APLICABILIDAD DE TEORIAS DE ACUIFEROS SEMICONFINADOS

ISMAEL HERRERA R ★

★INVESTIGADOR DEL INSTITUTO DE GEOFISICA, UNAM
ASESOR CONSULTOR, INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM

ABSTRACT

The ranges of applicability for approximate theories of leaky aquifer mechanics are established. The approximate theories considered are those of vertical flow in the aquitard, of zero draw-down in the unpumped aquifer. Hantush's approximations for small and large values of time, and Herrera and Figueroa's approximation.

RESUMEN

Se establecen los intervalos de aplicabilidad para las principales teorías aproximadas de la mecánica de acuíferos semiconfinados. Se consideran las hipótesis de flujo vertical en el acuitardo, la de abatimiento nulo en el acuífero no bombeado, las soluciones de Hantush para tiempos cortos y largos, y la aproximación de Herrera y Figueroa.

1. ANTECEDENTES

En la interpretación de los datos obtenidos tanto en pruebas de bombeo como en estudios regionales de acuíferos, se hace uso de modelos desarrollados por diversos investigadores. Para acuíferos totalmente confinados existe la solución de Theis; para los semiconfinados, las de Hantush y Jacob,[1] y las de Hantush[2] de tiempos cortos y de tiempos largos. En los últimos años se han desarrollado las soluciones de Neuman y Witherspoon[3 a 5] y los modelos de Figueroa y Herrera.[6 a 8]

Todos ellos se han planteado con base en diversas hipótesis y existe una considerable incertidumbre respecto a su intervalo de validez. Para hacer uso en forma efectiva y segura de los datos geohidrológicos, se requiere conocer con precisión la aplicabilidad de las teorías que se utilizan. De este conocimiento depende, en muchos casos, que las predicciones del ingeniero tengan concordancia aceptable con los resultados de las observaciones de campo. En los últimos años ha habido un volumen considerable de trabajo destinado a este tema, por lo que era importante sintetizarlo y complementarlo en los aspectos que lo requerían, así como dar a conocer los resultados en sus fases más relevantes a quienes, en el país, llevan a cabo actividades geohidrológicas. Además, investigadores nacionales, con auspicios de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, han desarrollado métodos cuya aplicabilidad debe establecerse con mayor precisión y está estrechamente relacionada con la aplicabilidad de la teoría de Hantush para tiempos grandes.[9 y 10]

Gran parte de los acuíferos del Valle de México son semiconfinados y múltiples, por lo que las teorías correspondientes tienen especial relevancia para el conocimiento de la hidrología del mismo y prever la evolución de los asentamientos que sufre el suelo de la ciudad de México.

Por lo anterior, la Secretaría de Recursos Hidráulicos contrató el presente trabajo, en el cual se trata de sintetizar el estado actual del conocimiento acerca de la aplicabilidad de las teorías de acuíferos semiconfinados y se complementa con investigaciones originales en aquellos aspectos en que ha sido necesario.

En la primera fase del estudio se llevó a cabo la recopilación bibliográfica, que incluyó una lista de títulos (Apéndice 1). A continuación, los resultados obtenidos de la literatura internacional especializada fueron evaluados críticamente, determinándose los puntos que era necesario elucidar mediante investigaciones adicionales. En este informe se presenta una síntesis formada, en parte, por conocimientos de la literatura consultada, y en parte por los resultados de investigaciones básicas que se emprendieron en apoyo de los trabajos motivo de este contrato. En cada caso se señala la fuente del material incluido.

2. TEORIAS DE ACUIFEROS

Por sistema de acuíferos semiconfinados, se entiende una estructura formada por varios mantos permeables y porosos, tales como arenas, separados unos de otros mediante estratos menos permeables, como arcillas. Los primeros se conocen como acuíferos principales y los segundos como estratos semiconfinantes o acuitardos. Para ser más precisos y para lograr mayor sencillez, solamente será considerado el caso en que el sistema está formado por dos acuíferos principales separados por un acuitardo (fig 1). Sin embargo, gran parte de los hechos básicos se encuentran contenidos en el comportamiento de este sistema fundamental, y el criterio del ingeniero permitirá frecuentemente deducir la manera en que los mismos pueden ser aplicados a sistemas más complejos.

El grupo de acuíferos de la fig 1, está controlado[11 y 12] por el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial s_1}{\partial t} \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s'}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha'} \quad \frac{\partial s'}{\partial t} \tag{1b}$$

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_2} \quad \frac{\partial s_2}{\partial t} \tag{1c}$$

$$s_1 (x, y, 0, t) = s' (x, y, 0, t) \tag{2a}$$

$$s_2 (x, y, b', t) = s' (x, y, b', t) \tag{2b}$$

$$K_1 \frac{\partial s_1}{\partial z} (x, y, 0, t) = K' \frac{\partial s'}{\partial z} (x, y, 0, t) \tag{3a}$$

$$K_2 \frac{\partial s_2}{\partial z} (x, y, b', t) = K' \frac{\partial s'}{\partial z} (x, y, b', t) \tag{3b}$$

En el cap 4 se presenta el significado de todos los símbolos. En particular, s_i $(i = 1, 2)$ y s' denotan los abatimientos en los acuíferos principales y en el acuitardo, respectivamente. Los promedios de los abatimientos $\hat{s}_i$ $(i = 1, 2)$ satisfacen el sistema

$$\frac{\partial^2 \hat{s}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{s}_1}{\partial y^2} + \frac{K'}{T_1} \left(\frac{\partial s'}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{\alpha_1} \quad \frac{\partial \hat{s}_1}{\partial t} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{s}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{s}_2}{\partial y^2} - \frac{K'}{T_2} \left(\frac{\partial s'}{\partial z}\right)_{z=b'} = \frac{1}{\alpha_2} \quad \frac{\partial \hat{s}_2}{\partial t} \tag{4b}$$

En la mayor parte de los casos de interés práctico, el abatimiento en los acuíferos principales varía poco en dirección vertical, por lo que en cada sección es aproximadamente igual a su promedio. Tal vez el caso más importante en que esto no ocurre, es en las cercanías de un pozo parcialmente penetrante. Hantush[12] ha demostrado que para un acuífero isotrópico totalmente confinado, si el pozo parcialmente penetrante se encuentra en el acuífero 1, basta que

$$\frac{r}{b_1} > 1.5 \tag{5}$$

para que s_1 se pueda aproximar satisfactoriamente por su promedio. En este caso, en vista de las ecs 4, el sistema de ecs 1 a 3 puede sustituirse por

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} + \frac{K'}{T_1} \left(\frac{\partial s'}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial s_1}{\partial t'} \qquad (6a)$$

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y^2} - \frac{K'}{T_2} \left(\frac{\partial s'}{\partial z}\right)_{z=b'} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial s_2}{\partial t'} \qquad (6b)$$

$$s_1 (x, y, t) = s' (x, y, 0, t) \qquad (7a)$$

$$s_2 (x, y, t) = s' (x, y, b', t) \qquad (7b)$$

además de la ec 1b.

En caso de que la permeabilidad del acuitardo sea mucho menor que la permeabilidad de los acuíferos (propiedad que caracteriza a los acuíferos semiconfinados), es plausible esperar que el flujo en el acuitardo sea predominantemente vertical; Hantush[2] ha desarrollado una teoría basada en la hipótesis de flujo estrictamente vertical en el acuitardo, llamada Teoría Modificada de Hantush, en la cual la ec 1b es sustituida por

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha'} \frac{\partial s'}{\partial t} \qquad (8)$$

Por lo mismo, el sistema de ecuaciones que define la teoría modificada de Hantush está formado por las ecs 6 a 8.

Posteriormente, Figueroa, Herrera y Rodarte[6 a 8] demostraron que dicha teoría también podía caracterizarse por el sistema de ecuaciones íntegro-diferenciales

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} - C_1 \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t} (x, y, t - \tau)\, f(\alpha'\tau/b'^2)\, d\tau \; +$$

$$+ \; C_1 \int_0^t \frac{\partial s_2}{\partial t} (x, y, t - \tau)\, h(\alpha'\tau/b'^2)\, d\tau = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial s_1}{\partial t} \qquad (9a)$$

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y^2} - C_2 \int_0^t \frac{\partial s_2}{\partial t}(x, y, t - \tau)\, f(a'\tau/b'^2)\, d\tau +$$

$$+ C_2 \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(x, y, t - \tau)\, h(a'\tau/b'^2)\, d\tau = \frac{1}{a_2} \frac{\partial s_2}{\partial t} \qquad (9b)$$

$$s'(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(x, y, t - \tau)\, u(z, \tau)\, d\tau + \int_0^t \frac{\partial s_2}{\partial t}(x, y, t - \tau)\, u(b' - z, \tau)\, d\tau \qquad (9c)$$

cuando los abatimientos son nulos inicialmente.

Los sistemas de ecuaciones se simplifican considerablemente cuando el abatimiento en el acuífero 2 es nulo o al menos despreciable. En tal caso, el sistema de ecs 6 a 8 se reduce al 6a, 7a y 8, y

$$s'(x, y, b', t) = 0 \qquad (10)$$

En forma análoga, el sistema 9 se reduce a

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} - C_1 \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(x, y, t - \tau)\, f(a'\tau/b'^2)\, d\tau = \frac{1}{a'} \frac{\partial s_1}{\partial t} \qquad (11a)$$

$$s'(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(x, y, t - \tau)\, u(z, \tau)\, d\tau \qquad (11b)$$

Herrera y Figueroa[7 y 8] desarrollaron un modelo simplificado cuyo manejo numérico es considerablemente sencillo; se obtiene cuando las funciones f y h se aproximan por

$$f(t') \simeq 1 + \frac{1}{3}\, \delta(t') \qquad (12a)$$

$$h(t') \simeq H\left(t' - \frac{1}{6}\right) \qquad (12b)$$

donde δ y H son la función delta de Dirac y la función escalón de Heaviside, respectivamente. De esta manera, el sistema 9 se transforma en

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} - C_1 \; s_1 + C_1 \; s_2 \; (t - \frac{b'^2}{6\alpha'}) = \frac{1}{\alpha_{C1}} \; \frac{\partial s_1}{\partial t} \qquad (13a)$$

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y^2} - C_2 \; s_2 + C_2 \; s_1 \; (t - \frac{b'^2}{6\alpha'}) \; \frac{1}{\alpha_{C2}} \; \frac{\partial s_2}{\partial t} \qquad (13b)$$

Las ecs 13 toman en cuenta la capacidad de almacenamiento del acuitardo. Sin embargo, un modelo más simple que no considera esa capacidad fue desarrollado por Hantush,[13] en 1967

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} - C_1 \; s_1 + C_1 \; s_2 = \frac{1}{\alpha_1} \; \frac{\partial s_1}{\partial t} \qquad (14a)$$

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y^2} - C_2 \; s_2 + C_1 \; s_1 = \frac{1}{\alpha_2} \; \frac{\partial s_2}{\partial t} \qquad (14b)$$

Cuando los abatimientos en el acuífero 2 pueden despreciarse, el sistema 13 se transforma en

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} - C_1 \; s_1 = \frac{1}{\alpha_{C1}} \; \frac{\partial s_1}{\partial t} \qquad (15)$$

Hantush y Jacob[1] utilizaron el sistema 14 para resolver el problema de un pozo que se bombea en el acuífero 1, a descarga constante. En la solución despreciaron el abatimiento en el acuífero no bombeado, por lo que la ecuación que emplearon fue

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} - C_1 \; s_1 = \frac{1}{\alpha_1} \; \frac{\partial s_1}{\partial t} \qquad (16)$$

Aunque las ecs 13 a 16 no proporcionan directamente los abatimientos en el acuitardo, se puede usar la ec 9c o alguna versión simplificada de la misma para obtenerlos.

Hantush[2] utilizó su teoría modificada para obtener soluciones en el problema de un pozo que se bombea a gasto constante en el acuífero 1 cuando el abatimiento en el acuífero no bombeado es nulo. En este caso, el sistema 6a, 7a, 8 y 10, o alternativamente el 11, debe complementarse con las condiciones iniciales

$$s_1(x, y, 0) = s'(x, y, z, 0) = 0 \tag{17a}$$

Y las condiciones de frontera

$$\lim_{r \to 0} r \frac{\partial s_1}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi T_1} \tag{17b}$$

$$\lim_{r \to \infty} s_1 = 0 \tag{17c}$$

Para este problema, Hantush[2 y 12] obtuvo dos soluciones asintóticas, una válida para tiempos largos y otra para tiempos cortos. Se ha demostrado[8] que la solución para tiempos largos satisface la ec 15, desarrollada por Herrera y Figueroa,[6] y que la correspondiente a tiempos cortos satisface la siguiente versión modificada de la ec 11a

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} - C_1 \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(x, y, t - \tau)\, f_s(\alpha'\tau/b'^2)\, d\tau = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial s_1}{\partial t} \tag{18a}$$

donde

$$f_s(t') = (\pi t')^{-1/2} \tag{18b}$$

La solución de Hantush[12] para tiempos largos está dada por

$$s_1(r, t) = \frac{Q}{4\pi T_1} W\left(\frac{R^2}{4\alpha_{ac} t'}, R\right) \tag{19}$$

Y la de tiempos cortos por

$$s_1(r, t) = \frac{Q}{4\pi T_1} \int_{1/4 t_{D_1}}^{\infty} \frac{1}{y} e^{-y} \operatorname{erfc}\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{y(4t_{D_1} y - 1)}}\right] dy \tag{20}$$

En lo sucesivo se hará referencia a las ecs 19 y 20 como la solución de Hantush para tiempos largos y para tiempos cortos, respectivamente.

3. APLICABILIDAD

En la teoría desarrollada anteriormente, se ha visto que en la mecánica de acuíferos semiconfinados, que son los que tienen mayor importancia en aplicaciones al Valle de México, se han usado numerosas aproximaciones para tratar los diversos problemas. Aquí se discutirá la aplicabilidad de cada una de ellas, para lo cual se clasificarán de la manera siguiente:

a) Flujo vertical en el acuitardo
b) Abatimiento nulo en el acuífero no bombeado
c) Solución de Hantush para tiempos cortos
d) Solución de Hantush para tiempos largos
e) Aproximación de Herrera y Figueroa.

El grado de conocimiento de las diversas hipótesis varía, ya que en algunos casos existen análisis de errores bastante precisos, mientras en otros se carece de ellos. Las aproximaciones *b* a *e* pueden interpretarse como aproximaciones en las funciones de memoria, lo que resulta un auxiliar valioso para el criterio ingenieril, ya que proporciona imágenes intuitivas que dan información acerca de la aplicabilidad que puede esperarse para las diversas teorías. A continuación se presenta una síntesis del estado actual del conocimiento tal como se estableció en el presente trabajo. En el Apéndice 2 se incluyen reproducciones de las investigaciones que se realizaron en apoyo de los objetivos planteados en este contrato[8, 14 y 18]

3.1 Flujo vertical en el acuitardo

Esta hipótesis,que fue originada por Hantush y Jacob[1] y posteriormente incorporada en forma más sistemática por Hantush[2] en su teoría modificada, puede ser usada para dar una definición matemática de los acuíferos semiconfinados. Cuando se adopta este punto de vista, un sistema de acuíferos es semiconfinado si los acuíferos principales están separados por acuitardos en los cuales el flujo puede tomarse como vertical.

En vista de las ecs 2 y 3, debe esperarse tal comportamiento cuando la permeabilidad del acuitardo es mucho menor que la de los acuíferos principales. En efecto, en ese caso la velocidad horizontal en el acuitardo es necesariamente mucho menor que en los acuíferos principales, al menos en las superficies que los separan, ya que la ley de Darcy, en presencia de las ecs 2, implica:

$$\frac{v'_H}{v_{H1}} = \frac{K'}{K_1} \tag{21a}$$

$$\frac{v'_H}{v_{H2}} = \frac{K'}{K_2} \tag{21b}$$

en las superficies de separación respectivas.

La hipótesis de flujo vertical en el acuitardo puede aplicarse a gran número de problemas de interés en hidrología subterránea. Cuando es factible, los modelos se simplifican considerablemente. Neuman y Witherspoon[3 y 5] han hecho un análisis muy amplio de la aplicabilidad de esta suposición, y sus resultados se resumen de la manera siguiente:

1. El error depende en un grado mucho mayor del contraste de permeabilidades entre los acuíferos y el acuitardo que de los espesores de los acuíferos.

2. Cuando las permeabilidades de los acuíferos son al menos tres órdenes de magnitud mayores* que la permeabilidad en el acuitardo, los resultados obtenidos con esta hipótesis son aplicables a todas las partes del sistema, para todos los valores de interés práctico del tiempo de bombeo. En puntos del acuitardo situados dentro de un radio de 9 m de los pozos de bombeo, pueden llegar a obtenerse errores que no exceden del 5 por ciento. Cuando los contrastes de permeabilidad son mayores que tres órdenes de magnitud, estos errores son imperceptibles.

3. Cuando las permeabilidades de los acuíferos son dos órdenes de magnitud mayores que la permeabilidad del acuitardo, los resultados obtenidos con esta hipótesis son aplicables a todas las partes en el acuífero bombeado, para todos los valores de interés práctico del tiempo de bombeo. En puntos del acuitardo que se encuentren a una distancia radial de más de 3 m de los pozos de bombeo, se pueden tener errores hasta del 5 por ciento. Para puntos en el acuitardo que estén a más de un metro de los pozos de bombeo, los errores no exceden de 10 por ciento, pero aumentan rápidamente en puntos más cercanos a los pozos. En el acuífero no bombeado los errores son menores de 5 por ciento, excepto en la vecindad inmediata de los pozos.[3]

---

* Por un orden de magnitud mayor aquí se entiende que el cociente de los valores numéricos de la propiedad considerada es 10. Por ejemplo, tres órdenes de magnitud mayor significa que dicho cociente es 10^3.

4. Cuando las permeabilidades de los acuíferos son un orden de magnitud mayor que la permeabilidad del acuitardo, los errores provocados por el uso de esta hipótesis en puntos cuya distancia a los pozos de bombeo es mayor de 30 m son menores del 10 por ciento en el acuitardo y menores del 5 por ciento en los acuíferos, para valores de interés práctico del tiempo de bombeo. Estos errores aumentan en puntos más cercanos a los pozos de bombeo.

5. Cuando el contraste de permeabilidades entre acuíferos y acuitardo son menores de un orden de magnitud, el sistema de acuíferos no puede considerarse como semiconfinado y carece de sentido hablar de acuíferos y acuitardos.

6. Para tiempos cortos de bombeo, los errores son sensiblemente independientes del contraste de permeabilidades entre los acuíferos y el acuitardo.

7. El error aumenta con el tiempo de bombeo y disminuye con la distancia a los pozos de bombeo. Es máximo en el acuitardo y mínimo en el acuífero bombeado.

Aunque los resultados de Neuman y Witherspoon enunciados antes hacen ver que existen situaciones en que la hipótesis de flujo vertical en el acuitardo puede tener limitaciones, sin embargo, la aplicabilidad de la misma es tan amplia, que puede tomarse como base para caracterizar los acuíferos semiconfinados. Por ello las diversas teorías de acuíferos semiconfinados la han incorporado y en las secciones referentes a la aplicabilidad, se supondrá tácitamente que se cumple. Consecuentemente, la aplicabilidad de las teorías que se discutirán no podrá ser más amplia que aquella en que la hipótesis de flujo vertical da resultados satisfactorios.

3.2 Abatimiento nulo en el acuífero no bombeado

Los trabajos de Neuman y Witherspoon[3 y 5] constituyen contribuciones fundamentales para establecer la aplicabilidad de esta suposición. Además, hay antecedentes importantes[16 y 17] de los mismos autores, que son también informativos sobre esta materia.

La conclusión principal de Neuman y Witherspoon[5] es que el abatimiento en el acuífero no bombeado puede tomarse como nulo al calcular los abatimientos en el acuífero bombeado y en el acuitardo, siempre que

$$t' \leqslant 10^{-1} \qquad (22)$$

Por lo que respecta al acuífero no bombeado no proporcionan información, ya que consideran que para todo tiempo el error cometido es inaceptable. Sin embargo, observaron[5] que los errores implicados por esta hipótesis dependen notablemente de las propiedades de los acuíferos, aun cuando no se reflejó en la ec 22, la cual está especificada únicamente en términos de propiedades del acuitardo.

Por lo anterior, se emprendieron algunas investigaciones básicas en apoyo de los trabajos motivo de este contrato,[8 y 18] que permitieran elucidar estos puntos. Se llevó a cabo el análisis del error y con base en él se estableció la aplicabilidad de esta suposición. Definiendo como error relativo en cada uno de los elementos del sistema de acuíferos al error en el abatimiento en ese elemento dividido entre el abatimiento en el acuífero bombeado, se obtiene que en cada uno de los elementos la teoría es aplicable para tiempos menores que un cierto tiempo límite que varía según el elemento considerado. Si se define como intervalo de aplicabilidad aquel para el cual los errores relativos son menores de 5 por ciento, dicho intervalo se caracteriza de que t′ sea menor o igual que los valores dados en la tabla 1.

TABLA 1. LIMITE SUPERIOR DE LOS TIEMPOS EN LOS CUALES EL ABATIMIENTO EN EL ACUIFERO NO BOMBEADO PUEDE DESPRECIARSE

a. En el acuífero bombeado

α_{a1} \ α_{a2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	∞
10^{0}	1.23	0.54	0.43	0.40
10^{1}	0.96	0.43	0.34	0.33
∞	0.93	0.40	0.33	0.32

b. En el acuífero no bombeado

α_{a2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	∞
t′	0.50	0.16	0.11	0.10

c. En el acuitardo, $\zeta = 0.2$

α_{a1} \ α_{a2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	∞
10^{0}	1.10	0.44	0.34	0.33
10^{1}	0.88	0.40	0.32	0.31
∞	0.87	0.39	0.31	0.30

d. En el acuitardo, $\zeta = 0.5$

α_{a1} \ α_{a2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	∞
10^{0}	0.88	0.32	0.23	0.22
10^{1}	0.80	0.31	0.23	0.22
∞	0.79	0.31	0.23	0.22

e. En el acuitardo, $\zeta = 0.8$

α_{a1} \ α_{a2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	∞
10^{0}	0.68	0.22	0.15	0.14
∞	0.65	0.22	0.15	0.14

3.3 Solución de Hantush para tiempos cortos

Cuando Hantush[2] desarrolló su solución aproximada, definió su aplicabilidad como aquella en que se cumple la condición:

$$t' \leqslant 10^{-1} \qquad (23)$$

Posteriormente, Neuman y Witherspoon[3 y 5] observaron que ese intervalo podía ampliarse un poco, sin llegar a establecerlo con precisión.

Consecuentemente, se emprendieron algunas investigaciones básicas tendientes a precisar dicho intervalo de aplicabilidad,[8 y 18] y en este caso también fue posible hacer un análisis más o menos exhaustivo del error. Definiendo nuevamente el intervalo de aplicabilidad como aquel en el cual el error relativo es menor del 5 por ciento, se obtuvo que en el acuífero bombeado, la solución de Hantush[2] para tiempos cortos es aplicable cuando t' es menor que los valores dados en la tabla 2. Debe observarse que la solución de Hantush presupone que el abatimiento en el acuífero no bombeado es nulo, por lo que su aplicabilidad está adicionalmente restringida por esta condición que fue discutida en 3.2.

TABLA 2. LIMITE SUPERIOR DE LOS TIEMPOS EN QUE LA APROXIMACION *DE HANTUSH PARA TIEMPOS CORTOS PUEDE APLICARSE*

a_{a1}	10^0	10^1	∞
t'	0.53	0.41	0.40

3.4 Solución de Hantush para tiempos largos

El intervalo de aplicabilidad dado por Hantush[2] para su solución de tiempos largos está definido por

$$t' \geqslant 5 \qquad (24)$$

Neuman y Witherspoon[3 y 5] observaron que también en este caso era posible ampliarlo, pero no llegaron a cuantificar dicha ampliación.

En las investigaciones llevadas a cabo en apoyo del proyecto,[8 y 18] se estableció que el límite inferior para los tiempos de aplicación de esta solución aproximada depende de la distancia adimensional R al pozo y del parámetro adimensional

$$\alpha_{ac} = \frac{3\,\alpha_a}{3 + \alpha_a} \tag{25}$$

En un intervalo considerable de valores de estos parámetros, dicho límite es veinte o más veces menor que el predicho por Hantush, aunque crece con la distancia R y es posible que para R suficientemente grande los valores predichos por Hantush lleguen a ser demasiado optimistas.

En la fig 2 se presentan los límites inferiores de t' en que la teoría de Hantush es aplicable para $\alpha_{ac} = 0.9$, 1.8 y 2.7. Debe observarse que α_{ac} nunca es mayor de 3, por lo que estos valores cubren una región suficientemente amplia.

Nótese que esta teoría supone un abatimiento nulo en el acuífero no bombeado, por lo que las observaciones finales de 3.3 también son pertinentes aquí.

3.5 Aproximación de Herrera y Figueroa

El método aproximado de cómputo desarrollado por Herrera y Figueroa[6 y 7] simplifica considerablemente los cálculos necesarios[14] para su aplicación, ya que desacopla el sistema de ecuaciones diferenciales involucradas. Aunque es una teoría aproximada, es más refinada que las propuestas por Hantush y Jacob,[1 y 13] pues toma en cuenta el almacenamiento en el acuitardo.

De acuerdo con los resultados obtenidos en su aplicación,[14] es adecuada para predecir el efecto de la interacción de los acuíferos. Se le puede considerar como una generalización de la aproximación de Hantush para tiempos largos[8 a 10] que elimina la hipótesis de que el abatimiento en el acuífero no bombeado es nulo. Los tiempos t' de aplicabilidad para el caso de un pozo están, por lo mismo, limitados inferiormente por los valores dados en la fig 2, pero no limitados superiormente, ya que no supone abatimiento nulo en el acuífero no bombeado.

4. NOTACION

b_i	Espesor del acuífero i-ésimo ($i = 1, 2$), L
b'	Espesor del acuitardo, L
C_i	$K'/T_i b'$ ($i = 1, 2$), L^{-2}
$f(t')$	$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t'} = \frac{1}{(\pi t')^{1/2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2/t'} \right]$
$f_S(t')$	$(\pi t')^{-1/2}$
$h(t')$	$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t'}$
K_i	Permeabilidad del i-ésimo acuífero, L/T
K'	Permeabilidad del acuitardo, L/T
Q	Gasto del bombeo en el acuífero 1, L^3/T
r	Distancia radial al pozo de bombeo, L
R_i	$r \sqrt{\frac{K'}{K_i b_i b'}}$
R	$r \sqrt{\frac{K'}{K_1 b_1 b'}}$
S_i	$S_{si} b_i$, capacidad de almacenamiento del i-ésimo acuífero
S'	$S'_s b'$, capacidad de almacenamiento del acuitardo
S_{si}	Almacenamiento específico del i-ésimo acuífero, L^{-1}
S'_s	Almacenamiento específico del acuitardo, L^{-1}
s_i	Abatimiento en el i-ésimo acuífero, L
$\hat{s}_i$	Abatimiento promedio en el i-ésimo acuífero, L
s'	Abatimiento en el acuitardo, L
t	Tiempo, T
t'	$\alpha' t/b'^2$, tiempo adimensional
T_i	$K_i b_i$, trasmisibilidad del i-ésimo acuífero, $L^2 T^{-1}$

$u(z, t)$ $\quad 1 - z/b' - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \alpha' t/b'^2}}{n\pi} \operatorname{sen} \pi z/b'$

v_{Hi}, v'_H, Velocidad en los acuíferos y en el acuitardo, respectivamente, LT^{-1}

$W(p, q)$ $\quad \int_p^{\infty} \frac{dy}{y} \exp(-y - q^2/4y)$, función de pozo para acuíferos semiconfinados, L

x, y, z Coordenadas, L

α_i $\quad K_i/S_{si}$, difusividad hidráulica del i-ésimo acuífero, $L^2 T^{-1}$

α' $\quad K'/S'_s$, difusividad hidráulica del acuitardo, $L^2 T^{-1}$

α_{ci} $\quad \frac{3 T_i}{3 S_i + S'}$, $L^2 T^{-1}$

α_{ai} $\quad \frac{S'}{S_i}$

α_{ac} $\quad \frac{3 \alpha_{a1}}{3 + \alpha_{a1}}$

β_i $\quad \frac{r}{4 b_i} \sqrt{\frac{K' S'_s}{K_i S_{si}}}$

ζ $\quad z/b'$

5. REFERENCIAS

1. M. S. Hantush, y C. E. Jacob, **Nonsteady Radial Flow in an Infinite Leaky Aquifer**, *Trans., American Geophysics Union*, Vol 36, No 1 (1955), pp 95-100

2. M. S. Hantush, **Modification of the Theory of Leaky Aquifers,** *Journal Geophysical Research*, Vol 65, No 11 (1960), pp 3713-3725

3. S. P. Neuman y P. A. Witherspoon, **Transient Flow of Ground Water to Wells in Multiple Aquifer Systems**, *Geotechnical Engineering Report,* Vol 69, No 1, *University of California,* Berkeley (ene 1969)

4. S. P. Neuman y P. A. Witherspoon,, **Theory of Flow in a Confined two Aquifer System,** *Water Resources Research,* Vol 5, No 4 (1969)

5. S. P. Neuman y P. A. Witherspoon, **Applicability of Current Theories of Flow in Leaky Aquifers,** *Water Resources Research*, Vol 5, No 4 (1969)

6. I. Herrera y G. E. Figueroa, **A Correspondence Principle for the Theory of Leaky Aquifers,** *Water Resources Research*, Vol 5, No 4 (1969)

7. I. Herrera, **Theory of Multiple Leaky Aquifers**, *Water Resources Research,* Vol 6, No 1 (1970)

8. I. Herrera y L. Rodarte, **Integro-differential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications,** Parte 1. The Nature of Approximate Theories, *Water Resources Research,* Vol 9, No 4 (1973)

9. S. P. Neuman y P. A. Witherspoon, Comments on **A Correspondence Principle for the Theory of Leaky Aquifers,** por I. Herrera y E. Figueroa V., *Water Resources Research,* Vol 6, No 3 (1970)

10. I. Herrera y G. E. Figueroa, Reply to **Comments on a Correspondence Principle for the Theory of Leaky Aquifers by Neuman and Witherspoon,** *Water Resources Research,* Vol 6, No 3 (1970)

11. W. C. Walton, **Ground Water Resource Evaluation,** *McGraw-Hill Book Co.,* Nueva York (1970)

12. M. S. Hantush, **Hydraulics of Wells, in Advances in Hydroscience,** Vol 1, Edited by V. T. Chow, *Academic Press* (1964), pp 281-432

13. M. S. Hantush, **Flow to Wells in Aquifers Separated by a Semipervious Layer,** *Journal Geophysical Research,* Vol 72, No 6 (1967), pág 1709

14. I. Herrera y L. Rodarte, **Computations Using a Simplified Theory of Multiple Leaky Aquifers,** *Geofísica Internacional,* Vol 12, No 2 (1972)

15. I. Herrera y B. Chen, **Integro-differential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications,** Parte 3. A Computational Method. Próxima publicación

16. S. P. Neuman y P. A. Witherspoon, **Theory of Flow in Aquicludes Adjacent to Slightly Leaky Aquifers,** *Water Resources Research,* Vol 4, No 1 (1968)

17. P. A. Witherspoon y S. P. Neuman, **Evaluating a Slightly Permeable Caprock in Aquifer Gas Storage,** I. Caprock of Infinite Thickness, *Trans. AIME,* Vol 240 (1967) pág 949

18. I. Herrera, **Integro-differential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications,** Parte 2. The Range of Applicability of Approximate Theories. Próxima publicación

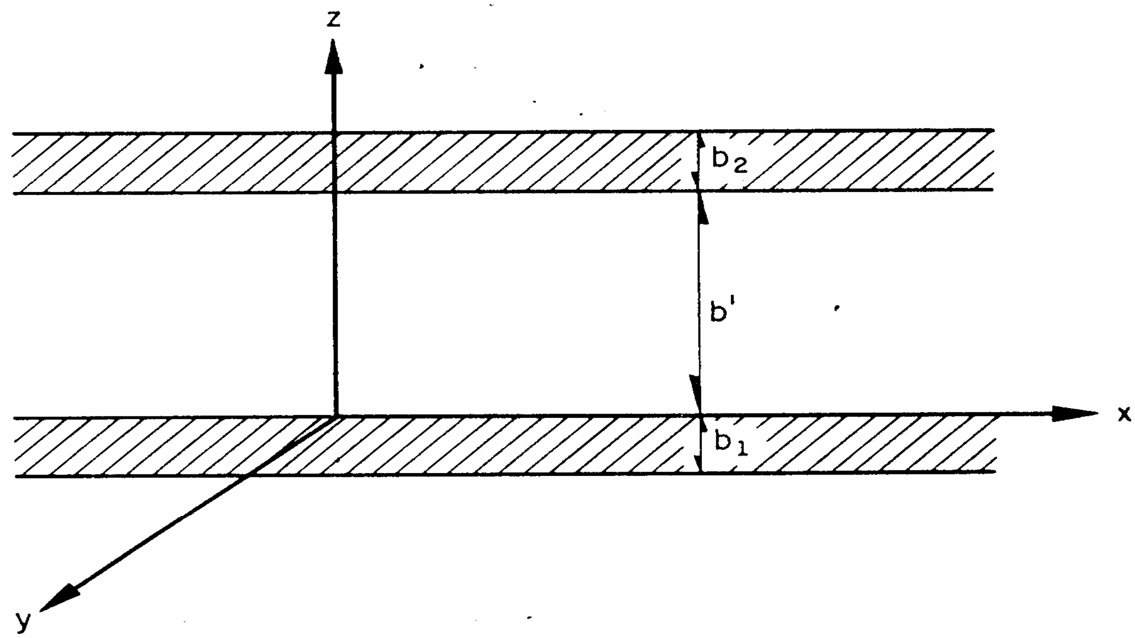

Fig 1. El sistema de acuíferos

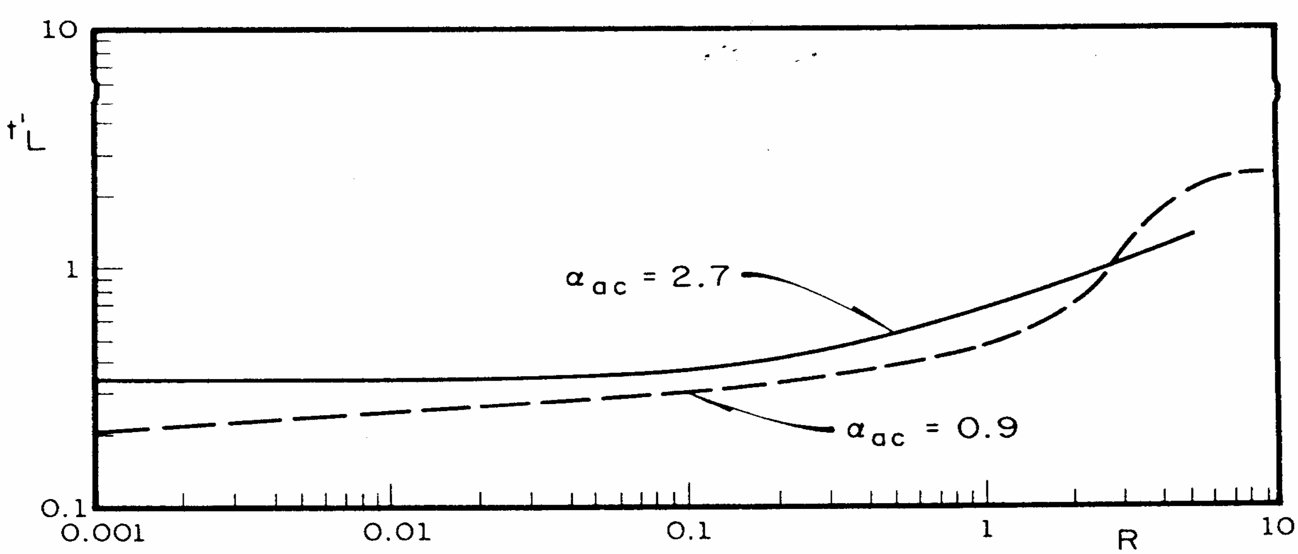

Fig 2. Intervalo de aplicabilidad de la teoría para tiempos largos

APENDICE 1. RECOPILACION BIBLIOGRAFICA

Aravin, V. I. y S. N. Numerov, **Theory of Fluid Flow in Undeformable Porous Media**, *Israel Program for Scientific Translations*, Jerusalén (1965), pág 511

Carslaw, H. S. y J. C. Jaeger, **Conduction of Heat in Solids**, *Oxford University Press*, Londres (1959)

Carslaw, H. S. y J. C. Jaeger, **Operational Methods in Applied Mathematics**, *Dover Publications*, Nueva York (1963)

Churchill, R. V., **Operational Mathematics**, *McGraw-Hill Book Co.*, Nueva York (1958)

De Glee, G. J., **Over Grondwaterstroomingen bij Wateronttrekking door Middel van Putten**, *J. Waltman, Jr.*, Delft (1930)

De Wiest, R. J. M., **On the Theory of Leaky Aquifers**, *Journal Geophysical Research*, Vol 66, No 12 (1961), pp 4257-4262

De Wiest, R. J. M., **Flow to an Eccentric Well in a Leaky Circular Aquifer with Varied Lateral Replenishment**, *Geofisica Pura Applicata*, Vol 54 (1963), pp 87-102

De Wiest, R. J. M., **Geohydrology**, *John Wiley and Sons, Inc.*, Nueva York (1965)

Ferris, J. G., D. B. Knowles, R. H. Brown y R. W. Stallman, **Theory of Aquifer Tests.** A Summary of Lectures, *US Geology Survey Water Supply*, Paper 1536-E (1962)

Gelfand, I. M, y S. V. Fomin, **Calculus of Variations**, *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs (1963)

Girinsky, N. K., **Nekotorye Voprosy Dinamiki Podzemnykh Vod, in Gidrogeologiya i Inzhenernaya Geologiya**, *Sbornik Statei*, No 9, Moscú (1947)

Glebov, P. D., **Pritok Infiltratsionnoi Vody k Kolodtsam pri Gorizontalnom Zaleganii Gruntov Razlichnoi Vodopronitsaemosti**, *Trans., Leningrad Industrial Institute*, Vol 1 (1940)

Gradshtein, I. S. e I. M. Ryzhik, **Tablitsy Integralov, Summ, Ryadov i Proizvedenii**, *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Fiziko-Matematicheskoi Literatury*, Moscú (1963)

Gurtin, M. E., **Variational Principles for Linear Initial-Value Problems**, *Quarterly Applied Mathematics*, Vol 22 (1964), pág 252

Hantush, M. S., **Plane Potential Flow of Ground-Water with Linear Leakage**, Ph. D. Dissertation, *University of Utah*, Salt Lake City (1949)

Hantush, M. S., **Analysis of Data from Pumping Tests in Leaky Aquifers**, *Trans. American Geophysics Union*, Vol 37, No 6 (1956), pp 702-714

Hantush, M. S., **Nonsteady Flow to a Well Partially Penetrating an Infinite Leaky Aquifer**, *Procs., Iraqi Scientific Society*, Vol 1 (1957), pp 10-19

Hantush, M. S., **Nonsteady Flow to Flowing Wells in Leaky Aquifers**, *Journal Geophysical Research*, Vol 64, No 8 (1959), pp 1043-1052

Hantush, M. S., **Modification of the Theory of Leaky Aquifers**, *Journal Geophysical Research*, Vol 65, No 11 (1960), pp 3713-3725

Hantush, M. S., **Tables of the Function H (u, β)**, Documento 6427, *US Library of Congress*, Wáshington (1960)

Hantush, M. S., **Drainage Wells in Leaky Water-Table Aquifers**, *Procs., American Society of Civils Engineers*, Vol 88, No HY2 (1962), pág 123

Hantush, M. S., **Depletion of Storage, Leakage, and River Flow by Gravity Wells in Sloping Sands**, *Journal Geophysical Research*, Vol 69, No 12 (1964), pp 2551-2560

Hantush, M. S., **Hydraulics of Wells, in Advances in Hydroscience**, Vol 1, Editado por V. T. Chow, *Academic Press*, Nueva York (1964)

Hantush, M. S., **Flow of Groundwater in Relatively Leaky Aquifers**, *Water Resources Research*, Vol 3, No 2 (1967), pp 583-590

Hantush, M. S., **Flow to Wells in Aquifers Separated by a Semipervious Layer**, *Journal Geophysical Research*, Vol 72, No 6 (1967), pp 1709-1723

Hantush, M. S. y C. E. Jacob, **Plane Potential Flow of Ground Water with Linear Leakage**, *Trans., American Geophysical Union*, Vol 35, No 6 (1954), pp 917-936

Hantush, M. S. y C. E. Jacob, **Nonsteady Green's Functions for an Infinite Strip of Leaky Aquifers**, *Trans., American Geophysical Union*, Vol 36, No 1 (1955), pp 101-112

Hantush, M. S. y C. E. Jacob, **Nonsteady Radial Flow in an Infinite Leaky Aquifer**, *Trans., American Geophysical Union*, Vol 36, No 1 (1955), pp 95-100

Hantush, M. S. y C. E. Jacob, **Flow to an Eccentric Well in a Leaky Circular Aquifer**, *Journal Geophysical Research*, Vol 65, No 10 (1960), pp 3425-3431

Jacob, C. E., **Radial Flow in a Leaky Artesian Aquifer**, *Trans., American Geophysical Union*, Vol 27, No 11 (1946), pp 198-205

Javandel, I. y P. A. Witherspoon, **Analysis of Transient Fluid Flow in Multi-Layered Systems**, *Water Resources Center*, No 124, Universidad de California, Berkeley (1968)

Javandel, I. y P. A. Witherspoon, **Application of the Finite Element Method to Transient Flow in Porous Media,** *Society of Petrology Engineers Journal,* Vol 8, No 3 (sep 1968), pp 241-252

Johnson, A. I., R. P. Moston y D. A. Morris, **Physical and Hydrologic Properties of Water Bearing Deposits in Subsiding Areas in Central California,** *US Geological Survey Open-File Report,* Denver (1965)

McCracken, D. D. y W. S. Dorn, **Numerical Methods and Fortran Programming,** *John Wiley and Sons Inc.,* Nueva York (1964)

McLachlan, N. W., **Bessel Functions for Engineers,** *Oxford University Press,* Londres (1961)

Myatiev, A. N., **Deistvie Kolodtsa v Napornom Basseine Podzemnykh Vod,** *Izv. Turkm. Filiala AN SSSR* (1946), pp 3-4

Myatiev, A. N., **Napornyi Kompleks Podzemnykh Vod i Kolodtsy,** *Izv. AN SSSR,* Otd. Tekhn. Nauk (1947), pág 9

Narasimhan, T. N., **Ratio Method for Determining Characteristics of Ideal Leaky and Bounded Aquifers,** *Bulletin International Association of Scientific Hydrology,* Vol 13, No 1 (1968), pp 70-83

Neuman, S. P., **Transient Behavior of an Aquifer with a Slightly Leaky Caprock,** M. S. Thesis, *Universidad de California,* Berkeley (1966)

Neuman, S. P. y P. A. Witherspoon, **Theory of Flow in Aquicludes Adjacent to Slightly Leaky Aquifers,** *Water Resources Research,* Vol 4, No 1 (1968), pp 103-112

Neuman, S. P. y P. A. Witherspoon, **Transient Flow of Ground Water to Wells in Multiple-Aquifer Systems,** *Geotechnical Engineering Report,* Universidad de California,Berkeley (ene 1969)

Neuman, S. P., y P. A. Witherspoon, **Theory of Flow in a two Aquifer System,** *Water Resources Research,* Vol 5, No 4 (1969), pp 803-816

Poland, J. F. y G. H. Davis, **Land Subsidence due to Withdrawal of Fluids,** in Review Engineering Geology, *Geology Society American,* Vol 2 (1967), pp 187-268

Poland, J. F. y G. H. Green, **Subsidence in the Santa Clara Valley, California,** Informe de Avance, *US Geology Survey Water Supply,* Paper 1619-C (1962)

Polubarinova-Kochina, P. Ya., **The Theory of Ground Water Movement,** *Princeton University Press,* Nueva Jersey (1962), pág 613

Slater, R. J., **Application and Limitations of Pumping Tests,** *Institute Water Engineers Journal,* Vol 17, No 3 (1963), pp 189-215

Steggewentz, J. H. y B. A. Van Nes, **Calculating the Yield of a Well Taking Account of Replenishment of the Ground-Water from Above,** *Water & Water Engineering,* Vol 41 (1939), pp 561-563

Taylor, R. L. y C. B. Brown, **Darcy Flow Solutions with a Free Surface,** *Journal Hydraulic Division ASCE,* Vol 93, No HY2 (1967), pág 25

Theis, C. V., **The Relationship betweeen the Lowering of the Piezometric Surface and the rate and Duration of Discharge of a Well using Ground Water Storage,** *Trans. American Geophysical Union,* Vol 16 (1935), pág 519

Walton, W. C., **Leaky Artesian Aquifer Conditions in Illinois**, *Illinois State Water Survey*, Informe No 39, Urbana, Ill. (1960)

Walton, W. C., **Selected Analytical Methods for Well and Aquifer Evaluation**, *Illinois State Water Survey*, Bol 49, Urbana, Ill. (1962)

Watson, G. N., **Theory of Bessel Functions**, *Macmillan*, Nueva York (1944)

Wilson, E. L. y R. E. Nickell, **Application of Finite Element Method to Heat Conduction Analysis**, Nuclear Engineering and Design, *North Holland Publishing Co.*, Amsterdam (1966), pág 276

Witherspoon, P. A., I. Javandel, S. P. Neuman y R. A. Freeze, **Interpretation of Aquifer Gas-Storage Conditions from Water Pumping Tests**, *American Gas Association*, Nueva York (1967)

Witherspoon, P. A., I. Javandel, y S. P. Neuman, **Use of the Finite Element Method in Solving Transient Flow Problems in Aquifer Systems**, in The Use of Analog and Digital Computers in Hydrology, *AIHS Publication*, Vol 81, No 2 (1968), pp 687-698

Witherspoon, P. A., T. D. Mueller y R. W. Donovan, **Evaluation of Underground Gas-Storage Conditions in Aquifers through Investigations of Ground Water Hydrology**, *Trans. AIME*, Vol 225 (1962), pp 555-565

Witherspoon, P. A. y S. P. Neuman, **Evaluating a Slightly Permeable Caprock in Aquifer Gas-Storage, I. Caprock of Infinite Thickness**, *Trans. AIME*, Vol 240 (1967), pág 949

Zienkiewicz, O. C. y Y. K. Cheung, **Finite Elements in the Solution of Field Problems**, *The Engineering* (1965), pág 220

Zienkiewicz, O. C., P. Mayer y Y. K. Cheung, **Solution of Anisotropic Seepage by Finite Elements**, *Journal Engineering Mechanics Division ASCE,* Vol 92, No EM2 (1966), pág 111

Zienkiewicz, O. C. y Y. K. Cheung, **The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics**, *McGraw-Hill Book Co.,* Londres (1967)

APENDICE 2. INVESTIGACIONES REALIZADAS COMO BASE DE ESTE ESTUDIO

I. Herrera y L. Rodarte, **Integro-differential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications**, Part 1. The Nature of Approximate Theories, *Water Resources Research*, Vol 9, No 4 (1973)

I. Herrera, **Integro-differential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications**, Part 2. The Range of Applicability of Approximate Theories

I. Herrera y L. Rodarte, **Computations Using a Simplified Theory of Multiple Leaky Aquifers**, *Geofísica Internacional*, Vol 12, No 2 (1972)

Estos trabajos serán publicados próximamente por el Instituto de Ingeniería, UNAM.