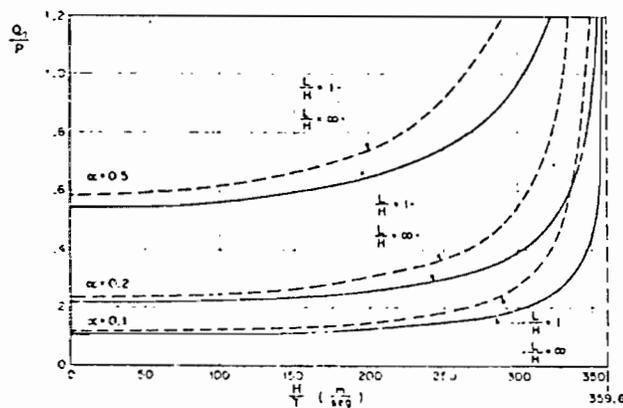


Fig. 8. Relación entre el empuje dinámico total y el hidrostático. Movimiento de translación de la cortina

En lugar del momento flexionante M_0 en la base, en la fig. 7 representamos las alturas de los centros de presiones H_0 divididas entre la altura del agua para $L/H = 1$. Hasta la primera frecuencia crítica se representan también dichos cocientes para $L/H \geq 5$, caso compresible y para $L/H = \infty$, caso incompresible. Estas gráficas permiten obtener el momento flexionante M_0 y, como veremos posteriormente, también permiten conocer la relación entre la fuerza cortante en la base producida por la traslación y la fuerza cortante debida a rotación.

La fig. 8 muestra los cocientes del empuje dinámico total Q_0 debido a traslación de la cortina

entre el empuje hidrostático total P para tres valores diferentes de la aceleración máxima ($\alpha = 0.1, 0.2, 0.5$) y dos valores de la relación longitudinal a altura, $L/H = 1, \infty$. Este cociente no excede la unidad aun para valores elevados de la aceleración máxima ($0.2g$), salvo en la vecindad de una de las frecuencias críticas.

ROTACION DE LA CIMENTACION Y DEFORMACION DE LA PRESA

Para estimar el efecto de cedencia de la cimentación de la cortina se consideró una rotación de la misma alrededor de su base. Ello equivale a tomar $A = 0$ y $\Delta \neq 0$ en la ec. 6 y por tanto en la serie de la ec. A38.1, lo que además implica relaciones pequeñas de Δ/H .

En la fig. 9 se muestra el cociente de la fuerza dinámica total Q_Δ debida a la rotación entre la

como $\delta y^2/H^2$. En este caso podemos calcular la fuerza dinámica total Q_p con la expresión ²²

$$\frac{Q_p}{aH^2} = 2 \left(2 \frac{M_0}{aH^3} - \frac{M_\Delta}{aH^3} \right) - \frac{Q_0}{aH^2} \quad (11)$$

para $\delta = A = \Delta$, donde M_Δ es el momento máximo en la base debido a un movimiento de rotación y δ es la amplitud máxima de la elástica parabólica.

La fig. 9 también muestra valores de $AQ_p/\delta Q_0$ para $L/H = 1$, caso compresible, y para el caso incompresible con $L/H = \infty$.

De esta figura concluimos que, debido a cedencia de la cimentación ($\Delta = A$), las presiones totales causadas por la traslación se reducen en cerca de 60 por ciento para $0 \leq H/T \leq 359.6$ m/seg. Una deformación parabólica de la presa reduce estas fuerzas en 80 por ciento dentro del mismo intervalo de H/T .

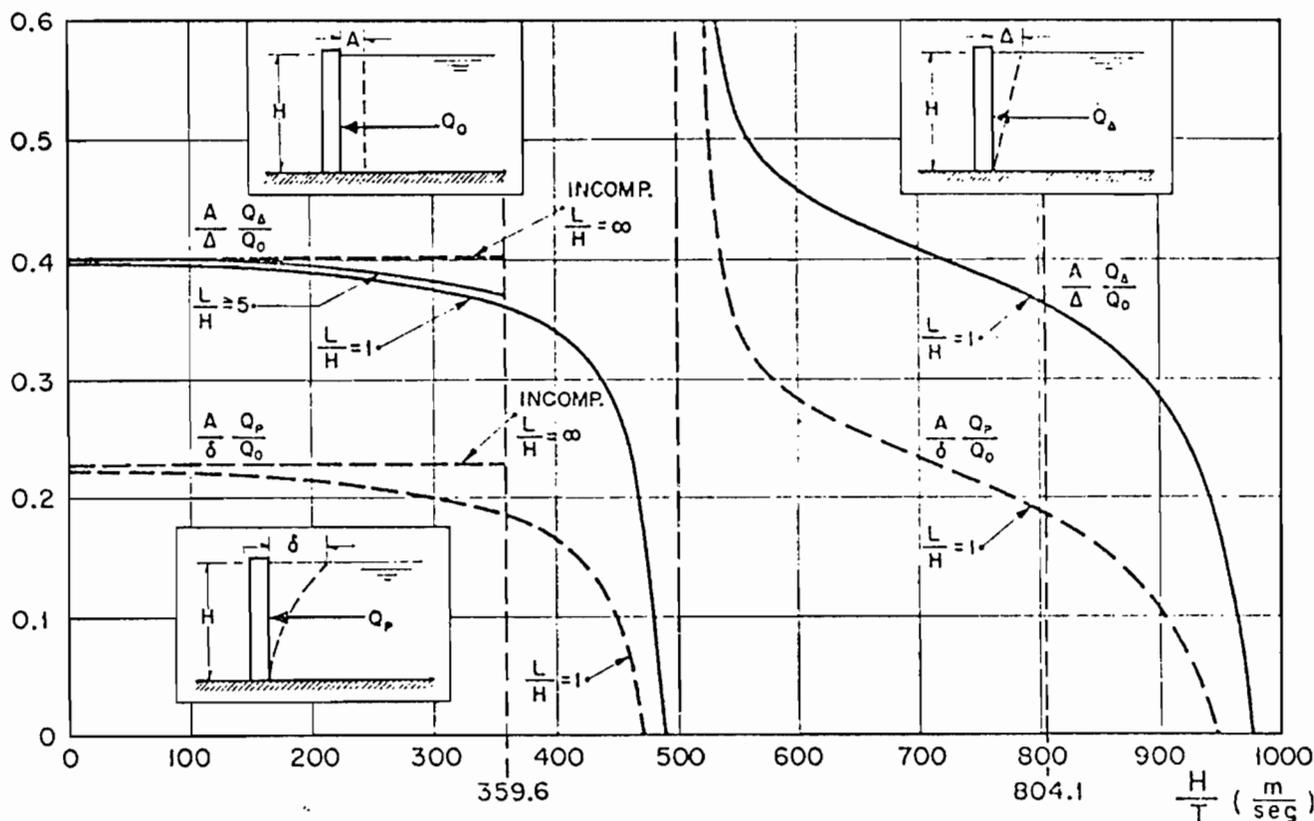


FIG. 9. Relación entre los empujes dinámicos totales para diferentes movimientos de la cortina

fuerza Q_0 debida a la traslación, multiplicado por el cociente A/Δ . Estas relaciones son iguales al cociente de H_0/H que se representa en la fig. 7. Las curvas $AQ_p/\delta Q_0$ poseen valores finitos para valores de H/T correspondientes a frecuencias críticas; en cambio para valores de H/T próximos a 500 m/seg. las ordenadas de las curvas se vuelven indeterminadas por tender Q_0 a cero.

Para estimar el efecto de la deformación de la presa, asignamos a su elástica una ley parabólica. Esto equivale a tomar la condición de frontera (6)

Podemos aplicar de la siguiente manera los resultados obtenidos para estimar el efecto que pueden tener la deformación de la cortina y la cedencia de su cimentación en las respuestas a un sismo. Consideremos una componente armónica del movimiento del terreno, definida por la amplitud de desplazamiento A_0 y por la frecuencia circular ω . La aceleración máxima del terreno, en términos de la gravedad, será $\alpha = \omega^2 A_0/g$. Si el periodo correspondiente, $T = 2\pi/\omega$, es mayor que el periodo fundamental del liquido almacenado.

entre el empuje hidrostático total P para tres valores diferentes de la aceleración máxima ($\alpha = 0.1, 0.2, 0.5$) y dos valores de la relación longitudinal a altura, $L/H = 1, \infty$. Este cociente no excede la unidad aun para valores elevados de la aceleración máxima ($0.2g$), salvo en la vecindad de una de las frecuencias críticas.

ROTACION DE LA CIMIENTACION Y DEFORMACION DE LA PRESA

Para estimar el efecto de cedencia de la cimentación de la cortina se consideró una rotación de la misma alrededor de su base. Ello equivale a tomar $A = 0$ y $\Delta \neq 0$ en la ec. 6 y por tanto en la serie de la ec. A38.1, lo que además implica relaciones pequeñas de Δ/H .

En la fig. 9 se muestra el cociente de la fuerza dinámica total Q_Δ debida a la rotación entre la

como $\delta y^2/H^2$. En este caso podemos calcular la fuerza dinámica total Q_p con la expresión²²

$$\frac{Q_p}{\alpha H^2} = 2 \left(2 \frac{M_0}{\alpha H^2} - \frac{M_\Delta}{\alpha H^2} \right) - \frac{Q_0}{\alpha H^2} \quad (11)$$

para $\delta = A = \Delta$, donde M_Δ es el momento máximo en la base debido a un movimiento de rotación y δ es la amplitud máxima de la elástica parabólica.

La fig. 9 también muestra valores de $AQ_p/\delta Q_0$ para $L/H = 1$, caso compresible, y para el caso incompresible con $L/H = \infty$.

De esta figura concluimos que, debido a cedencia de la cimentación ($\Delta = A$), las presiones totales causadas por la traslación se reducen en cerca de 60 por ciento para $0 \leq H/T \leq 359.6$ m/seg. Una deformación parabólica de la presa reduce estas fuerzas en 80 por ciento dentro del mismo intervalo de H/T .

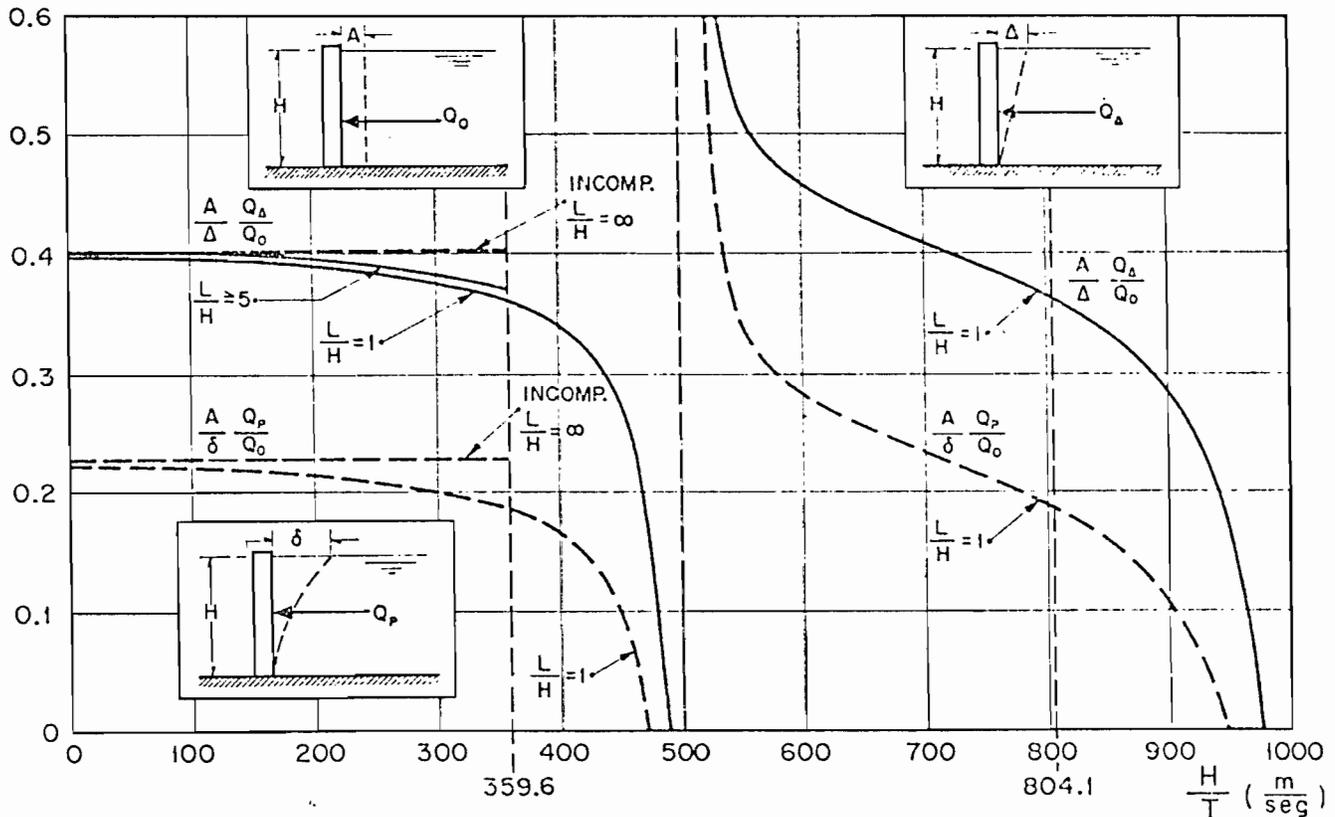


Fig. 9. Relación entre los empujes dinámicos totales para diferentes movimientos de la cortina

fuerza Q_0 debida a la traslación, multiplicado por el cociente A/Δ . Estas relaciones son iguales al cociente de H_0/H que se representa en la fig. 7. Las curvas $AQ_p/\Delta Q_0$ poseen valores finitos para valores de H/T correspondientes a frecuencias críticas; en cambio para valores de H/T próximos a 500 m/seg, las ordenadas de las curvas se vuelven indeterminadas por tender Q_0 a cero.

Para estimar el efecto de la deformación de la presa, asignamos a su elástica una ley parabólica. Esto equivale a tomar la condición de frontera (6)

Podemos aplicar de la siguiente manera los resultados obtenidos para estimar el efecto que pueden tener la deformación de la cortina y la cedencia de su cimentación en las respuestas a un sismo. Consideremos una componente armónica del movimiento del terreno, definida por la amplitud de desplazamiento A_0 y por la frecuencia circular ω . La aceleración máxima del terreno, en términos de la gravedad, será $\alpha = \omega^2 A_0/g$. Si el periodo correspondiente, $T = 2\pi/\omega$, es mayor que el periodo fundamental del liquido almacenado.

$T = H/359.6$ (T en segundos, H en metros), la oscilación del líquido estará en fase con el movimiento del terreno. (Para una cortina de 100 m de alto esta consideración implica que nos referimos a periodos de excitación superiores a 0.278 seg).

Supongamos que la oscilación de la cortina, con presa vacía, estuviera también en fase con el movimiento. Calcularíamos entonces el empuje hidrodinámico despreciando las deformaciones de la cortina. Sea Q_0 ese empuje. La combinación del empuje hidrodinámico y de las fuerzas de inercia de la cortina darían origen a una elástica de la misma, la cual aproximariamos mediante una línea recta sumada a una parábola, ambas pasando por la base de la cortina. Sean Δ y δ las amplitudes correspondientes del desplazamiento de la corona. Si estas amplitudes no son despreciables en comparación con A_0 , concluiremos que hemos errado en exceso del lado conservador al calcular Q_0 . En lugar del empuje calculado tendremos

$$Q = Q_0 - Q_\Delta - Q_p$$

donde Q_Δ y Q_p son los empujes que se obtienen de la fig. 9 entrando con los valores calculados de Δ y δ . Con este nuevo empuje podremos reevaluar Δ y δ y repetir el cálculo de Q , procediendo así por aproximaciones sucesivas hasta lograr un grado satisfactorio de convergencia.

Por ejemplo, si $A_0 = 1.5$ cm y $T = 0.5$ seg, tendremos $\omega = 12.56$ rad/seg. $\alpha = 0.16$. Digamos que este movimiento causa valores de Δ y δ correspondiendo 0.8 y 1.6 cm respectivamente, a las fuerzas de inercia que induce en la cortina y además 0.4 y 0.8 cm por empuje hidrodinámico. Según la fig. 9, casi independientemente del valor de L/H tendremos

$$Q_\Delta = 0.40 \times \frac{0.8 + 0.4}{1.5} Q_0 = 0.32 Q_0$$

$$Q_\delta = 0.22 \times \frac{1.6 + 0.8}{1.5} Q_0 = 0.35 Q_0$$

de donde,

$$Q = (1 - 0.32 - 0.35) Q_0 = 0.33 Q_0$$

En una segunda aproximación entramos en la fig. 9 con

$$\Delta = 0.8 + 0.4 \times 0.33 = 0.93 \text{ cm}$$

$$\delta = 1.6 + 0.8 \times 0.33 = 1.86 \text{ cm}$$

de donde, en forma análoga, $Q = 0.48 Q_0$. El siguiente ciclo nos da $Q = 0.45 Q_0$. Vemos que para este caso, que puede tomarse como representativo, las deformaciones de la cortina y de su cimentación traen consigo una disminución de 55 por ciento en el empuje hidrodinámico.

La flecha total supuesta al nivel de la corona con presa vacía iría asociada con un despla-

zamiento del orden de 0.8 cm al nivel del centro de gravedad de la cortina, a la cual correspondería un periodo fundamental de aproximadamente $2\pi \sqrt{0.8/\alpha g} = 0.46$ seg, que es razonable para una presa de dimensiones moderadas a grandes. Concluimos de aquí que la influencia de las deformaciones de la cortina y de su cimentación en el empuje hidrodinámico son dignos de tomarse en cuenta en la práctica.

Si la respuesta del líquido o de la cortina a presa vacía se hallan defasadas respecto a la perturbación, como sucederá con las componentes del movimiento que tengan frecuencias elevadas deberemos introducir los signos apropiados en las relaciones anteriores.

EFECTO DEL MOVIMIENTO DE LA SUPERFICIE LIBRE

La hipótesis de comportamiento lineal del líquido lleva a establecer la ec. 5 como condición de frontera en la superficie libre. La condición que hemos empleado en el presente estudio es la que suministra la ec. 8, la cual constituye una aproximación que se ha aplicado ampliamente ^{2, 3, 5, 8, 10, 11, 15 y 16}. En el Apéndice II se establece que tal aproximación es aceptable para valores elevados de H/T , tanto que resulta innecesario tomar en cuenta el oleaje cuando este cociente excede 75 m/seg. Al respecto es curioso notar que cuando el mismo cociente excede unos 100 m/seg se torna importante reconocer la compresibilidad del agua.

También con base en los resultados del Apéndice II podemos acotar el error relativo que introducimos al determinar la presión total a partir de la ec. 8 en vez de acudir a la ec. 5. En efecto, se demuestra allí que el error no supera 5 por ciento siempre que

$$H/T \geq 4.2 \sqrt{H} \quad (12)$$

donde H está en metros y T en segundos. Para $H/T \geq 2.6 \sqrt{H}$ la cota superior del error es del orden de 20 por ciento. Estas estimaciones del error son probablemente bastante conservadoras.

En la fig. 10 se marcan tres zonas. La zona A corresponde a combinaciones de valores de H y

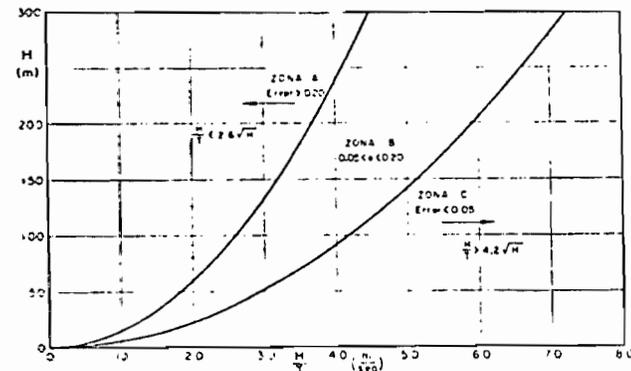


FIG. 10. Cota inferior de H/T para la validez de las soluciones obtenidas suponiendo oleaje mínimo. $L/H > 2$

H/T para los que la cota superior del error que introduce el trueque en condiciones de frontera excede 20 por ciento; en la B dicha cota se halla entre 5 y 20 por ciento, y en la C no llega a 5 por ciento.

De la ec. 12 concluimos que aun para valores elevados de la altura de la cortina, digamos H en exceso de 400 m, resulta despreciable el error en el empuje hidrodinámico total si el cociente H/T es mayor que unos 84 m/seg, y de aquí que los valores críticos de dicho cociente no se vean afectados sensiblemente por la condición de frontera, ya que la frecuencia crítica más baja corresponde a 359.6 m/seg, que en mucho sobrepasa el límite mencionado de 84 m/seg.

También demostramos en el Apéndice II que si sustituimos la condición de frontera en el borde libre por la condición de Poisson, como se ha hecho en diversos trabajos (véanse las refs. 1, 9, 13, 16 y 17) la fórmula que suministra los valores críticos del cociente H/T es idéntica a la que resulta de suponer presión nula en la superficie libre siempre que sustituyamos el valor $\mu_n = (2n - 1)\pi/2$ por k_n . Además, la diferencia entre k_n y μ_n es proporcionalmente pequeña, y es mínima para la primera frecuencia crítica. No obstante, al introducir la condición de Poisson en la superficie libre se presenta una frecuencia crítica adicional, correspondiente a H/T_0 , que obedece a la aparición de la raíz compleja k_0 y refleja la condición de oscilaciones naturales de la superficie libre del líquido.

Los resultados experimentales de Hoskins y Jacobsen (1934) en tanques rectangulares no señalan diferencia apreciable con los resultados teóricos obtenidos a partir de considerar la condición de borde libre fijo expresada por la ec. A26. Sin embargo, en tanques circulares, los experimentos de Jacobsen y Ayre (1957) señalan que sólo es apreciable el oleaje cuando el movimiento está en fase con la primera condición crítica del nivel libre, que ocurre para $k_0 = 0.586 \pi H/R$. Los modos superiores no se generan en grado apreciable debido a que ello requeriría que el movimiento estuviera en fase con la frecuencia del modo de que se tratara, lo que implica una condición que es difícil se presente en un problema físico. El valor de $\omega^2 H/g = \alpha H/A_0$, que da la primera resonancia del nivel libre, se obtiene de sustituir $k_0 = 0.586 \pi H/R$ en la ec. 12 y vale aproximadamente $1.75 = \omega^2 H/g = \alpha H/A_0$ para $H/R = 1$.

Extendiendo los resultados anteriores a tanques rectangulares, el primer modo de vibración de la superficie del agua se presenta¹ cuando $k_0 = \pi H/L$; ello da lugar a que $\omega^2 H/g = \alpha H/A_0 = \pi$ para $L/H = 1$.

El significado de las condiciones anteriores radica en que rige la aplicabilidad de la solución teórica con borde libre siempre que $\alpha H/A_0 = \omega^2 H/g$ sea mucho mayor que π , limitándose con ello el valor mínimo de H/T y el de H , ya que para valores pequeños de H , el oleaje y, por tanto, las presiones ejercidas ya no dependen linealmente de A_0 . Esta conclusión encuentra verificación experi-

mental en los resultados que obtuvieron Jacobsen y Ayre (1951) para tanques circulares.

RESONANCIAS

Los valores de las resonancias debidas a ondas de expansión (compresión) están dadas por la ec. 13 (ec. A56.3)

$$\frac{H}{T} = 2 \frac{a}{4} \frac{H}{L} \sqrt{m^2 + \frac{(2n-1)^2}{4} \left(\frac{L}{H}\right)^2} \quad (13)$$

Cuando $L/H = \infty$ la fórmula de frecuencias críticas que resulta a partir de la solución completa dada por Kotsubo (1959) es

$$\frac{H}{T} = (2n-1) \frac{a}{4} \quad (14)$$

Ello señala que las resonancias intermedias que se presentan entre $H/T = a/4$ y $H/T = 3a/4$ en la primera fórmula (ec. 13) se deben a que la pared opuesta a la cortina refleja las ondas de expansión. El fenómeno se exagera en los estudios analíticos por no tomarse en cuenta en ellos la deformación de la cortina, el amortiguamiento interno, ni otras formas de disipación de energía.

Cuando, como en el presente estudio, despreciamos el oleaje superficial, debemos imponer un límite inferior para su aplicabilidad, exigiendo que el valor de $\omega^2 H/g$ sea elevado.

En resumen, la solución que hemos obtenido sólo será aplicable si tanto la amplitud A como la altura de la presa, H , son tales que la cantidad $\alpha H/A_0$ resulte muy superior a π . De lo contrario habrá efectos apreciables debidos a excitación del oleaje.

AMPLITUD DEL OLEAJE

Se dispone de estudios analíticos²⁰ y experimentales²¹ de olas de gravedad en recipientes rectangulares en función de la relación λ/H siendo λ la longitud de la ola. El objeto de tales estudios ha sido determinar la amplitud máxima de las olas cuando el tanque se excita a la frecuencia natural de oscilación de la superficie libre según las ecuaciones lineales del movimiento. Se ha encontrado²⁰ para los modos naturales que si la relación λ/H es mayor que $1/0.17 > 5.89$ la amplitud de oscilación se mantiene finita para toda frecuencia excitatriz constante; sólo puede hacerse crecer indefinidamente si aumentamos la frecuencia excitatriz monótonicamente en función del tiempo. Para $\lambda/H < 5.89$ la amplitud del oleaje sólo crece indefinidamente si hacemos que la frecuencia del movimiento decrezca en función del tiempo. Cuando $\lambda/H = 5.89$ la amplitud aumenta indefinidamente ante un movimiento de frecuencia constante. Experimentalmente²¹ la relación crítica se encontró $\lambda/H = 1/0.14 = 7.15$.

Concluimos de los resultados que anteceden que cuando se trata de un movimiento estacionario de la base no se produce, en general, oleaje de gran amplitud salvo que las dimensiones del tanque se

hallen próximas a las que corresponden a un cociente $\lambda/H = 5.89$.

La conclusión no es directamente aplicable a sismos, ya que la naturaleza caótica de estos movimientos da origen a trenes de ondas de frecuencias crecientes y de frecuencias decrecientes. Tal fenómeno es posible cause a su vez olas que pueden alcanzar amplitudes sumamente elevadas.

Aún de mayor trascendencia a este respecto suelen ser las olas que se forman por deslizamientos de grandes masas de suelo en las laderas que bordean al vaso de almacenamiento, aunque dichas fallas tomen lugar a distancias apreciables de la cortina.

Estas consideraciones son de fundamental importancia para la elección del borde libre de la cortina y ameritan estudios más extensos que aquellos de que actualmente se dispone.

FORMA DE LA PRESA

El problema de presas en arco ha sido ampliamente estudiado por Kotsubo (1961) para el caso de movimiento estacionario. Sin embargo, las soluciones que presenta, para calcular la presión dinámica requieren una gran labor numérica. En el Apéndice II presentamos una solución alternativa del mismo problema. Para ambas soluciones e necesita el uso de una computadora electrónica le gran capacidad para llegar a resultados numéricos. La solución para movimientos transitorios resulta casi intratable aun con el auxilio de dicho equipo electrónico.

CONCLUSIONES

1. Tratándose de un movimiento de excitación armónico es admisible suponer el agua incompresible sólo para valores de H/T menores que unos 100 m/seg. El error relativo es máximo para periodos de excitación iguales a cualquiera de las frecuencias críticas de la presión hidrodinámica (fig. 2).
2. El efecto de la longitud del vaso no es importante para periodos de excitación superiores al primer periodo crítico ($H/T = 359.6$ m/seg). Para periodos menores, la longitud juega un papel importante en movimientos armónicos estacionarios (figs. 3 - 5). Los diagramas de presiones también se ven radicalmente afectados por la longitud en este caso.
3. Los efectos del movimiento superficial no son significativos cuando el cociente H/T excede 84 m/seg. El error máximo en el empuje hidrodinámico total por este concepto es menor que 5 por ciento si $H/T > 4.2 \sqrt{H}$ (H en metros; T en segundos). Dicho movimiento superficial no afecta los valores críticos de la posibilidad de resonancia con la oscilación de la superficie libre para valores muy pequeños del cociente H/T ($H/T < 2.6 \sqrt{H}$). Por ejemplo, tratándose de una cortina de 100 m de alto, el empuje hidrodinámico que provenga de ondas sísmicas con periodos menores

que 2.4 seg podrá calcularse despreciando el efecto de la oscilación superficial sin por ello introducir errores mayores que 5 por ciento; y sólo habrá posibilidad de resonancia con la oscilación superficial para periodos de excitación mayores que 10 seg.

4. Para movimientos estacionarios sólo pueden presentarse olas de gran amplitud cuando la relación de longitud de ola λ a altura del agua en reposo H se halla en la vecindad de 6 a 7. La conclusión no se aplica a perturbaciones de frecuencia variable, como los sismos, ni al oleaje que pueden originar los deslizamientos de grandes volúmenes de las laderas. Esta cuestión amerita estudiarse ampliamente para establecer criterios de diseño del borde libre de las cortinas.
5. Tratándose de cortinas de dimensiones moderadas o grandes, las presiones dinámicas totales se reducen notablemente por los efectos de rotación de la cimentación y deformación de la presa.
6. En el problema estacionario sólo se alcanzan presiones dinámicas altas cerca de las frecuencias críticas. A este respecto notamos que se necesita un tiempo considerable para establecer el movimiento permanente. Este requisito es más estricto para modos superiores al fundamental cuando los periodos naturales se hallan muy próximos entre sí, pues en este caso la frecuencia de excitación debe coincidir muy precisamente con la frecuencia natural de la presión dinámica para que se presente una gran amplificación dinámica. Estas condiciones se han observado experimentalmente^{3,7}. De aquí concluimos que en el caso de un movimiento errático tal como un sismo no habrá suficiente tiempo para producir resonancia, salvo que la cortina esté cimentada sobre suelo muy blando y en condiciones tales que puedan esperarse periodos predominantes, como en el caso de sismos de gran magnitud y epifoco lejano.
7. La presión hidrodinámica es una fracción de la hidrostática aun para valores relativamente grandes de la aceleración máxima de excitación (0.2 g) excepto en la vecindad de las frecuencias críticas.
8. El estudio anterior, aun cuando limitado, permite concluir que la presión hidrodinámica no es la consideración más importante para el diseño de presas de gravedad sujetas a movimientos sísmicos moderados y erráticos. Debemos además tener en cuenta, como se desprende de las figuras presentadas, que la fuerza de inercia de la cortina y la presión hidrodinámica pueden estar en fase o fuera de ella. Los casos que ofrecen peligro en la práctica corresponden a condiciones en que puedan presentarse ondas sísmicas periódicas próximas a las de resonancia.
9. Para el análisis de presas de arco se sugiere utilizar los resultados obtenidos analíticamente y experimentalmente por Kotsubo (1961)

quien establece que la presión máxima en la clave de un cilindro circular es menor que la presión correspondiente para el caso bidimensional, aumentando hacia los apoyos. En el Apéndice II se presenta una solución alternativa a la de Kotsubo (1961) para el caso armónico estacionario en presas cilíndricas circulares con laderas radiales y longitud finita del vaso. Tanto ésta como la solución de Kotsubo son muy laboriosas requiriéndose una computadora electrónica grande para su valuación.

10. Se justifica ampliar el trabajo presente mediante un estudio de los siguientes conceptos.

a) Presión hidrodinámica máxima que obra durante movimientos transitorios contra cortinas cuyo paramento aguas arriba es un plano inclinado con vaso finito, suponiendo el líquido compresible y empleando una aproximación lineal a las condiciones de frontera en la superficie libre. Se dispone ya de un programa que permite construir movimientos estocásticos ficticios, en computadora electrónica, semejantes a los temblores intensos de la realidad. El programa habrá de ampliarse para construir movimientos de muy diversas características.

Con el fin de disminuir el número de casos que deban considerarse podrá hacerse uso del indicio disponible en el sentido de que la distribución de presiones puede aproximarse como si fuera independiente de la inclinación del paramento mojado y tomarse como variable únicamente el empuje dinámico total o el momento de volteo en la base. Además es posible que no se incurra en errores graves suponiendo que los efectos de la inclinación de este paramento y del tamaño del vaso son multiplicativos e independientes entre sí.

b) Efectos de la deformación de la cortina y de su cimentación, combinados con los efectos de las variables mencionadas, también en estado transitorio.

c) Distribución de presiones hidrodinámicas para los casos que anteceden tomando en cuenta una teoría hidrodinámica no lineal que incluyan correctamente el efecto del oleaje posiblemente despreciando la compresibilidad del líquido almacenado.

d) Presiones hidrodinámicas en estado estacionario, para movimientos en direcciones cualesquiera, contra cortinas cilíndricas verticales despreciando la compresibilidad del líquido y linealizando la condición de frontera en la superficie libre. Los resultados de esta fase del estudio deberán combinarse con los de las tres anteriores para lograr una estimación satisfactoria aplicable a condiciones realistas de presas en arco.

RECONOCIMIENTO

El presente trabajo fue encomendado al Instituto de Ingeniería por la Comisión Federal de Electricidad, la cual cubrió la mayor parte de la investigación. El profesor S. Kotsubo, proporcionó gentilmente a los autores copias de las refs. 15 y 17 y comentó las condiciones de frontera A42.

REFERENCIAS

- Lamb, H., "Hydrodynamics", Dover Publications Ltd. (New York, 1945).
- Westergaard, H. M., "Water pressure on dams during earthquakes", *Trans. American Soc. Civ. Engrs.*, 98 (1933), 418-433.
- Hoskins, L. M. and Jacobsen, L. S., "Water pressure in a tank caused by a simulated earthquake", *Bull. Seism. Soc. Amer.* 24, 1 (1934), 1-32.
- Hinds, J., Creager, W. P., and Justin, J. D., "Engineering for Dams", Vol. II John Wiley and Sons (New York, 1945), 279-286.
- Jacobsen, L. S., "Impulsive hydrodynamics of a fluid inside a cylindrical tank and of a fluid surrounding a cylindrical pier", *Bull. Seism. Soc. Amer.* 39, 2, (1949), 189-204.
- Werner, P. W. and Sundquist, K. J., "On hydrodynamic earthquake effects", *Trans. Amer. Geophys. Union*, 30, 5, (1949), 636-657.
- Jacobsen, L. S. and Ayre, R. S., "Hydrodynamic experiments with rigid cylindrical tanks subjected to transient motions", *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 41, 4, (1951), 313-346.
- Chow, V. T., "Hydrodynamic pressure due to horizontal earthquake shock computed by curves", *Civil Engineering*, 21, 9 (sep. 1951), 532-533.
- Graham, E. W. y Rodriguez, A. M., "The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics", *Jour. Applied Mechanics*, 19, 3 (1952), 381-388.
- Zangar, C. N. and Haefeli, R. J., "Electric analog indicates effect of horizontal earthquake shock on dams", *Civil Engineering*, 22, 4 (abr. 1952), 278-279.
- Zangar, C. N., "Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquakes", *Proc. Soc. Exper. Stress Analysis*, 10, 2 (1953), 93-102.
- Housner, G. W., "Dynamic pressures on accelerated fluid containers", *Bull. Seism. Soc. of Amer.*, 47, 1, (1957), 15-35.
- Ambraseys, N. N., "Seismic hydrodynamics and wave generation in reservoirs", *Proc. Assoc. Internat. des Recherches Hydrauliques, Lisboa*, 7 (1957), D19-1 - D19-9
- Napedvaridze, Sh. G., "Seismostoičnost Gidrotexnicheskix Soorulenii", *Cosstroisdat* (Moscu, 1959).
- Kotsubo, S., "Dynamic water pressure on dam due to irregular earthquakes", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ.*, 18, 4 (1959), 119-129.
- Ferrandon, J., "Actions hydrodynamiques des séismes sur les ouvrages de retenue", *Le Génie Civil*, (1 mar. 1960), 107-109.
- Kotsubo, S., "External forces on arch dams during earthquakes", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ.*, 20, 4 (1961), 327-366.
- Chen-Chzhen-Chen, "The effect of dynamic fluid pressure on a dam during earthquakes", *Jour. Appl. Math. and Mech. (P.M.M.)*, 25, 1 (1961), 211-219.
- Chen-Chzhen-Chen, "On the hydrodynamic pressure on a dam caused by its aperiodic or impulsive vibrations and vertical vibrations of the earth surface", *Jour. Appl. Math. and Mech. (P.M.M.)*, 25, 4 (1961), 1060-1076.
- Tadjbakhsh, I. and Keller, J. B., "Standing surface waves of finite amplitude", *Jour. Fluid Mech.*, 8, 3 (1960), 442-451.
- Fultz, D., "An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves", *Jour. Fluid Mech.*, 13, 2 (1962), 193-212.
- Flores Victoria A., "Presión hidrodinámica en presas y tanques", tesis de ingeniero civil, *Univ. Nac. Aut. de Méx.* (1963).

APENDICE I

NOTACION

A = amplitud de traslación del movimiento de la cortina
 A_0 = amplitud del movimiento del suelo
 A_n = coeficiente de Fourier en el desarrollo en serie de la solución
 A_{mn}, B_{mn} = coeficientes de Fourier
 $a = \sqrt{E_v g / \gamma_0}$ velocidad del sonido en el agua
 d_n = coeficiente de Fourier en la solución a presas de arco
 E_v = módulo volumétrico de elasticidad
 e_0 = error relativo proveniente de despreciar la compresibilidad del agua
 $f_n(x/L)$ = función dependiente de x
 g = aceleración de la gravedad
 \bar{g} = fuerza externa por unidad de masa aplicada a una partícula del fluido
 H = altura del nivel libre del agua en reposo
 H_0 = altura del centro de presiones
 h = altura de la superficie del agua en movimiento sobre el nivel de reposo
 $\dot{\varphi} = -1$
 $J_{j_{mn}}(\)$ = funciones Bessel que satisfacen ec. A49
 j_{mn} = orden de las funciones de Bessel, obtenidas mediante ec. A49
 k_0 = parte real de la raíz imaginaria de la ec. A54.1 o raíz real de A54.2
 k_n = raíces reales de la ecuación transcendente A54.1
 L = longitud del vaso en el caso bidimensional y distancia al origen de la pared opuesta a la cortina en el caso tridimensional
 M_0, M_{Δ}, M_p = $l_{mn} = m\pi/\theta_n$
 M_p = momento flexionante en la base de la cortina, debido a su movimiento de traslación, a rotación de la base y a deformación parabólica respectivamente
 $m = 0, 1, 2, \dots$
 $N_m = m\pi$
 $n = 1, 2, 3, \dots$
 n_0 = es el mínimo valor de n que hace $\mu_n > \beta$ ó $k_n > \beta$
 P = empuje hidrostático total
 p = presión hidrodinámica en el punto (x, y) ó (r, θ, z) en el instante t
 p_0, p_{Δ}, p_p = presión hidrodinámica en la base, debida a traslación, rotación de la base y deformación parabólica de la cortina respectivamente
 p_a = presión atmosférica
 p_h = presión hidrostática
 Q = empuje hidrodinámico total

Q, \bar{Q} = empuje total al tomar (\bar{Q}) o no (Q) el oleaje
 Q_0, Q_s, Q_p = empuje hidrodinámico total por traslación, rotación de la base y deformación parabólica de la cortina respectivamente
 $Q_{j_{mn}}$ = combinaciones lineales de funciones de Bessel en la solución en presas de arco
 \bar{q}, q = empuje total adimensional $Q/\gamma_0 a H$ al tomar o no el oleaje
 q_n = función de r, θ en el problema tridimensional
 R = radio de un tanque circular
 $R_{j_{mn}}$ = ver $Q_{j_{mn}}$
 r = coordenada radial en el problema tridimensional
 r_0 = radio del paramento mojado vertical de la cortina de arco
 s = orden del término de las series para el cual se obtiene la convergencia
 S_n = conjunto de funciones (r, θ) de la solución en presas de arco
 T = periodo del movimiento perturbador
 t = tiempo
 U, V = velocidades de una partícula a lo largo de los ejes x, y
 u, v = desplazamientos de una partícula del fluido a lo largo de los ejes x, y
 \bar{U} = vector velocidad de una partícula del fluido
 \bar{U}_0 = valor del vector cuando $\varepsilon = 0$
 x, y = ejes coordenados cartesianos ortogonales en el problema bidimensional (fig. 1)
 z = eje vertical en el sistema cilindrico
 $\alpha = \omega^2 A_0 / g$ = máxima fracción de la aceleración de la gravedad que experimenta la base de la cortina

$$\bar{a}_0 = \frac{k_0 \sinh k_0}{k_0 + \sinh k_0 \cosh k_0}$$

$$a_n = \frac{k_n \sin k_n}{k_n + \sin k_n \cos k_n}$$

$$\beta = \omega H / a$$

$$\gamma_0 = \text{peso volumétrico del agua}$$

$$\gamma_n = \frac{r_0}{H} \sqrt{k_n^2 - \beta^2} \text{ si } k_n > \beta$$

$$\gamma_n = \frac{r_0}{H} \sqrt{\beta^2 - k_n^2} \text{ si } \beta > k_n$$
 Δ = amplitud del desplazamiento de la corona de una cortina debido a rotación de la misma

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \text{ laplaciano}$$

δ = máxima deformación parabólica de la cortina

ε = parámetro variable usado en el método de las perturbaciones

$$\varepsilon_n = k_n - \mu_n$$

θ = coordenada angular en un sistema cilíndrico

θ_a = ángulo máximo de la cortina con respecto a su eje de simetría

$$K_0 = \frac{L}{H} \sqrt{\beta^2 + k_0^2}$$

$$K_n = \frac{L}{H} \sqrt{\beta^2 - k_n^2} \quad \text{si } \beta > k_n$$

$$K_n = \frac{L}{H} \sqrt{k_n^2 - \beta^2} \quad \text{si } k_n > \beta$$

λ = longitud de la ola en la superficie libre

$$\lambda_n = \frac{L}{H} \sqrt{\beta^2 - \mu_n^2} \quad \text{si } \beta > \mu_n$$

$$\lambda_n = \frac{L}{H} \sqrt{\mu_n^2 - \beta^2} \quad \text{si } \mu_n > \beta$$

$$\lambda_n^0 = \sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}$$

$$\mu_n = (2n - 1) \pi / 2$$

ρ = densidad del fluido

ρ_0 = densidad del fluido supuesta constante

σ = función potencial de presiones

$$\tau_{nm} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\mu_n^2 - \left(N_m \frac{H}{L}\right)^2}$$

φ = función potencial de velocidades del problema hidrodinámico

φ_1, φ_2 = funciones tales que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

ω = frecuencia angular del movimiento armónico perturbador

SIMBOLOS

\cong = aproximadamente igual a

\approx = asintóticamente igual a

$$(\quad)' = (\partial/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}$$

APENDICE II

Objeto. En este apéndice deduciremos las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones de frontera usadas y obtendremos la solución de las mismas.

Deduciremos las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones de frontera, que hemos empleado, como una aproximación a las ecuaciones de movimiento, las ecuaciones de continuidad y las con-

diciones de frontera exactas que gobiernan el movimiento de los fluidos compresibles no viscosos.

Ecuaciones fundamentales. Considerando el vector velocidad \bar{U} de una partícula del fluido y \bar{g} la fuerza externa por unidad de masa, la segunda ley de Newton da lugar a que la ecuación dinámica del movimiento tome la forma

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \text{grad}) \bar{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \bar{g} \quad (\text{A1})$$

donde ρ es la densidad del fluido (masa por unidad de volumen), p la presión esférica en la partícula y t el tiempo.

Podemos expresar la condición de conservación de la masa mediante la ecuación de continuidad,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{U} \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{div } \bar{U} = 0 \quad (\text{A2})$$

Supondremos que es lineal la relación entre el cambio fraccional de volumen y el de la presión, es decir,

$$\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{\rho}{E_v} \quad (\text{A3})$$

donde E_v es una constante llamada *módulo volumétrico de elasticidad*, que en el caso del agua en condiciones ordinarias vale $2.109\ 2006 \times 10^5$ ton/m².

Condiciones de frontera exactas. Por simplicidad consideraremos el caso bidimensional, ya que para el tridimensional el razonamiento es análogo. Además supondremos $\Delta = 0$. De esta manera deduciremos la aproximación a las ecuaciones y condiciones en la frontera, si la cortina se ajusta a un estado de desplazamientos senoidal con el tiempo.

Llamemos U, V las componentes de la velocidad de una partícula a lo largo de los ejes x, y (fig. 1). Especifiquemos que las velocidades normales al plano x, y , son nulas, con lo que hemos definido el caso bidimensional. En las fronteras se deben cumplir las condiciones

$$V(x,0,t) = 0 \quad p(x,H+h,t) = p_a \quad (\text{A4})$$

$$U(0,y,t) = A\omega \cos \omega t \quad U(L,y,t) = 0 \quad (\text{A5})$$

$$p(x,y,0) = p_h \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x,y,0) = 0 \quad (\text{A6})$$

donde $A\omega$ es la velocidad máxima de traslación en la base de la cortina, H y L la altura y longitud de la masa de agua en reposo, p_a y p_h la presión atmosférica y la hidrostática respectivamente y h la altura de la ola del líquido en movimiento, con respecto al nivel de reposo.

Deducción de las aproximaciones. Procedemos ahora a linealizar estas ecuaciones. Emplearemos el método de las perturbaciones.

La idea fundamental de este método consiste en considerar una familia de problemas dependientes de un parámetro ε y su solución $\bar{U}(x,y,t,\varepsilon)$.

$p(x,y,t,\epsilon)$, $\rho(x,y,t,\epsilon)$ tal que la solución para $\epsilon = 0$ es conocida (sea ésta \bar{U}_0, p_h, ρ_0) y el problema correspondiente a $\epsilon = 1$ es el problema dado. Si aproximamos el incremento por medio de la diferencial tendremos

$$\bar{U} = \bar{U}_0 + \bar{U}'; \rho = \rho_h + \rho'; \rho = \rho_0 + \rho' \quad (A7)$$

donde

$$\bar{U}' = \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0}, \rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0}, \rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \quad (A8)$$

Obsérvese que para que la aproximación (A7) sea razonable, basta con que las derivadas de las variables dinámicas con respecto a ϵ sean continuas y suficientemente pequeñas.

Procediendo de esta manera a partir de las ecuaciones de movimiento y de las condiciones de frontera exactas, obtenemos para \bar{U}' , ρ' y ρ' , ecuaciones diferenciales y condiciones en la frontera lineales. En particular, la familia de problemas que consideramos está descrito por las mismas ecs. A1-6, excepto que deberemos reemplazar la ec. A5 por

$$U(0,y,t,\epsilon) = \epsilon A \omega \cos \omega t \quad (A9)$$

Encontramos ahora, de las ecs. A9 y A1, con $\epsilon = 0$

$$\bar{U}_0 = 0, \text{grad } p_h = \rho_0 \bar{g} \quad (A10)$$

Debido a la baja compresibilidad del agua en condiciones ordinarias, tomaremos en esta etapa del desarrollo la densidad ρ_0 del agua en equilibrio como constante, aunque esto no es estrictamente cierto.

Derivamos ahora la ec. A1 con respecto a ϵ y calculamos para $\epsilon = 0$ tomando en cuenta la ec. A3, obteniendo

$$\frac{\partial \bar{U}'}{\partial t} = -\text{grad } (p'/\rho_0) \approx -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p' \quad (A11)$$

y haciendo las mismas operaciones con la ecuación de la continuidad (A2) se obtiene

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \bar{U}' = 0$$

pero según la ec. A3,

$$\rho' = \frac{\rho_0}{E_v} p'$$

por lo que

$$\frac{1}{E_v} \frac{\partial p'}{\partial t} + \text{div } \bar{U}' = 0 \quad (A12)$$

Las ecs. A11 y A12 implican

$$\nabla^2 p' - \frac{\rho_0}{E_v} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (A13)$$

Aquí ∇^2 es el laplaciano $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

Condiciones de frontera aproximadas. Derivemos ahora las condiciones en la frontera (ec. A4), la segunda de las ecuaciones, A5 y la ec. A9 con respecto a ϵ y hagamos $\epsilon = 0$. Encontraremos

$$V'(x,0,t) = 0;$$

$$p'(x,H,t) + \frac{\partial p_h}{\partial y}(x,H,t)h' = 0 \quad (A14)$$

$$U'(0,y,t) = A \omega \cos \omega t \quad (A15)$$

$$U'(L,y,t) = 0 \quad (A16)$$

donde

$$h' = (\partial h / \partial \epsilon)_{\epsilon=0}$$

En vista de la ec. A10, la segunda de las ecs. A14 se transforma en

$$p'(x,H,t) - \rho_0 g h'(x,t) = 0 \quad (A17)$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

Además en la superficie del agua se cumple que

$$V = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x}$$

Derivando esta ecuación con respecto a ϵ y haciendo $\epsilon = 0$ obtenemos $V' = \partial h' / \partial t$ que nos permite escribir, en vista de la ec. A17

$$\frac{\partial p'}{\partial t}(x,H,t) - \rho_0 g V'(x,H,t) = 0$$

y por lo mismo,

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}(x,H,t) - \rho_0 g \frac{\partial V'}{\partial t} = 0 \quad (A18)$$

Definiendo la función potencial de presiones σ por

$$\sigma = p' \quad (A19)$$

y recordando que ρ_0 es constante, la ec. A11 se convierte en

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{U}'}{\partial t} = -\text{grad } \sigma \quad (A20)$$

La ec. A13 se convierte en

$$\nabla^2 \sigma - \frac{\gamma_0}{E_v g} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \quad (A21)$$

Por otro lado, definiendo la función potencial de velocidades ϕ tal que

$$\bar{U}' = -\text{grad } \phi \quad (A19)'$$

en la ec. A11 resulta

$$-\text{grad } \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\text{grad } \frac{p'}{\rho_0}$$

tendremos para ello

$$p' = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{ó} \quad \sigma = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (A20)'$$

La ec. A12 se convierte en

$$\nabla^2 \phi - \frac{\gamma_0}{E_v g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A21})'$$

donde se ha sustituido $\rho_0 = \gamma_0/g$; γ_0 es el peso volumétrico del fluido, y las condiciones de frontera correspondientes a (A21)' son

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, H, t) + g \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, H, t) = 0 \quad (\text{A22})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, y, t) = -A\omega \cos \omega t \quad (\text{A23})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(L, y, t) = 0 \quad (\text{A24})$$

Finalmente de la ec. A6 se deduce que

$$\phi(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad (\text{A25})$$

Varios autores^{2, 3, 5, 6, 8, 11, 12, 15 y 16} han sustituido la segunda de las ecs. A22 por

$$\phi(x, H, t) = 0 \quad (\text{A26})$$

que empleamos en la solución para simplificar el problema. El error que se comete por este concepto es pequeño si A también lo es, como estableceremos más adelante.

Podemos repetir el desarrollo anterior para cualquier configuración que adopte la cortina deformada, siempre que el ángulo máximo de inclinación permita considerar despreciable $V \tan \theta$ con respecto a U , donde θ es el ángulo que forma la normal con respecto al eje horizontal, de esta manera estableceremos la solución para un estado de desplazamiento de la cortina definido por $(A - \Delta y/H) \sin \omega t$.

Solución. Para estas condiciones en la frontera, la solución se puede obtener descomponiendo el potencial ϕ en una parte estacionaria o periódica ϕ_1 y otra transitoria ϕ_2 . Es decir,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (\text{A27})$$

donde

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega f_n \left(\frac{X}{L} \right) \cos \mu_n \frac{y}{H} \cos \omega t \quad (\text{A28})$$

$$f_n \left(\frac{X}{L} \right) = \cos \lambda_n \left(\frac{L-x}{L} \right);$$

$$\lambda_n = \frac{L}{H} \sqrt{\beta^2 - \mu_n^2} \quad \text{si } \beta > \mu_n \quad (\text{A29.1})$$

$$f_n \left(\frac{x}{L} \right) = \cosh \lambda_n \left(\frac{L-x}{L} \right);$$

$$\lambda_n = \frac{L}{H} \sqrt{\mu_n^2 - \beta^2} \quad \text{si } \mu_n > \beta \quad (\text{A29.2})$$

$$\mu_n = (2n-1) \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\omega H}{a} = \frac{2\pi}{a} \frac{H}{T} \quad (\text{A29.3})$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

a = veloc. del sonido en el agua = $\sqrt{E_v g / \gamma_0}$

T = periodo del movimiento

E_v = módulo de elasticidad volumétrico

A_n = coeficientes de Fourier en el desarrollo

$$-\left(A - \Delta \frac{y}{H} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\partial f_n \left(\frac{L}{x} \right)}{\partial x} \right)_{x=0} \cos \mu_n \frac{y}{H} \quad (\text{A30.1})$$

por tanto

$$A_n = \frac{(-1)^n (A - \Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n}}{2L \mu_n \lambda_n \sin \lambda_n} \quad \text{donde}$$

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{L}{H} \right)^2 [\beta^2 - \mu_n^2] \quad (\text{A30.2})$$

Podemos establecer directamente la solución que antecede aplicando el método de separación de variables en la ec. A21', a la primera de las ecs. A22 y a las A23, A24 y A26. Aquí también puede sustituirse $(A - \Delta y/H)$ por cualquier elástica de la cortina, en cuyo caso sólo se modifican los coeficientes A_n .

La parte transitoria debe satisfacer, además de la ec. A21, la condición

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, 0, t) = \phi_2(x, H, t) = 0 \quad (\text{A31})$$

donde se ha sustituido la equivalencia

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t}(x, H, t) = \phi_2(x, H, t) = 0$$

y ϕ_2 debe cumplir las relaciones

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(L, y, t) = 0 \quad (\text{A32})$$

$$\phi_2(x, y, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega f_n \left(\frac{x}{L} \right) \cos \mu_n \frac{y}{H} \quad (\text{A33})$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad (\text{A34})$$

Podemos obtener ϕ_2 mediante el método de separación de variables, proponiendo como función del tiempo $\cos \tau_{mn} \omega t$. Resulta entonces

$$\phi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega \lambda_n B_{mn} \cos N_m \left(\frac{L-x}{L} \right) \times \cos \mu_n \frac{y}{H} \cos \tau_{mn} \omega t \quad (\text{A35})$$

donde

$$\tau_{mn} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\mu_n^2 + \left(N_m \frac{H}{L} \right)^2} \quad (\text{A36})$$

$$N_m = m\pi$$

y las constantes B_{nm} están determinadas por la condición

$$f_n\left(\frac{x}{L}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} \cos N_m \left(\frac{L-x}{L}\right) \quad (\text{A37.1})$$

valen

$$B_{nm} \begin{cases} -\frac{2\lambda_n}{(N_m^2 - \lambda_n^2)} (-1)^{m+1} \sin \lambda_n \\ -1 \text{ si } N_m^2 = \lambda_n^2 \end{cases} \quad (\text{A37.2})$$

donde

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{L}{H}\right)^2 [\beta^2 - \mu_n^2]$$

De esta manera obtenemos

$$p = \frac{\gamma_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

y dado $\alpha = \omega^2 A_0/g$ resulta

$$\frac{p}{\alpha H} = \frac{\gamma_0}{A_0 \omega^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{A37.3})$$

Sustituyendo las ecs. A29 y A30 en la A28 hallamos

$$\phi_1 = (-2\omega L) \cos \omega t \left\{ \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{(-1)^n (A-\Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n}}{\mu_n \lambda_n \sin \lambda_n} \times \right. \\ \times \cos \lambda_n \left(\frac{L-x}{L}\right) \cos \mu_n \frac{y}{H} + \\ \left. + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n (A-\Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n}}{\mu_n \lambda_n \sinh \lambda_n} \times \right. \\ \left. \times \cosh \lambda_n \left(\frac{L-x}{L}\right) \cos \mu_n \frac{y}{H} \right\} \quad (\text{A37.4})$$

donde $n_0 \geq 1$ es el mínimo valor del entero n que hace $\mu_n > \beta$. Si $n_0 = 1$ la primera serie desaparece. Ahora bien, dado que el movimiento excitador tiene un desplazamiento $A_0 \sin \omega t$ y una aceleración $-A_0 \omega^2 \sin \omega t = \alpha g \sin \omega t$ y que tomando

$$-\alpha H = \frac{\omega^2 H^2}{g} \frac{A_0}{H}$$

encontramos

$$\frac{p_1}{\alpha H} = 2\gamma_0 \frac{L}{H} \sin \omega t \left\{ \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{(-1)^n (A-\Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n}}{A_0 \mu_n \lambda_n \sin \lambda_n} \times \right.$$

$$\times \cos \lambda_n \left(\frac{L-x}{L}\right) \cos \mu_n \frac{y}{H} - \\ - \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n (A-\Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n}}{A_0 \mu_n \lambda_n \sinh \lambda_n} \times \\ \left. \times \cosh \lambda_n \left(\frac{L-x}{L}\right) \cos \mu_n \frac{y}{H} \right\} \quad (\text{A38.1})$$

que constituye la solución para el estado estacionario.

Para la parte transitoria sustituyamos las ecs. A37.1, 2 en la (A35) y tomemos en cuenta la (A30.2). Obtendremos

$$\phi_2 = (-2\omega L) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m-1} \left[(-1)^n (A-\Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n} \right]}{\mu_n (N_m^2 - \lambda_n^2)} \frac{1}{\lambda_n} \times \\ \times \cos N_m \left(\frac{L-x}{L}\right) \cos \mu_n \frac{y}{H} \cos \tau_{nm} \omega t$$

De aquí resulta, tomando

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{L}{H}\right)^2 (\beta^2 - \mu_n^2)$$

$$\frac{p^2}{\alpha H} = 2\gamma_0 \frac{L}{H} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \frac{1}{A_0} \left[(-1)^n (A-\Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n} \right]}{\mu_n (N_m^2 - \lambda_n^2)} \frac{1}{\lambda_n} \times \\ \times \tau_{nm} \cos N_m \left(\frac{L-x}{L}\right) \times \\ \times \cos \mu_n \frac{y}{H} \sin \tau_{nm} \omega t \quad (\text{A38.2})$$

La solución completa nos queda en la forma

$$\frac{p}{\alpha H} = \frac{p_1}{\alpha H} + \frac{p_2}{\alpha H} \quad (\text{A38.3})$$

Podemos obtener la solución que corresponde a la condición $L/H = \infty$ directamente de la ec. A37.4 para el caso estacionario:

$$\frac{p_1}{\alpha H} = (-2\gamma_0 \sin \omega t) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (A-\Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n}}{A_0 \mu_n \lambda_n^0} \frac{1}{\lambda_n} e^{\lambda_n x/H} \cos \mu_n \frac{y}{H} \quad (\text{A38.4})$$

donde $\lambda_n^0 = \sqrt{\mu_n^2 - \beta^2}$. La expresión es válida si $\mu_1 > \beta$. Para $\Delta = 0$ esta solución concuerda con la encontrada por Westergard (1933).

Si suponemos el fluido incompresible, de manera que $E_v = \infty$, resulta $\beta = 0$. De aquí, para $L/H = \infty$ hallamos

$$\frac{p}{\alpha H} = (-2\gamma_0 \text{sen } \omega t) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (A - \Delta) - \frac{\Delta}{\mu_n}}{A_0 \mu_n^2} e^{\mu_n x/H} \times$$

$$\times \cos \mu_n \frac{y}{H} \quad (\text{A38.4})'$$

Presas en arco. A continuación nos referiremos al caso de una cortina cuyo paramento de aguas arriba es vertical, con traza de arco circular, cuando el vaso es finito, de longitud L . Supondremos el vaso limitado por laderas radiales y por un cilindro circular recto. Obtenemos la ecuación diferencial y las condiciones de frontera para la presión hidrodinámica por el mismo proceso de linealización que para el caso de pantalla plana. Resulta así la ecuación diferencial de onda si se toma la función potencial de presiones $\sigma = p'$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - \frac{\gamma}{g E_v} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A39})$$

las condiciones de frontera resultan:

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \alpha \gamma_0 \cos \theta \text{sen } \omega t, \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)_{r=L} = 0 \quad (\text{A40})$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{r \partial \theta} \right)_{\theta=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma}{r \partial \theta} \right)_{\theta=\theta_a} =$$

$$= -\alpha \gamma_0 \text{sen } \theta_a \text{sen } \omega t \quad (\text{A41})$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + g \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)_{z=H} = 0 \quad (\text{A42})$$

donde σ es el potencial de presiones; r, θ, z son coordenadas cilíndricas (z la vertical); θ_a es el ángulo central máximo descrito por el arco de la cortina a partir del eje de simetría, r_0 es el radio del paramento mojado. Definimos el movimiento armónico de la cortina mediante la ley de desplazamientos longitudinales $(\alpha g/\omega^2) \text{sen } \omega t$.

Para determinar la solución hagamos

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) \alpha \gamma_0 \text{sen } \omega t \quad (\text{A43})$$

donde σ_1 toma en cuenta el movimiento de la cortina y σ_2 el de las laderas¹⁷

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos k_n \frac{z}{H}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos k_n \frac{z}{H} \quad (\text{A44})$$

y k_n son las raíces de

$$k_n \tan k_n = -\frac{\omega^2 H}{g} = -\frac{\alpha H}{A_0} \quad (\text{A45})$$

Además,

$$q_n(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} Q_{j_{mn}} \left(\gamma_n \frac{r}{r_0} \right) \cos j_{mn} \theta \quad (\text{A46})$$

$$S_n(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} R_{l_{mn}} \left(\gamma_n \frac{r}{r_0} \right) \cos l_{mn} \theta \quad (\text{A47})$$

$$\gamma_n = \frac{r_0}{H} \sqrt{\beta^2 - k_n^2} \quad (\text{A48})$$

β está dada por la ec. A29.3 y las j_{mn} y l_{mn} están determinadas por las condiciones:

$$\frac{\partial J_{j_{mn}}(\gamma_n)}{\partial r} \frac{\partial J_{-j_{mn}} \left(\gamma_n \frac{L}{r_0} \right)}{\partial r} -$$

$$\frac{\partial J_{l_{mn}} \left(\gamma_n \frac{L}{r_0} \right)}{\partial r} \frac{\partial J_{-l_{mn}}(\gamma_n)}{\partial r} = 0 \quad (\text{A49})$$

$$l_{mn} = \frac{m\pi}{\theta_a}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{A50})$$

Las funciones $Q_{j_{mn}}, R_{l_{mn}}$ son combinaciones lineales de funciones Bessel del orden correspondiente tales que sus derivadas se anulan para el valor $\gamma_n L/r_0$ del argumento. Obsérvese que en vista de la ec. A49 la derivada de $Q_{j_{mn}}$ también se anula para el valor de γ_n de su argumento.

Las constantes A_{mn} y B_{mn} están determinadas por las condiciones

$$\left(\frac{\partial q_n}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_a} = -d_n \frac{r}{r_0} \text{sen } \theta_a \quad (\text{A51})$$

$$\left(\frac{\partial S_n}{\partial r} \right)_{r=r_0} = d_n \cos \theta \quad (\text{A52})$$

donde d_n son los coeficientes de Fourier en el desarrollo

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos k_n \frac{z}{H} \quad (\text{A53})$$

Es importante notar²² que $Q_{j_{mn}}$ son ortogonales y además $\cos k_n z/H$ también lo son^{16, 22} al igual que $\cos l_{mn} \theta$.

Existe un segundo método de solución. En él, en lugar de llegar a las ecs. A49 se obtienen otras análogas en las cuales las derivadas de las funciones de Bessel aparecen reemplazadas por las funciones mismas, pero la solución no se interpreta físicamente como en el primer método. Probablemente la valuación de la presión dinámica, mediante el método desarrollado en los párrafos que anteceden, es más simple que a partir de las series a que llega Kotsubo¹⁷

Posteriormente demostraremos que se simplifica la solución del caso bidimensional para valores grandes $\alpha H/A_0$ debido a que podemos sustituir la condición de frontera de la ec. A42.2 por $(\partial \sigma / \partial z)_{z=H} = 0$ de donde resulta $k_n = \mu_n = (2n-1)\pi/2$ con lo cual, $d_n = 2(-1)^{n+1}/\mu_n$.

Consecuencias de la condición de frontera en la superficie libre. Cuando admitimos la condición de la ec. A22.2 la presión se expresa mediante la serie

$$\frac{p}{\alpha H} = -2\gamma_0 \frac{L}{H} \text{sen } \omega t \left\{ \frac{\bar{\alpha}_0}{\alpha K_0 \text{sen } K_0} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \cos K_0 \left(\frac{L-x}{L} \right) \cosh k_0 \frac{y}{H} + \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{\tilde{\alpha}_n}{k_n K_n \operatorname{sen} K_n} \times \\ & \times \cos K_n \left(\frac{L-x}{L} \right) \cos k_n \frac{y}{H} - \\ & - \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n}{k_n K_n \operatorname{senh} K_n} \times \\ & \times \cosh K_n \left(\frac{L-x}{L} \right) \cos k_n \frac{y}{H} \} \quad (A53.1) \end{aligned}$$

con $\Delta = 0$

donde

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{k_0 \operatorname{senh} k_0}{k_0 + \operatorname{senh} k_0 \cosh k_0}$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{k_n \operatorname{sen} k_n}{k_n + \operatorname{sen} k_n \cos k_n}$$

k_n y k_0 son las raíces de la ecuación trascendente $k_n \tan k_n = -\omega^2 H/g$. Este punto se discute en el siguiente párrafo. Además

$$K_0 = \frac{L}{H} \sqrt{\beta^2 + k_0^2}$$

$$K_n = \frac{L}{H} \sqrt{\beta^2 - k_n^2} \quad 1 < n \leq n_0 - 1$$

$$K_n = \frac{L}{H} \sqrt{k_n^2 - \beta^2} \quad n \geq n_0$$

$n_0 \geq 1$ es el mínimo valor entero que hace $k_n > \beta$. Si $n_0 = 1$ la primera serie desaparece.

La condición de Poisson que expresa la segunda de las ecs. A22 se verifica con todas las raíces k_n de la ecuación trascendente¹⁶

$$\begin{aligned} k_n \tan k_n &= -\frac{\omega^2 H}{g} = -\alpha \frac{H}{A_0} = \\ &= -\frac{(2\pi)^2}{gH} \left(\frac{H}{T} \right)^2 = -\frac{4.03}{H} \left(\frac{H}{T} \right)^2 \quad (A54.1) \end{aligned}$$

donde $\alpha = \omega^2 A_0/g$ es la amplitud de la aceleración que experimenta la base de la cortina, en términos de la aceleración de la gravedad, y A_0 es la amplitud del desplazamiento correspondiente.

Si $k_n = \mu_n = (2n-1)\pi/2$ la condición de frontera A22.2 equivale a la condición A26. Sustituyendo $k_n = \mu_n$ en la ec. A54.1 notamos que $\omega^2 H/g = \alpha H/A_0 = \infty$. Además, al hacer que k_n tienda a μ_n , el límite de $\alpha H/A_0$ resulta también infinito.

La ec. A54.1 tiene además de las raíces k_n la raíz compleja ik_0 que satisface la relación

$$k_0 \tanh k_0 = \frac{\omega^2 H}{g} = \alpha \frac{H}{A_0} \quad (A54.2)$$

y que, como señalamos antes, representa una condición de oscilación libre del oleaje en la superficie.

En lo que sigue estableceremos límites entre los que debe hallarse $\alpha H/A_0$, para que las soluciones que resulten de considerar u omitir el movimiento de la superficie libre del agua suministren un error pequeño en el cálculo del empuje total. Con este fin tomaremos $k_n = \mu_n + \epsilon_n$ en la ec. A54.1. Resulta así $(\mu_n + \epsilon_n) \cos \epsilon_n = \alpha H/A_0$.

Aceptaremos conservadoramente que ambas soluciones convergen para el término de orden s de las sumas. Podemos entonces limitar ϵ_s de tal forma que el error relativo que cometamos al sustituir la tangente por el ángulo resulte pequeño. Si decidimos que el error relativo no exceda 5 por ciento, $\epsilon_s \leq 0.4$, por lo que tendremos

$$\frac{\mu_n + \epsilon_n}{\epsilon_n} = \alpha \frac{H}{A_0} \quad \text{si } n \leq s \quad (A54.3)$$

De esta manera, para $s = 10$ por ejemplo, resulta

$$\frac{\mu_s + \epsilon_s}{\epsilon_s} = \frac{(2 \times 10 - 1) (\pi/2) + 0.4}{0.4} \approx 76$$

de donde $\alpha H/A_0 > 76$.

Con esto, $k_n \leq \mu_n + 0.4$ si $n \leq 10$. Este valor de s es, en general, un límite superior para todas las presiones calculadas que aquí se citan.

Comparando las series de las ecs. A53.1 y A38.1 para $\Delta = 0$ y de comparar los dos primeros términos concluimos que, si $\epsilon_s \leq 0.4$, el error relativo en el cálculo del empuje hidrodinámico es menor que el error que introduce tomar la tangente por el ángulo, error que vale 5 por ciento.

En vista de que $\alpha H/A_0 = (4.03/H) (H/T)^2$, aun para valores muy elevados de la altura de la presa (digamos hasta para $H = 400$ m), $\alpha H/A_0$ será mayor que 76 cuando H/T exceda 87 m/seg. Por tanto, si el error relativo no ha de exceder 5 por ciento en el cálculo del empuje hidrodinámico se requeriría que las series de las ecs. A38.1 y A53.1 fueran de convergencia extraordinariamente lenta como para necesitar más de 10 términos del desarrollo. Pero los cálculos realizados hacen concluir que en la primera de estas series basta con tomar menos de 10 términos y que la segunda serie es más rápidamente convergente que la primera.

En atención a las consideraciones que anteceden y a que el efecto de la compresibilidad del líquido es insignificante para relaciones H/T menores que 100 m/seg, en el análisis que sigue, cuyo objeto es acotar el error relativo que introduce el tomar la condición de frontera de la ec. A26 en lugar de la que contiene la (A22), compararemos ambas series entre sí despreciando los

efectos de la compresibilidad del agua. Tomaremos el movimiento de la cortina como de traslación y admitiremos una longitud finita del vaso.

Sean

$$\bar{q} = \frac{\bar{Q}}{\alpha H^2 \gamma_0}, \quad \bar{q} = \frac{\bar{Q}}{\alpha H^2 \gamma_0}$$

donde \bar{Q} y \bar{Q} representan los empujes hidrodinámicos para un líquido incompresible; el primero corresponde a nivel fijo de la superficie libre y el segundo toma en cuenta el oleaje. Entonces, para un mismo instante

$$\bar{q} = \sum_{n=1}^s \frac{2 \tanh \mu_n L/H}{\mu_n^3} \quad (\text{A55.1})$$

$$\bar{q} = \sum_{n=1}^s \frac{2 \operatorname{sen}^2 k_n \tanh k_n L/H}{k_n^2 (k_n + \operatorname{sen} k_n \cos k_n)} \quad (\text{A55.2})$$

De estas dos series concluimos que $\bar{q} < \bar{q}$ por ser cada término de la ec. A55.1 mayor que el correspondiente de la (A55.2).

En los casos calculados en que empleamos la ec. A38.2, que corresponde a líquido compresible, necesitamos menos de 10 términos para lograr la convergencia de la serie. Con el objeto de estimar el número de términos requeridos en el caso de líquido incompresible acudiremos a la ec. A55.1 y fijaremos arbitrariamente $L/H > 2$. Con esto tendremos $\tanh \mu_n L/H \cong 1$ y

$$\bar{q} = \sum_{n=1}^s \frac{2}{\mu_n^3} = \frac{2^4}{\pi^3} \sum_{n=1}^s \frac{1}{(2n-1)^3}$$

Dado que $2^4/\pi^3 \cong 0.516$, tendremos

$$\bar{q} \cong 0.516 \left(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{2197} + \dots \right)$$

Tomando 7 términos obtenemos $\bar{q} = 1.050520$ contra el valor exacto de la serie, 1.0518000. El error relativo proveniente de omitir los términos de orden superior al séptimo vale, por tanto, 0.12 por ciento.

La serie de \bar{q} es más rápidamente convergente que ésta. Por ende el error que introducimos al cortarla en el séptimo término es menor que 0.12 por ciento. Al sustituir $\tan \epsilon_n$ por ϵ_n introducimos un error de 5 por ciento. Por consiguiente, al tomar sólo 7 términos de la serie y a la vez sustituir $\tan \epsilon_n$ por ϵ_n introduciremos un error que, cabe suponer, tampoco excederá 5 por ciento. Ahora bien, de la relación $(\mu_s + \epsilon_s)/\epsilon_s = \alpha H/A_0$ con $\epsilon_s = 0.4$ y $s = 7$, tendremos $\alpha H/A_0 > 60$. Con satisfacer esta condición estaremos asegurando que el error relativo en el cálculo de \bar{Q} no excederá 5 por ciento. Esta condición es

$$\alpha \frac{H}{A_0} = \frac{4.03}{H} \left(\frac{H}{T} \right)^2 > 60$$

de donde,

$$\frac{H}{T} > 4.2 \sqrt{H}$$

Cuando $\epsilon_s = 0.76$, el error relativo que cometemos al tomar el ángulo por la tangente es del orden de 20 por ciento. Para errores limitados a este valor encontramos $H/T > 2.6 \sqrt{H}$.

Frecuencias críticas. Cuando adoptamos la condición de Poisson en la frontera libre del líquido las raíces k_n satisfacen la ec. A54.1 y la expresión para A_n (ec. A5) difiere de la ec. A30.2. No obstante, en el denominador sigue apareciendo el factor $\operatorname{sen} \lambda_n$. Por tanto las frecuencias críticas, que corresponden a la condición $A_n = \infty$, se presentan cuando $\operatorname{sen} \lambda_n = 0$. Ello da lugar a la expresión

$$\frac{H}{T} = 2 \left(\frac{a}{4} \right) \frac{H}{L} \sqrt{m^2 + \left(\frac{k_n}{\pi} \right)^2 \left(\frac{L}{H} \right)^2},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A56.1})$$

para definir los valores críticos de H/T .

Esta expresión resulta independiente de la elástica de la cortina.

En la ecuación que antecede, a es la velocidad del sonido en el líquido. Para el agua, $a/4 = 359.6114$ m/seg. Así, para $m = 0$ y dado que k_n son las raíces de A54.1, empleando la ec. A56.1 obtenemos

$$k_n \tan k_n = - \frac{4.03 \left(\frac{a}{4} \right)^2}{H} \frac{k_n}{\pi}$$

de donde, sustituyendo el valor de a ,

$$\tan k_n = - \frac{663,563}{H}$$

Por tanto, $k_1 \cong \pi/2$, $k_2 \cong 3\pi/2$, $k_3 \cong 5\pi/2, \dots$:

$$k_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} + \epsilon_n = \mu_n + \epsilon_n$$

Al sustituir en la ecuación anterior nos da

$$\cot \epsilon_n = \frac{663,563}{H} \quad (\text{A56.2})$$

de donde $\epsilon_1 = H/663563$, que es despreciable al lado de μ_1 , y lo mismo ocurre para ϵ_n en comparación con μ_n . Podemos, pues, escribir con suficiente precisión

$$\frac{H}{T} = 2 \left(\frac{a}{4} \right) \frac{H}{L} \sqrt{m^2 + \frac{(2n-1)^2}{4} \left(\frac{H}{L} \right)^2} \quad (\text{A56.3})$$

definiéndose así las resonancias por ondas de expansión (o compresión) en un vaso rectangular; sea cual fuere la condición de frontera en la superficie libre del líquido y en las paredes verticales, de acuerdo con la teoría lineal empleada en el caso bidimensional.

