

Modelos dinámicos para materiales y estructuras del tipo Masing

Ismael HERRERA *

Introducción

Masing¹ ha propuesto para algunos materiales histeréticos, una regla que relaciona las curvas $P - \epsilon$ (P = esfuerzo, ϵ = deformación) para descarga y recarga con las curvas de primera carga. Esta regla ha sido estudiada recientemente por Housner y Jennings^{2,3}.

La característica esencial de este tipo de comportamiento es que las ramas de cualquier ciclo histerético reproducen la forma del "esqueleto" pero doblan su tamaño. Aquí, la palabra esqueleto denota la curva de primera carga. Por lo mismo, para obtener las ramas de los ciclos histeréticos, el tamaño del esqueleto tiene que duplicarse, y esto parece difícil de justificarse a priori.

En este artículo se presenta una clase de modelos dinámicos para materiales y estructuras del tipo de Masing, y se demuestra que a cada estructura o material que tiene este tipo de comportamiento, le corresponde un modelo y sólo uno de la clase que se presenta.

Ya que las reglas de Masing son puramente empíricas, la exhibición de tales modelos es útil porque da una idea del tipo de procesos físicos que pueden originar esta clase de comportamiento. Esto, naturalmente, da una base para predecir en qué clase de materiales y estructuras puede esperarse un comportamiento del tipo de Masing.

En lo que sigue, para abreviar, hablaremos indistintamente de estructuras o de materiales, pero debe entenderse que nos referimos a ambos.

Estructuras del tipo de Masing

Para poder describir el comportamiento de las estructuras de Masing, es conveniente introducir algunas definiciones.

Sea

$$\epsilon = M(P)$$

la ecuación del esqueleto, es decir, la ecuación de la curva de primera carga. Se supondrá en lo que sigue, que la curva de primera carga tiene la misma forma para cargas positivas y negativas; es decir, $M(P)$ es una función antisimétrica de P . Definimos ahora la historia de la estructura o material para cada instante t , como la trayectoria descrita por la estructura en el plano carga-deformación, desde que partió del estado no perturbado (origen del plano), hasta el instante dado.

* Asesor del Instituto de Ingeniería e Investigador Titular del Instituto de Geofísica.

La historia reducida de la estructura es la trayectoria descrita por la estructura en el plano carga-deformación, desde la última vez en que soportó carga máxima (en valor absoluto) hasta el instante dado, y en la cual se han eliminado todos los ciclos cerrados (fig. 1). Conviene observar que de acuerdo con esta definición, la historia reducida consta de un solo punto siempre que la carga sea máxima, independientemente de lo complicado que hayan podido ser los ciclos de carga hasta el instante dado.

Postulamos ahora que los materiales y estructuras del tipo de Masing obedecen las dos reglas siguientes:

I. Si la historia reducida de la estructura consta de un solo punto, éste está en el esqueleto.

II. La carga P y deformación ϵ satisfacen la relación

$$\frac{\epsilon - \epsilon'}{2} = M\left(\frac{P - P'}{2}\right)$$

donde ϵ' , P' son la deformación y la carga del estado donde ocurrió el último cambio del sentido de carga, en la historia reducida del material.

No es difícil comprobar que estas dos reglas bastan para obtener la deformación como función del tiempo, cuando se conocen la carga como función del tiempo y la ecuación del esqueleto. Además, los resultados que se obtienen son casi idénticos a los obtenidos usando las reglas dadas por Jennings³, aunque hay algunas diferencias para variaciones complicadas de la carga. Los modelos que se presentan aquí, parecen indicar que las dos reglas anteriores deben preferirse en tales casos.

Materiales elastoplásticos

Los materiales más simples del tipo de Masing son los materiales elastoplásticos (fig. 2a). Las ideas básicas que se usarán en la construcción de los modelos en el caso general, pueden entenderse mejor estudiando en primer término el caso elastoplástico.

En el primer ciclo de carga la deformación en estos materiales es proporcional al esfuerzo hasta cierta carga máxima P_0 , después de la cual se incrementa la deformación indefinidamente a carga constante. En descarga también se comportan elásticamente hasta la carga $-P_0$.

Fácilmente se ve que un modelo para estos materiales (fig. 2b) es un resorte sin masa con

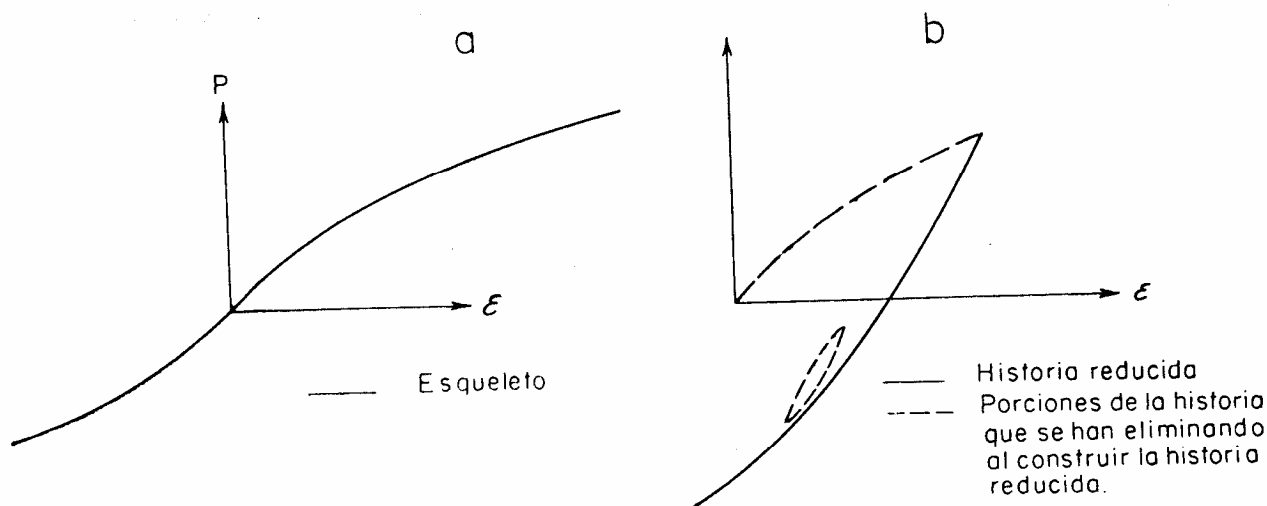


FIGURA 1

una partícula con masa concentrada sujeta en el extremo. La partícula descansa sobre una superficie rugosa y por lo mismo, la fuerza producida por la fricción se opondrá al movimiento de la partícula. Si el peso de la partícula es tal que la fuerza de fricción máxima entre la partícula y la superficie rugosa es P_0 , entonces el desplazamiento producido por una fuerza P aplicada en el extremo libre del resorte será proporcional a P , cuando $-P_0 \leq P \leq P_0$ porque la partícula se mantendrá en reposo. Pero basta elevar P ligeramente por encima de P_0 para producir una deformación tan grande como se desee. Si la carga P se reduce nuevamente por debajo de P_0 , la partícula se mantendrá nuevamente en reposo, pero en el resorte se producirá una deformación proporcional a $P - P_0$. Si la carga P se reduce aún más el comportamiento lineal continuará hasta

que P sea igual a $-P_0$ (i.e. $P - P_0 = 2P_0$), cuando nuevamente la deformación aumentará sin necesidad de reducir más la carga.

De manera semejante, para un material bilineal (fig. 3) un modelo adecuado sería una partícula sujeta a dos resortes sin masa, uno con un extremo empotrado en una pared y el otro con un extremo libre. Repitiendo los razonamientos anteriores se ve que los desplazamientos en el extremo libre del resorte, producidos por variaciones arbitrarias de carga, son los mismos que se producen en un material bilineal que obedece las dos reglas básicas dadas anteriormente.

Los materiales y estructuras del tipo de Masing en general, pueden considerarse como una generalización de los materiales elastoplásticos y bilineales, y los modelos correspondientes pueden construirse generalizando los modelos anteriores.

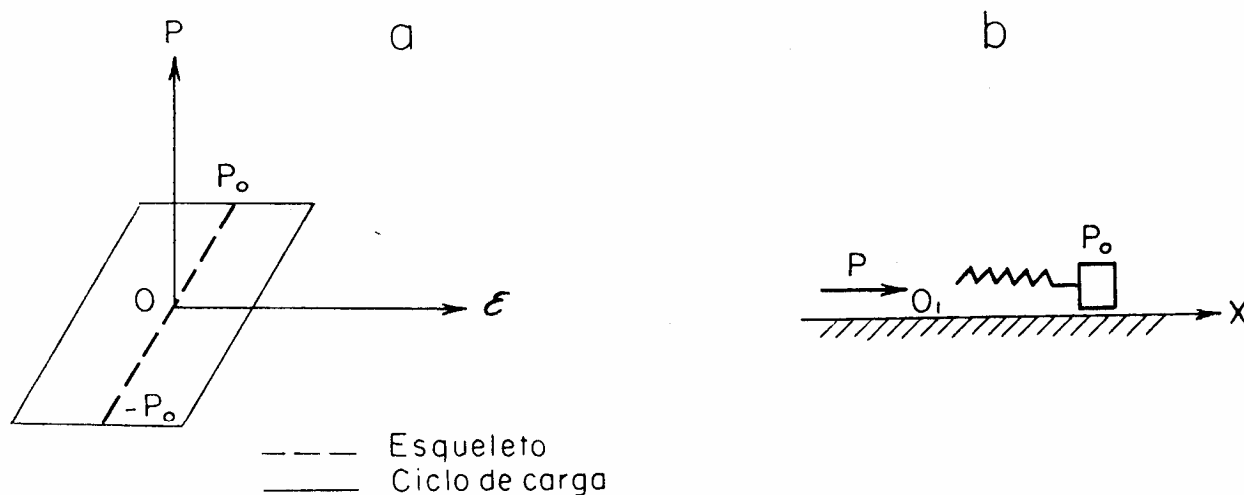


FIGURA 2

Una clase de estructuras no lineales

En esta sección vamos a introducir una clase de estructuras que forman la base de los modelos que discutiremos posteriormente.

Consideremos una barra elástica seminfinita (fig. 4) que obedece la Ley de Hooke, cuyo módulo de elasticidad es unitario, su densidad $\rho(x)$ variable, y su sección transversal unitaria. Supondremos que esta barra descansa en una superficie rugosa con coeficiente de fricción unidad. Se puede ver que la generalidad del modelo no se aumenta si se permite que el módulo de

x finita. Sin embargo, la definición de $W(x)$ garantiza que es una función monótona no decreciente de x , y que es continua por la derecha, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} W(x) = W(x_0) \quad (1)$$

El esqueleto

La curva que se obtiene en el plano esfuerzo-deformación, aumentando desde cero la carga que actúa en la estructura se llama esqueleto. En esta sección calcularemos la ecuación del esqueleto para nuestros modelos.

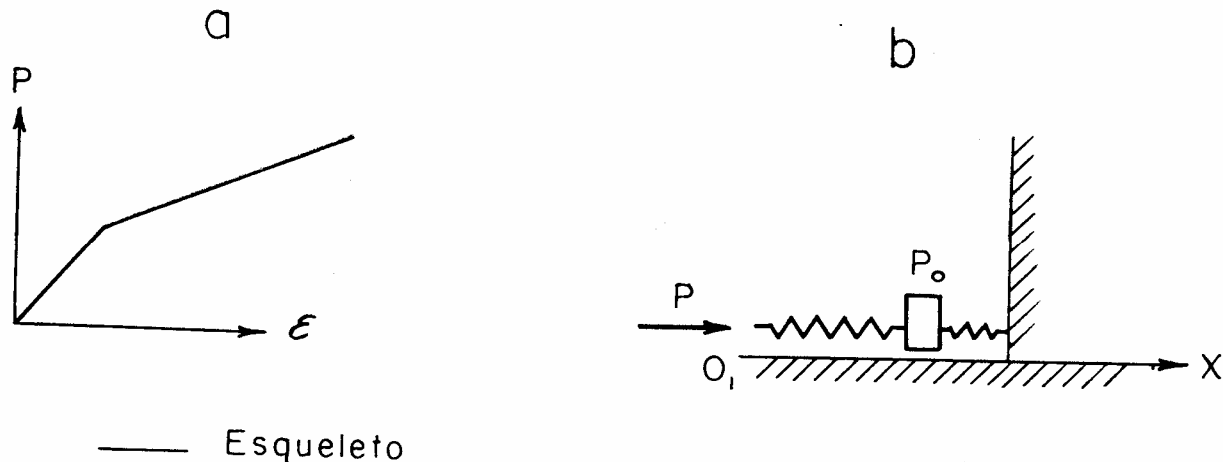


FIGURA 3

elasticidad o el coeficiente de fricción sean distintos de la unidad.

Sea $W(x)$ el peso total de la parte de la barra que está en el punto x o a la izquierda de él. El hecho de que en la definición de $W(x)$ incluyamos al punto x tiene importancia, porque en la discusión admitiremos pesos concentrados en un punto. Esto implica, desde luego, que $W(x)$ será discontinua en tales puntos. Además, para que en nuestros modelos haya el equivalente de paredes inmóviles bajo la acción de cualquier carga, es necesario que admitamos la posibilidad de que la barra tenga en algún punto un peso concentrado de magnitud infinita. Nuevamente, esto implica que en algunos casos $W(x) = +\infty$ para

Cuando se aplica una fuerza P al extremo libre de la barra que se muestra en la fig. 4, se produce un desplazamiento en ese mismo extremo que llamaremos ϵ . Sea $u(x)$ el desplazamiento de la sección de la barra que se encontraba inicialmente en el punto x y $\sigma(x)$ el esfuerzo en la misma sección. Obsérvese que

$$u(0) = \epsilon.$$

Ya que el comportamiento de la barra es elástico lineal con módulo de elasticidad 1,

$$\frac{du}{dx} = -\sigma$$

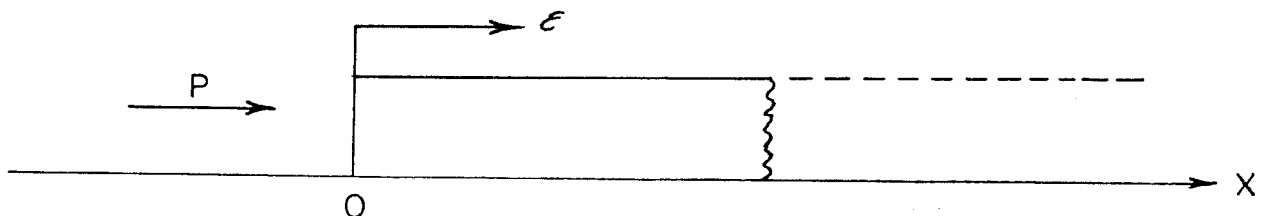


FIGURA 4

para dos puntos cualesquiera $x_0 < x_1$ se tendrá

$$u(x_0) = u(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \sigma(x) dx \quad (2)$$

donde la convención del signo para σ está determinada por el hecho de que σ es positiva cuando hay compresión. Si $x_1 = L$ es un punto para el cual el desplazamiento $u(L)$ se anula, y en la ec. 2 se toma $x_0 = 0$, entonces

$$\varepsilon = \int_0^L \sigma(x) dx \quad (3)$$

Si empezamos a aumentar P desde cero, la fricción entre la barra y la superficie se opondrá al movimiento y debido a las condiciones de equilibrio tendremos

$$\sigma(x) = P - W(x) \quad \text{si } 0 \leq W(x) \leq P \quad (4.a)$$

$$\sigma(x) = 0 \quad \text{si } W(x) \geq P \quad (4.b)$$

Si $x = L$ es el primer punto donde $W(x) \geq P$, el esfuerzo a la derecha de L se anulará y por lo mismo

$$u(L) = 0$$

Substituyendo (4.a) en la ec. 3 e integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_0^L \{P - W(x)\} dx = L \{P - W(L-)\} + \\ &+ \int_0^{W(L-)} x dW = \int_0^P x dW \end{aligned} \quad (5)$$

Obsérvese que en la ec. 5, x debe interpretarse como una función de W que está determinada por la distribución de masa en la barra. Si

$$\varepsilon = M(P)$$

es la ecuación del esqueleto, entonces cuando la distribución de masa en la barra se conoce (y por lo mismo la función $x(W)$), la función M está dada en vista de la ec. 5, por

$$M(P) = \int_0^P x dW \quad (6)$$

La ec. 6 se puede interpretar diciendo que la función M es el momento estático con respecto al origen de la porción frontal de la barra cuyo peso es P .

La correspondencia biunívoca entre modelos y esqueletos

Como se mencionó antes cada modelo define una función $x(W)$ y en vista de la (6), un esqueleto.

Podemos preguntarnos si, inversamente, a cada esqueleto le corresponde un modelo y solo uno.

Además, de ser así, desearíamos dar una regla que nos permitiera construir el modelo cuando se conoce el esqueleto.

Conocer el esqueleto es equivalente a conocer la función $M(P)$, de manera que la ec. 6 da la solución del problema propuesto de una manera muy sencilla, porque basta tomar la derivada con respecto a P en ambos miembros para obtener

$$x(P) = \frac{dM}{dP} = M'(P) \quad (7)$$

donde la prima se usa para indicar la derivada. Esta ecuación nos indica que el único modelo del tipo considerado que da lugar al esqueleto dado, debe construirse distribuyendo el peso de la barra de tal manera que la sección para la cual el peso de la porción de la barra que se encuentra a su izquierda es P , se encuentre a una distancia del origen igual a la pendiente del esqueleto con respecto al eje de los esfuerzos en el punto P .

Ya que $x(P)$ es necesariamente una función monótona no decreciente, la ec. 7 nos indica que la pendiente del esqueleto con respecto al eje de las cargas debe ser también una función monótona no decreciente.

Por lo mismo, para que el esqueleto dado corresponda a alguno de los modelos considerados, el esqueleto debe ser originado por un material que se ablande con la carga. Para remover esta restricción sería necesario considerar modelos con coeficiente negativo de fricción en algunas regiones. Sin embargo, para evitar complicaciones, restringiremos el análisis a materiales que se ablandan con la carga.

Ejemplos—Para ilustrar los resultados obtenidos hasta ahora damos en esta sección algunos ejemplos:

a) Si el esqueleto corresponde a una estructura lineal

$$x(P) = \frac{dM}{dP} = k \quad (8)$$

donde k es una constante. La ec. 8 nos dice que la distancia al origen de una sección para la cual el peso de la porción de la barra que se encuentra a su izquierda es P , debe ser la constante k para toda P . La única forma de satisfacer esta condición es construyendo la porción de la barra que se encuentra a la izquierda del punto $x = k$, desprovista de peso y tomando una carga concentrada de magnitud infinita en el punto $x = k$. Es decir, la estructura corresponde a un resorte desprovisto de peso de longitud k y sujeto a una pared (fig. 5).

b) El modelo presentado previamente para una estructura bilineal (fig. 3) es un caso particular de los modelos que estamos discutiendo. En este caso

$$x(W) = \frac{dM}{dP} = k_1 \quad \text{si } 0 \leq W \leq P_0$$

$$x(W) = \frac{dM}{dP} = k_2 \quad \text{si } P_0 < W < \infty.$$

c) Si la estructura es elastoplástica

$$x(W) = k \quad \text{si } 0 \leq W < P_0 \quad (9.a)$$

$$x(W) = \infty \quad \text{si } P_0 < W < \infty. \quad (9.b)$$

La ec. 9.b nos dice que si $W > P_0$ no existe sección finita para la cual el peso de la porción de la barra que se extiende a su izquierda es W . Con esta interpretación las ecs. 9 implican que el único modelo posible es el ilustrado en la fig. 2 que fue discutido con anterioridad.

d) Rosenblueth y Herrera⁴ han demostrado que si para un material histerético del tipo de Masing, el coeficiente equivalente de amortiguamiento se define convenientemente, entonces cualquier material para el cual dicho coeficiente es independiente de la frecuencia y de la amplitud necesariamente da lugar a un esqueleto de la forma

$$M(P) = AP^k$$

donde $1 \geq k > 0$.

En este caso

$$x(P) = M'(P) = AkP^{k-1}$$

es decir

$$W = \left(\frac{x}{Ak} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Sea ρ el peso por unidad de longitud, entonces

$$\rho = \frac{dP}{dx} = \frac{1}{Ak(k-1)} \left(\frac{x}{Ak} \right)^{\frac{2-k}{k-1}}$$

Obsérvese que para los modelos considerados la rigidez instantánea es

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{1}{M'(P)} = \frac{1}{x}$$

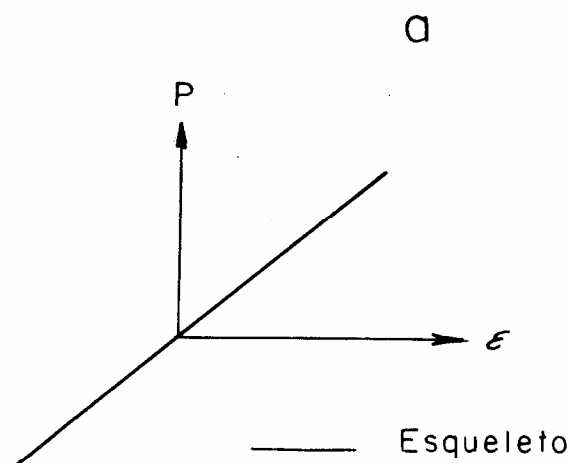
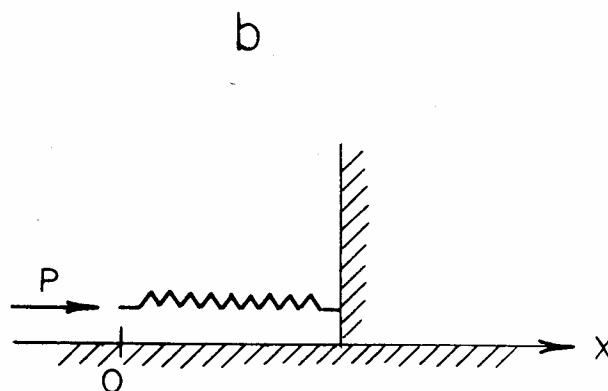


FIGURA 5



y por lo mismo si la rigidez inicial es infinita

$$\lim_{W \rightarrow 0} x = 0$$

e inversamente si la rigidez inicial es finita

$$\lim_{W \rightarrow 0} x \neq 0$$

es decir, la rigidez inicial es finita si, y solo si, hay un resorte de longitud finita en la porción frontal de la barra.

Ciclos de carga

En esta sección demostraremos que las estructuras de la clase definida previamente, son del tipo de Masing. Mas precisamente, demostraremos que, obedecen las reglas I y II introducidas previamente.

En lo que sigue es conveniente usar el peso W como parámetro para designar los puntos de la barra. La posición x de cualquier punto está dada en términos de W por la ec. 7

$$x = M'(W)$$

Apliquemos al modelo, que en su estado inicial no ha sido perturbado, la fuerza P_0 . De acuerdo con las ecs. 4 la distribución $\sigma_0(W)$ en la barra será

$$\sigma_0(W) = P_0 - W; \quad \text{si } 0 \leq W \leq P_0 \quad (10.a)$$

$$\sigma_0(W) = 0; \quad \text{si } W \geq P_0 \quad (10.b)$$

Si ahora el modelo se descarga hasta $P_1 > -P_0$, en cierta parte de la barra la fricción cambiará de sentido y ahí

$$\sigma_1(W) = P_1 + W; \quad 0 \leq W \leq W_a \quad (11.a)$$

donde σ_1 es la nueva distribución de esfuerzos y $x(W_a)$ el último punto de la barra para el cual hay cambio en la distribución de esfuerzos. Por lo mismo,

$$\sigma_1(W) = \sigma_0(W); \quad \text{si } W \geq W_a \quad (11.b)$$

En vista de la ec. 11.b, W_a puede obtenerse igualando (10.a) con (11.a), lo que da

$$W_a = \frac{P_0 - P_1}{2} \quad (12)$$

Por otra parte la (3) se reduce a

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \int_0^L \sigma_1 dx = \int_0^L \sigma_0 dx - \int_0^L (\sigma_0 - \sigma_1) dx = \\ &= \varepsilon_0 - 2 \int_0^{x(W_a)} \left(\frac{P_0 - P_1}{2} - W \right) dx \end{aligned}$$

Ya que

$$W_a = \frac{P_0 - P_1}{2}$$

las ecs. 5 y 6 implican

$$\int_0^{x(W_a)} \left(\frac{P_0 - P_1}{2} - W \right) dx = M \left(\frac{P_0 - P_1}{2} \right)$$

y por lo mismo

$$\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2} = M \left(\frac{P_0 - P_1}{2} \right) \quad (13)$$

La ec. 13 tiene la interpretación de que en el ciclo de descarga la forma del esqueleto se repite pero duplica su tamaño.

Pasaremos ahora a demostrar las dos reglas mencionadas anteriormente, que gobiernan a los materiales del tipo de Masing. Para probar la primera, observamos que si P_0 es la fuerza más grande en valor absoluto que el modelo ha soportado hasta el instante dado, entonces el modelo necesariamente no ha sido perturbado en cualquier punto para el cual

$$W > P_0$$

y por lo mismo

$$\sigma(W) = 0, \quad \text{si } W \geq P_0 \quad (14.a)$$

Se puede ver por inducción que en general después de que haya ocurrido un número finito de ciclos de carga, $\sigma(W)$ será siempre de tal naturaleza que el intervalo de la barra $0 \leq W \leq P_0$ podrá descomponerse en un número finito de subintervalos tales que $d\sigma/dW = 1$ o $d\sigma/dW = -1$ en cada uno de ellos. Cuando la carga P_0 (que supondremos sin pérdida de generalidad, positiva) que actúa en el modelo es la máxima que ha actuado hasta el instante dado, la única posibilidad compatible con las condiciones de equilibrio es

$$\sigma(W) = P_0 - W, \quad \text{si } 0 \leq W \leq P_0 \quad (14.b)$$

La deformación ε queda determinada sin ambigüedad por la distribución de esfuerzos $\sigma(W)$, por lo que el punto (ε_0, P_0) necesariamente es un punto del esqueleto, ya que la distribución de esfuerzos dada por la (14) es la misma que la obtenida en primera carga. Con esto queda probada la regla I.

Probaremos ahora la regla II. Sea P_0 la carga de mayor magnitud que ha actuado hasta el instante dado (si el modelo hubiere soportado la carga P_0 en más de una ocasión nos referiremos a la última ocasión). Sean $P_1, \dots, P_{n-1}$ las cargas para las cuales ha habido cambio en el sentido de carga después de que la carga máxima ocurrió y sea P_n la carga en el instante dado. Sin pérdida de generalidad, supondremos $P_0 > 0$. La regla II la probaremos primero para el caso en que

$$P_0 > P_2 > P_4 > \dots > P_n > \dots > P_3 > P_1 \quad (15)$$

De acuerdo con la ec. 14 la distribución de esfuerzos era

$$\sigma_0(W) = P_0 - W; \quad \text{si } 0 \leq W \leq P_0$$

$$\sigma_0(W) = 0; \quad \text{si } W \geq P_0$$

cundo la carga P_0 estaba actuando. Posteriormente la carga se redujo a P_1 , donde $|P_1| < P_0$, dando lugar a un cambio en el sentido de la fricción en la parte anterior de la barra. La nueva distribución de esfuerzos, por lo mismo, fue

$$\sigma_1(W) = P_1 + W, \quad \text{si } 0 \leq W \leq \frac{P_0 - P_1}{2}$$

$$\sigma_1(W) = \sigma_0(W), \quad \text{si } W \geq \frac{P_0 - P_1}{2}$$

Por inducción se puede probar que para cada $k > 0$

$$\sigma_k(W) = P_k \pm W \quad \text{si } 0 \leq W \leq \frac{|P_k - P_{k-1}|}{2} \quad (16.a)$$

$$\sigma_k(W) = \sigma_{k-1}(W) \quad \text{si } W \geq \frac{|P_k - P_{k-1}|}{2} \quad (16.b)$$

donde el signo positivo se debe tomar si $P_{k-1} > P_k$ y el negativo en caso contrario. Un argumento completamente análogo al usado para obtener la ec. 13, nos permite escribir ahora

$$\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{2} = M \left(\frac{P_n - P_{n-1}}{2} \right)$$

Esto completa la demostración de la regla II en el caso en que las cargas $P_0, P_1, \dots, P_n$ obedezcan la ec. 15, ya que en este caso no hay ciclos en la historia del material y por lo mismo la historia reducida es la misma que la historia contada a partir del instante en que se alcanzó la magnitud máxima de carga.

Consideremos ahora el primer ciclo de carga en que la hipótesis 15 se viola.

Supondremos que

$$P_n > P_{n-1} \quad (17)$$

con lo que no perderemos generalidad, porque el argumento que vamos a presentar puede aplicarse, con ligeras modificaciones, también al caso en que el período de carga es uno de descarga. En vista de la ec. 17, la hipótesis 15 se violará por primera vez cuando

$$P_{n-2} = P_n > P_{n-1}$$

Ya que nos encontramos en un período de carga,

$$\sigma_n(W) = P_n - W = P_{n-2} - W;$$

si

$$0 \leq W \leq \frac{P_n - P_{n-1}}{2} = \frac{P_{n-2} - P_{n-1}}{2}$$

$$\sigma_n(W) = \sigma_{n-1}(W);$$

si

$$W > \frac{P_n - P_{n-1}}{2} = \frac{P_{n-2} - P_{n-1}}{2}$$

en vista de la (16). Por otra parte

$$\sigma_{n-1}(W) = P_{n-1} + W; \text{ si } 0 \leq W \leq \frac{P_{n-2} - P_{n-1}}{2}$$

$$\sigma_{n-1}(W) = \sigma_{n-2}(W); \text{ si } W \geq \frac{P_{n-2} - P_{n-1}}{2}$$

por lo que

$$\sigma_n(W) = P_{n-2} - W; \text{ si } 0 \leq W \leq \frac{P_{n-2} - P_{n-1}}{2} \quad (18.a)$$

$$\sigma_n(W) = \sigma_{n-2}(W); \text{ si } W \geq \frac{P_{n-2} - P_{n-1}}{2} \quad (18.b)$$

Necesariamente $n > 2$ porque si $n = 2$, entonces $P_2 = P_0$ y por lo mismo P_2 es un máximo en la carga, caso que ya se discutió. El proceso

de P_{n-3} a P_{n-2} fue necesariamente de carga porque $P_n > P_{n-1}$ y por lo mismo $P_{n-2} > P_{n-3}$. De lo anterior se sigue que

$$\sigma_{n-2}(W) = P_{n-2} - W; \text{ si } 0 \leq W \leq \frac{P_{n-2} - P_{n-3}}{2} \quad (19)$$

Por otra parte, el instante dado es el primero para el cual la ec. 15 se viola, de manera que

$$\frac{|P_{n-1} - P_{n-2}|}{2} < \frac{|P_{n-2} - P_{n-3}|}{2}$$

De las ecs. 18, 19 y 20 se deduce que

$$\sigma_n(W) = \sigma_{n-2}(W); \quad 0 \leq W < \infty \quad (21)$$

Esto significa que la distribución de esfuerzos en el modelo es la misma que cuando la carga era P_{n-2} y por lo mismo

$$\epsilon_{n-2} = \epsilon_n.$$

Los puntos P_{n-2}, P_{n-1}, P_n forman un ciclo cerrado en la historia del material y debe ser eliminado cuando se construye la historia reducida. Una vez que se elimina este ciclo, los puntos $P_0, P_1, \dots, P_{n-3}, P_n$ satisfacen la hipótesis 15 nuevamente, y por lo mismo se concluye que los puntos en los cuales hay cambio en el sentido de carga en la historia reducida siempre la satisfacen. La ec. 21 implica por otra parte que para determinar el estado de esfuerzos $\sigma(W)$ en la barra se pueden eliminar los ciclos cerrados que hayan ocurrido, es decir, que basta considerar la historia reducida. Como la historia reducida siempre satisface la hipótesis 15, y la regla II ya se probó en ese caso, este argumento la prueba en general.

Conclusiones

Se ha construido una clase amplia de modelos con comportamiento histerético del tipo de Masing. Se ha probado que a cada material o estructura con este tipo de comportamiento, se le puede asociar un modelo y solo uno de la clase considerada, habiéndose dado una regla simple para construir la correspondencia.

Los razonamientos anteriores indican también que cuando el comportamiento histerético se debe exclusivamente a fricción de Coulomb entre las partes constituyentes de un material o estructura, es plausible esperar que ellos se comporten de acuerdo con el criterio de Masing.

Es importante notar que el comportamiento del tipo Masing sólo puede esperarse cuando no hay deterioro en los materiales o estructuras.

Agradecimiento

El autor expresa su agradecimiento a Luis Esteve Maraboto por haber leído críticamente el manuscrito de este artículo.

Notación

- ϵ = deformación del extremo libre del modelo
- P = carga en el extremo libre del modelo
- $M(P)$ = función que especifica la forma del esqueleto
- ρ = peso por unidad de longitud del modelo
- x = distancia del punto dado del modelo al extremo libre
- $W(x)$ = peso de la porción del modelo que se extiende hasta la sección x
- $\sigma(x)$ = esfuerzo en la sección del modelo que estaba inicialmente en x
- L = posición de la sección del modelo para la cual $W(L) = P$

$$M' = \frac{dM}{dP}$$

P_0 = carga que en valor absoluto, es la mayor que el modelo ha soportado hasta el instante dado

$P_1, \dots, P_{n-1}$ = valores de las cargas en las que ha habido cambio en el sentido de carga

$\sigma_0, \dots, \sigma_n$ = distribuciones de esfuerzos correspondientes a las cargas $P_0, P_1, \dots, P_n$ respectivamente

$\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ = desplazamientos del extremo libre del modelo cuando las cargas son $P_0, \dots, P_n$ respectivamente.

Referencias

1. Tanabashi R., y Kaneta K., "On the relation between the restoring force characteristics of structures and the pattern of earthquake ground motion", *Proceedings of Japan National Symposium of Earthquake Engineering*, Tokyo, Japan, 1962.
2. Jennings, P. C., "Periodic response of a general yielding structure", *Journal ASCE*, 90, EM2. (abril 1964).
3. Jennings, P. C., "Response of simple yielding structures to earthquake excitation", Doctoral thesis, *Earthquake Eng. Res. Lab.*, Cal. Inst. of Technology. (junio 1963).
4. Rosenblueth E., y Herrera I., "On a Kind of hysteretic damping", *Journal ASCE*, 90, EM4. (agosto 1964).