Nota sobre la velocidad máxima del terreno durante un sismo

Ismael HERRERA, *Emilio* ROSENBLUETH *y Octavio* RASCON *

Una buena parte de las investigaciones recientes sobre temblores idealizados como procesos estocásticos utiliza la condición de que la esperanza de la aceleración del terreno en todo instante debe ser nula. Por definición, sin embargo, debería usarse la condición de que la velocidad final del movimiento sea nula. La diferencia entre ambas condiciones no se refleja en las respuestas de estructuras cuyos períodos naturales de vibración son cortos o moderados en relación con la duración del movimiento, pero sí afecta apreciablemente las respuestas de estructuras excepcionalmente flexibles, así como la velocidad máxima del terreno que corresponde a temblores de intensidad dada.

El objeto de la presente nota es explorar el efecto que el cambio en condición tiene en el último de los conceptos mencionados. Para ello se ha elegido un modelo sumamente simple: se idealizará el movimiento del terreno como un proceso semejante a un segmento de ruido blanco gaussiano estacionario, pero sujeto a la condición de que la suma de los pulsos sea nula.

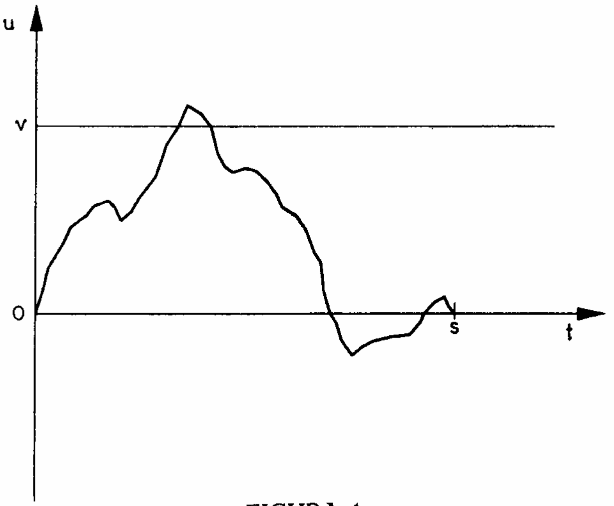

FIGURA 1

Planteamos primeramente el proceso como un paseo casual unidimensional. Se trata de una partícula que da 2 N pasos, N de ellos iguales a Δu y N iguales a $-\Delta u$. Se desea conocer la probabilidad de que la partícula cruce por lo menos una vez las fronteras absorbentes $\pm v$. Resuelto este problema llamaremos Δt al lapso transcurrido entre pasos consecutivos, $s = 2N\Delta t$ a la duración del movimiento y v a la velocidad máxima del terreno en valor numérico y haremos N tender a infinito, manteniendo finitos s y el cociente $(\Delta u)^2/\Delta t = 2k$. Aquí k tiene el sentido de una difusividad y mide la intensidad del movimiento por unidad de tiempo. Finalmente, usando el teorema del límite central, podremos asegurar que la solución que obtengamos será válida para toda distribución simétrica de Δu que satisfaga la condición de que $(\Delta u)^2/\Delta t$ es finito.

Consideremos primeramente la presencia de una sola frontera absorbente en v (fig. 1). La probabilidad de que una partícula que sale del punto $(u, t) = (0, 0)$ cruce al menos una vez la línea (v, t) y regrese a $(0, s)$ es igual a la probabilidad de que una partícula que sale de $(2v, 0)$ llegue a $(0, s)$. El número de trayectorias que satisfacen esta segunda condición vale

$$\binom{2N}{N+M} = \frac{(2N)!}{(N+M)!(N-M)!}$$

donde $M = v/\Delta u$. El número de posibles trayectorias de la partícula es

$$\binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N!)^2}$$

Por tanto,

$$Pr\ (\text{máx}\ u > v) = \frac{(2N)!/(N+M)!(N-M)!}{(2N)!/(N!)^2} \doteq e^{-v2/ks} \qquad (1)$$

(La aproximación asintónica de la ec. 1 se obtiene usando la aproximación de Stirling.)

Introduciremos la segunda barrera absorbente, en $u = -v$, de acuerdo con la consideración que sigue. Sea L_{mn} el número de trayectorias que, saliendo de $(mu, 0)$ y llegando a $(0, s)$ cruzan nu antes de cruzar $(m-1)u$, y sea Q_n el número de trayectorias que, saliendo de $(nu, 0)$ llegan a $(0, s)$. Entonces,

$$L_{01} = Q_2 - L_{23}$$
$$L_{23} = Q_4 - L_{45}$$
$$\cdots$$
$$L_{n,n+1} = Q_{n+2} - L_{n+2,n+3}$$

De aquí,

$$L_{01} = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} Q_{2n}$$

* Respectivamente investigador de los Institutos de Geofísica e Ingeniería, director y ayudante de investigador del Instituto de Ingeniería, UNAM.

y sustituyendo la ec. 1,

$$L_{01} = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} e^{-n^2v^2/ks}$$

así que

$$Pr(\max |u| > v) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} e^{-n^2v^2/ks} \qquad (2)$$

Dicho sea de paso que hubiéramos llegado a los mismos resultados si hubiéramos resuelto primeramente la ecuación de Fokker-Planck que corresponde al proceso en cuestión,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \frac{u}{2(s-t)} \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{1}{s-t} p$$

donde $p(u, t)$ es la densidad de probabilidades de u en el instante t. Las soluciones obtenidas corresponden a las condiciones de frontera $p(v, t) = 0$ y $p(v, t) = p(-v, t) = 0$ respectivamente, y ambas tienen por condición inicial $p(v, 0) = \delta(v)$, donde δ es la función delta de Dirac. Mediante la consideración de las trayectorias posibles hemos evitado pasar por la solución de esta ecuación.

La solución obtenida habrá de compararse con la que resulta de idealizar el movimiento como un segmento de ruido blanco en el que $E\,\Delta u = 0$.[1]

A partir de estas expresiones podemos obtener inmediatamente la esperanza de la velocidad máxima del terreno. De la ec. 2.

$$Ev = 1.386 \sqrt{ks} \qquad (3)$$

y de la ref. 1,

$$Ev = \sqrt{\pi k s} \qquad (4)$$

El cociente de ambas vale 0.782.

Utilizando métodos de Montecarlo para el caso estudiado en la ref. 1 se obtiene una esperanza ligeramente menor que la dada por la ec. 4, para un número reducido de pulsos.

Encontramos una primera aplicación de este resultado en la determinación de la esperanza de las ordenadas espectrales que corresponden a temblores intensos de larga duración registrados en el terreno duro. Estos movimientos pueden idealizarse satisfactoriamente como procesos gaussianos, resultado del filtro de ruido blanco[2, 3]. Las características del filtro deben variar en función de la distancia focal, y al hacer ésta tender a cero, el proceso debe aproximarse a un ruido blanco no filtrado, pero sujeto a la condición de velocidad final igual a cero. La esperanza de la seudovelocidad espectral que resulta de una perturbación que es un ruido blanco, cuya velocidad final no está especificada, vale $2.348\sqrt{ks}$. Por tanto, si el movimiento del terreno pudiera especificarse en esta forma en la proximidad del foco, tendríamos

$$lim_{R\to 0} \frac{EV}{Ev} = \frac{2.348}{\sqrt{\pi}} = 1.32$$

donde R es la distancia focal y V la seudovelocidad espectral. En cambio, con el modelo propuesto resulta este límite igual a 1.69. El resultado tiene importancia al establecer correlaciones de magnitud y distancia focal con las ordenadas espectrales que directamente se relacionan con diseño sísmico.

El modelo que se ha empleado en esta nota es objetable en cuanto a que postula un proceso que se comporta como si no sólo tuviese memoria sino pudiese predecir su propio comportamiento. En principio sería preferible acudir a un proceso filtrado que automáticamente hiciese que se anulara la velocidad final, pero la escasez de datos que permitan plantear las características del filtro para estaciones próximas al foco deja poca alternativa en cuanto a la elección del modelo matemático. Es de desearse que el estudio de esta cuestión se apoye, en el futuro próximo, en una idealización más realista del fenómeno, basada a su vez en datos experimentales y en conceptos fidedignos sobre el origen de los temblores, datos y conceptos de que se carece en la actualidad.

REFERENCIAS

1. E. Rosenblueth, "A basis for aseismic design of structures", tesis doctoral, Universidad de Illinois (1951), 24-46.
2. G. W. Housner y P. C. Jennings, "Generation of artificial earthquakes", *Proc. ASCE, 90,* EM1 (feb. 1964), 113-150.
3. E. Rosenblueth, "Probabilistic design to resist earthquakes", *Proc. ASCE, 90,* EM5 (oct. 1964), 189-219.