Proc. IV Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Oaxaca, Oax., México, Noviembre 1975.

44

INTERACCION DINAMICA SUELO - ESTRUCTURA COMO UN PROBLEMA DE DIFRACCION

Ismael Herrera[1,2] y Jacobo Bielak[2]

Resumen.

La interacción suelo-estructura provocada por sismos se formula como un problema de difracción. Se consideran estructuras que descansan en excavaciones que pueden no estar totalmente ocupadas por la cimentación. Se demuestra que la información mínima acerca del sismo necesaria para el tratamiento del problema consiste en la historia del movimiento de la base de la excavación en ausencia de la misma. Se da una forma sistemática para incorporar estos datos en la formulación del problema y se demuestra que su tratamiento adecuado requiere acoplar las ecuaciones que gobiernan el sistema suelo-estructura con las ecuaciones de movimiento de la región de suelo desplazada por la excavación.

1.- Introducción.

El problema de interacción dinámica entre estructura y subsuelo ha sido objeto de numerosos estudios en años

1.- Centro de Investigación de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, U.N.A.M.
2.- Instituto de Ingeniería, U.N.A.M.

recientes [1-8], ya que se ha reconocido que la flexibilidad del suelo de la cimentación puede ser, en algunos casos, un factor importante en el diseño de estructuras antisísmicas.

Una hipótesis del tratamiento habitual de problemas de interacción suelo-estructura, es que el movimiento del suelo se conoce en ausencia de la estructura; esta información frecuentemente se suministra por medio de registros sismográficos. Sin embargo, en la práctica resulta imposible obtener una descripción completa del movimiento del suelo ya que la información sismográfica se refiere al comportamiento de uno o varios puntos del suelo. En general es necesario extrapolar la información disponible.

Por otra parte, es obvio que para determinar el comportamiento de la estructura no se necesita conocer el movimiento en ausencia de la misma, en todos los puntos del suelo. Sin embargo, no es claro cual es la información mínima requerida para determinar el movimiento de la estructura.

Dado lo limitado de los datos disponibles, es importante establecer con precisión cuales son los datos mínimos requeridos para determinar el movimiento de la estructura. Entre otras, esto tendría la ventaja de orientar en forma más adecuada la extrapolación que necesariamente debe hacerse de los datos y permitiría optimizar su uso.

A pesar de su importancia, este problema casi no ha recibido atención. Como consecuencia de este hecho, la manera de incorporar esta información en gran parte de las investigaciones sobre interacción suelo-estructura debida a temblores, resulta oscura.

Cuando el movimiento del suelo en ausencia de la estructura se supone conocido, el problema consiste en determinar el efecto que la presencia de una región de propiedades mecánicas diferentes tiene en el movimiento global. Planteado en estos términos, el problema aparece como uno de difracción, en el cual la onda incidente sería el movimiento del suelo y la onda difractada el movimiento que hay que superponer a este para obtener el movimiento global

Los problemas de difracción son clásicos y en años recientes los sismólogos les han prestado gran atención. Aunque el método utilizado para plantearlos [9-11] se ha aplicado con mayor frecuencia a problemas lineales, es también aplicable a problemas no lineales. En este trabajo el problema se formula para una estructura no lineal arbitraria, suponiendo comportamiento lineal del suelo. El caso en que el suelo presenta comportamiento no lineal en una región acotada alrededor de la estructura, puede tratarse en forma similar, ampliando la región en que las propiedades elásticas se modifican de manera que incluya esa región.

Se supone que la construcción posee una cimentación cuya excavación puede no estar totalmente ocupada por la estructura (fig. 1). Se demuestra que los datos mínimos requeridos para el tratamiento de este problema son los desplazamientos que se producirían en la base de la excavación si la misma no se hubiera efectuado.

En realidad, se hace ver que el movimiento del sistema suelo estructura está determinado mediante un problema cuyos datos son los desplazamientos y tracciones que ocurrirían en la base de la excavación si ella no estuviera presente, por lo que aparentemente serían estos los datos mínimos. Sin embargo, estas tracciones y desplazamientos no son independientes ya que están ligados a través de un problema de condiciones iniciales formulado en la región de suelo desplazada por la excavación.

Se establece una forma sistemática de incorporar los datos mínimos en la formulación de esta clase de problemas y se hace ver que el sistema de ecuaciones que gobierna el movimiento del sistema suelo-estructura, queda acoplado con las ecuaciones de movimiento de la región de suelo desplazada por la excavación.

El sistema de ecuaciones diferenciales resultante es adecuado para ser tratado por el método del elemento finito o alguna otra técnica numérica.

2.- El problema de difracción.- Para formular la interacción suelo-estructura como un problema de difracción conviene adoptar una notación en la que el término región, se utilice exclusivamente para regiones cerradas, es decir, que incluyan su frontera.

Sea $\hat{R}$ la región ocupada por el suelo antes de la construcción de la estructura y $\partial\hat{R}$ su frontera. En muchos de los estudios de interacción suelo-estructura, se supone que $\hat{R}$ es un medio espacio (fig. 1), en cuyo caso $\partial\hat{R}$ es la superficie del suelo. Para la formulación que se hace aquí, esta hipótesis no es indispensable y la misma sigue siendo válida aunque $\hat{R}$ sea acotada.

Por otra parte, se considera otra región E que llamaremos la región de la construcción, y cuya frontera es ∂E. A la cerradura de $\hat{R}$-E se le llamará la región ocupada por el suelo después de la construcción y se le denotará por R. Supondremos que $E \cap \partial R$ no es vacía; esta hipótesis equivale a suponer que el suelo y la estructura están en contacto.

Además, se supone que E consta de dos subregiones E_E y E_L; E_E es la estructura y E_L el espacio libre o excavación no ocupada por la estructura. Para que E_L represente la excavación no ocupada por la estructura se supondrá que $E_L \subset \hat{R}$. Observe que esta manera de formular el problema incluye tanto el caso en que la construcción de la estructura no modifica al suelo (no hay excavación, fig. 2), como aquel en que sí hay modificación (fig. 1).

Conviene distinguir la parte de la frontera de R que es común con E_E, de la que es común con E_L. Con este propósito, se definen $\partial_E R = E_E \cap \partial R$ y $\partial_L R = E_L \cap \partial R$. Debe observarse también que

$$\partial R = (\partial \hat{R} - E) \cup \partial_E R \cup \partial_L R \qquad (1)$$

Considérese ahora un sismo, es decir, un movimiento del terreno $\hat{\underset{\sim}{u}}\ (\underset{\sim}{x},t)$ definido en $\hat{R}$ para todo tiempo $t \geq 0$. Se supondrá que $\hat{\underset{\sim}{u}}$ satisface las siguientes condiciones:

$$\hat{\tau}_{ij}(\underset{\sim}{x},t)n_j = 0 \ , \quad \text{en} \quad \partial\hat{R} \qquad (2)$$

y que en el tiempo inicial

$$\hat{u}_i(\underset{\sim}{x},0) \equiv 0 \ ; \quad \text{en} \quad \hat{R} \cap E \qquad (3.a)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}(\underset{\sim}{x},0) \equiv 0 \ ; \quad \text{en} \quad \hat{R} \cap E \qquad (3.b)$$

Es decir, el sismo $\hat{\underset{\sim}{u}}\ (\underset{\sim}{x},t)$ en el instante inicial no ha alcanzado la estructura,por lo que la misma inicialmente no ha sido aún perturbada.

Supondremos que el suelo es elástico lineal, por lo que

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{en} \quad \hat{R} \tag{4.a}$$

$$\hat{\tau}_{ij} = \hat{C}_{ijpq} \frac{\partial \hat{u}_p}{\partial x_q} \; ; \quad \text{en} \quad \hat{R} \tag{4.b}$$

Por lo que respecta a la estructura, sus propiedades son arbitrarias; es decir, ella puede ser elástica, viscoelástica, lineal o no lineal; inclusive, podría ser un líquido viscoso.

El problema consiste en encontrar un sistema de desplazamientos $\underset{\sim}{u}^T(\underset{\sim}{x},t)$ definido en $\hat{R}UE_E$ para $t \geq 0$, tal que:

$$u_i^T(\underset{\sim}{x},0) = \hat{u}_i(\underset{\sim}{x},0) ; \quad \text{en} \quad R \tag{5.a}$$

y

$$u_i^T(\underset{\sim}{x},0) = 0 \quad ; \quad \text{en} \quad E_E \tag{5.b}$$

Además:

$$\frac{\partial u_i^T}{\partial t}(\underset{\sim}{x},0) = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}(\underset{\sim}{x},0) \; ; \quad \text{en} \quad R \tag{6.a}$$

y

$$\frac{\partial u_i^T}{\partial t}(\underset{\sim}{x},0) = 0 \; ; \quad \text{en} \quad E_E. \tag{6.b}$$

Es natural exigir las condiciones (5.b) y (6.b) porque como se hizo notar, en el tiempo t = 0 la estructura no ha sido aún excitada, en vista de las ecuaciones (3).

Además, $\underset{\sim}{u}^T$ satisface las ecuaciones de movimiento del suelo

$$\frac{\partial \tau_{ij}^T}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i^T}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad \text{en} \quad R \tag{7.a}$$

$$\tau_{ij}^T = \hat{C}_{ijpq} \frac{\partial u_p^T}{\partial x_q} \quad ; \quad \text{en} \quad R \tag{7.b}$$

y la condición de que la superficie libre del suelo no soporte tracciones; es decir;

$$\tau_{ij}^T n_j = 0 \quad ; \quad \text{en} \quad (\partial\hat{R} - E) \cup \partial_L R \tag{8}$$

Por lo que respecta a la estructura E_E, en ella los desplazamientos totales $u_i^T\ (\underset{\sim}{x},t)$ satisfacen las ecuaciones de movimiento correspondientes (que aquí se dejan sin especificar). Además, la superficie libre de la estructura también debe soportar tracciones nulas.

Finalmente, los desplazamientos y tracciones deben ser continuos al pasar del suelo a la estructura. La expresión matemática de esta condición es:

$$\left[u_i^T \right] = 0 \quad ; \quad \text{en} \quad \partial_E R \tag{9.a}$$

y

$$\left[\tau^{T}_{ij}\right] n_j = 0 \quad ; \quad \text{en} \quad \partial_E R. \tag{9.b}$$

Se supone aquí y en lo que sigue, que el vector normal n_i se toma en la dirección exterior al suelo. El paréntesis rectangular se refiere al salto de la función contenida en su interior. Es decir, el valor de la función en el lado positivo menos su valor en el lado negativo; por lado positivo de una superficie entendemos aquel hacia el cual apunta el vector normal. El vector normal se supondrá dirigido hacia fuera de R, por lo que el lado positivo corresponde a la estructura y el negativo al suelo. Finalmente, nótese que las condiciones (8) y (9) abarcan toda la frontera de R, en vista de la ec. (1).

Debe observarse que si la estructura consiste en un líquido no viscoso, las condiciones (9) no se cumplen, pues en este caso solo las componentes normales de los desplazamientos y de las tracciones son continuas. Aunque las modificaciones requeridas en la formulación que a continuación se presenta son inmediatas, para no extender demasiado la presentación, se ha preferido no incluirlas.

Para tratar la interacción suelo estructura como un problema de difracción, se puede utilizar un procedimiento análogo al usado en trabajos previos [9-11]. Se define el sistema de desplazamientos $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)$ en RUE_E para $t \geq 0$, por:

$$u_i = u_i^T - \hat{u}_i \; ; \quad \text{en} \quad R \tag{10.a}$$

y

$$u_i = u_i^T \qquad ; \quad \text{en} \quad E_E \tag{10.b}$$

Además, los esfuerzos asociados a u_i, se representarán por τ_{ij}.

Esta definición implica:

$$u_i(\underset{\sim}{x}, 0) = 0 \quad ; \quad \text{en} \quad RUE_E \tag{11.a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(\underset{\sim}{x}, 0) = 0 \; ; \quad \text{en} \quad RUE_E \tag{11.b}$$

en vista de las ecuaciones (5) y (6);

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \; ; \quad \text{en} \quad R \tag{12.a}$$

$$\tau_{ij} = \hat{C}_{ijpq} \quad \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \; ; \quad \text{en} \quad R \tag{12.b}$$

por (4) y (7);

$$\tau_{ij} \, n_j = 0 \; ; \qquad \text{en} \quad \partial R\text{-}E \tag{13.a}$$

por (2) y (8);

$$\tau_{ij} \, n_j = - \hat{\tau}_{ij} \, n_j \; ; \quad \text{en} \quad \partial_L R \tag{13.b}$$

por (8) y (10.*a*); y

$$[u_i] = \hat{u}_i \quad ; \quad \text{en} \quad \partial_E R \qquad (14.a)$$

$$[\tau_{ij}]n_j = \hat{\tau}_{ij}\, n_j; \quad \text{en} \quad \partial_E R \qquad (14.b)$$

por (10.*a*) y (10.*b*).

En vista de que en E_E los desplazamientos totales $\underset{\sim}{u}^T$ (ec. 10.*b*) coinciden con $\underset{\sim}{u}$, este desplazamiento satisface las ecuaciones de movimiento de la estructura en E_E y el sistema de tracciones a que da lugar en su superficie libre es cero. Estas condiciones junto con las ecuaciones (11-14) definen un problema bien planteado para $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)$, para hipótesis muy generales de comportamiento de la estructura que incluye materiales de respuesta retardada no lineales. Sin embargo, como se ha mencionado antes, si parte de la estructura está formada por un líquido (como en algunos casos de presas) no viscoso, las condiciones (9) en general no se cumplen y el planteamiento del problema debe modificarse.

3.- Información mínima para el estudio de la interacción suelo estructura.

El planteamiento del problema presentado en la sección 2 amerita ser discutido ya que tiene implicaciones interesantes.

En muchas ocasiones al estudiar el problema de interacción suelo-estructura, no es claro cuales son los datos acerca del movimiento del suelo que son indispensables para la formulación del problema. El sistema de ecuaciones (11-14) nos permite dar una respuesta precisa a esta cuestión.

En efecto, en la estructura $u_i(\underset{\sim}{x},t)$ corresponde al movimiento total, en vista de (10.b). Por otra parte, los únicos datos que intervienen en el sistema (11 a 14) aparecen en las ecuaciones (13.b y 14) y corresponden a los desplazamientos $\hat{u}_i$ y tracciones $\hat{\tau}_{ij}\ n_j$ asociados al movimiento del suelo en ausencia de la excavación y la estructura, y que ocurren en el lugar que posteriormente ocupa su base.

Lo anterior implica que al estudiar en un lugar el problema de interacción suelo-estructura, es necesario hacer una estimación ya sea por mediciones directas o por procedimientos indirectos de los desplazamientos y tracciones que un sismo produciría en el lugar que ocupará la base de la excavación y de la estructura ($\partial_E R \cup \partial_L R$) que se vaya a instalar; para el propósito del estudio del comportamiento de la estructura, cualquier otra información es irrelevante.

Conviene hacer notar que esta información puede ser reducida aún mas, si se toma en cuenta que los desplazamientos y tracciones en $\partial_E R \cup \partial_L R$ no son independientes. En efecto definiendo para $t \geq 0$ las funciones

$$U_i(\underset{\sim}{x},t) = \hat{u}_i(\underset{\sim}{x},t) \quad ; \text{ en } \partial_E R \cup \partial_L R \tag{15.a}$$

$$T_i(\underset{\sim}{x},t) = \hat{\tau}_{ij}(\underset{\sim}{x},t) n_j \quad ; \text{ en } \partial_E R \cup \partial_L R \tag{15.b}$$

y en vista de las ecuaciones (2 a 4) y (15.*a*), es claro que $\hat{u}_i(\underset{\sim}{x},t)$ satisface

$$\hat{u}_i(\underset{\sim}{x},0) = 0 \quad ; \text{ en } \hat{R} \cap E \tag{16.a}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}(\underset{\sim}{x},0) = 0 \quad ; \text{ en } \hat{R} \cap E \tag{16.b}$$

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial t^2} = 0 \; ; \text{ en } \hat{R} \cap E \text{ y } t \geq 0 \tag{16.c}$$

$$\hat{\tau}_{ij} = \hat{C}_{ijpq} \frac{\partial \hat{u}_p}{\partial x_q} \; ; \text{ en } \hat{R} \cap E \text{ y } t \geq 0 \tag{16.d}$$

$$\hat{\tau}_{ij}(\underset{\sim}{x},t)\, n_j = 0 \; ; \text{ en } E \cap \partial \hat{R} \text{ y } t \geq 0 \tag{16.e}$$

$$\hat{u}_i(\underset{\sim}{x},t) = U_i(\underset{\sim}{x},t) \; ; \text{ en } \partial_E R \cup \partial_L R \text{ y } t \geq 0 \tag{16.f}$$

Este sistema define un problema bien planteado para $\hat{u}_i(\underset{\sim}{x},t)$ en $\hat{R} \cap E$ y $t \geq 0$, porque $(E \cap \partial \hat{R}) \cup \partial_E R \cup \partial_L R$ es la frontera completa de $\hat{R} \cap E$ (fig. 1).

Por lo tanto, dado $U_i(\underset{\sim}{x},t)$ en $\partial_E R \cup \partial_L R$, es posible determinar $\hat{u}_i(\underset{\sim}{x},t)$ en $\hat{R} \cap E$ y en consecuencia los esfuerzos $\hat{\tau}_{ij}$ asociados a dicho campo de desplazamientos. Finalmente, $T_i(\underset{\sim}{x},t)$ queda determinado por la ecuación (15.b).

En resumen, las consideraciones anteriores hacen ver que un sistema mínimo de datos para el tratamiento de problemas de interacción, son los desplazamientos que el sismo produciría en la base de la excavación y la estructura, en ausencia de las mismas.

Por otra parte, una forma sistemática de utilizar esta información mínima para definir el problema, es por medio de las ecuaciones (11 a 14). En tal caso es necesario expresar $\hat{\tau}_{ij}\, n_j$ en términos de los datos $U_i(\underset{\sim}{x},t)$, lo cual puede hacerse resolviendo el problema definido por las ecuaciones (16), ya sea utilizando las funciones de Green asociadas al mismo o por algún otro procedimiento.

4.- <u>Aplicación a una estructura linealmente elástica.</u>

Para ilustrar el planteamiento presentado en el capítulo 2, se aplicará ahora al caso en que la estructura es elástica y lineal; es decir, después de construida la estructura la región E_E se supondrá ocupada por un material linealmente elástico.

El tensor elástico del suelo se ha denotado por

$\hat{C}_{ijpq}$ $(\underset{\sim}{x})$ $(\underset{\sim}{x}\varepsilon\hat{R})$, el cual depende de la posición ya que el material no se ha supuesto homogéneo. Para simplificar la notación, conviene definir ahora el tensor elástico C_{ijpq} $(\underset{\sim}{x})$ en RUE_E de tal manera que para $\underset{\sim}{x}\varepsilon E_E$, el mismo sea el tensor elástico del material que forma la estructura y

$$C_{ijpq}\ (\underset{\sim}{x}) = \hat{C}_{ijpq}\ (\underset{\sim}{x})\ ; \quad \text{para } \underset{\sim}{x}\varepsilon R \tag{17}$$

Entonces, el sistema de ecuaciones (11 a 14), junto con las condiciones de que las ecuaciones de movimiento se satisfagan en la estructura y que su frontera libre no soporte tracciones, conducen a las ecuaciones:

$$u_i(\underset{\sim}{x},0) = 0\ ; \quad \text{en} \quad RUE_E \tag{18.a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}\ (\underset{\sim}{x},0) = 0; \quad \text{en} \quad RUE_E \tag{18.b}$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho\, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0\ ; \quad \text{en } RUE_E \tag{18.c}$$

$$\tau_{ij} = C_{ijpq}\, \frac{\partial u_p}{\partial x_q}\ ; \quad \text{en } RUE_E \tag{18.d}$$

$$\tau_{ij}\ n_j = 0 \quad ; \quad \text{en} \quad \partial(RUE_E) - \partial_L R \tag{18.e}$$

$$\tau_{ij}\ n_j = -\ \hat{\tau}_{ij}\ n_j \quad ; \quad \text{en } \partial_L R \tag{18.f}$$

$$[u_i] = U_i \quad ; \quad \text{en} \quad \partial_E R \tag{18.g}$$

$$[\tau_{ij}]n_j = \hat{\tau}_{ij}\, n_j \;; \quad \text{en} \quad \partial_E R \tag{18.h}$$

Ya que los únicos datos del problema son los desplazamientos U_i $(\underset{\sim}{x},t)$ (para $\underset{\sim}{x}\varepsilon\partial_E R U \partial_L R$ y $t \geq 0$), es necesario complementar las ecuaciones (18) con las ecuaciones (16). Por lo tanto las ecuaciones (16) y (18) constituyen un sistema de ecuaciones acoplado que define el problema de interacción suelo estructura en términos de los datos $U_i(\underset{\sim}{x},t)$.

Para terminar conviene hacer una advertencia. Podría pensarse que para evitar tratar los sistemas (16) y (18) en forma acoplada pueden darse también como dato en forma independiente las tracciones T_i en la base de la excavación $(\partial_E R U \partial_L R)$. Sin embargo, en problemas similares cuando se dan datos incompatibles, es frecuente que se llegue a resultados absurdos. Probablemente lo mismo sucedería en el problema discutido aquí, aunque este punto no ha sido suficientemente analizado.

REFERENCIAS

1. Chopra, A. K. y J. A. Gutiérrez; Earthquake response analysis of multistorey buildings including foundation interaction; Earthquake Eng. and Structural Dynamics, 3(1), 65-77, 1974.

2. Gupta, B. N.; Effect of foundation embedment on the dynamic behaviour of the foundation-soil system, Geotechnique 22(1),129-137,1972.

3. Jennings, P. C. y J. Bielak; Dynamics of building soil interaction, Bull. Seism. Soc. Am. 63(1), 9-48,1973.

4. Luco, J. E.; Dynamic interaction of a shear wall with the soil , J. Engng. Mech. Div., ASCE, 95(2), 333-346, 1969.

5. Roesset, J. M. R. V. Whitman y R. Dobry; Modal analysis for structures with foundation interaction, J. Structural Div., ASCE, 99(3), 399-416,1973.

6. Rosenberg, L. A.; On the interaction between ground and structure during earthquakes, Bull, International Inst. Seism. and Earthquake Engng., 2(1), 29-36, 1965.

7. Vaish, A. K. y A. K. Chopra, Earthquake finite element analysis of structure-foundation systems, J. Engng. Mech. Div., ASCE, 100(6), 1101-1116, 1974.

8. Whitman, R. V., Dynamic soil-structure interaction, to be published, 1974.

9. Herrera, I., A perturbation method for elastic wave propagation: I. Non-parallel boundaries. Journal of Geophysical Research. 69 (18), 1964. pp. 3845-3851.

10. Herrera, I. y A. K. Mal; A perturbation method for elastic wave propagation: 2. Small inhomogeneities. Journal of Geophysical Research. 70 (4), 1965. pp. 871-883.

11. Herrera, I.; A perturbation method for elastic wave propagation 3. Thin inhomogeneities. Geofísica International 5 (1), 1965. pp. 1-14.