

**CONTRIBUCION PARA LA ADMINISTRACION CIENTIFICA
DEL AGUA SUBTERRANEA DE LA CUENCA DE MEXICO**

I. HERRERA*
R. MARTINEZ*
G. HERNANDEZ*

RESUMEN

En este trabajo se presenta un nuevo modelo del Sistema Acuífero de la Cuenca de México, el cual está constituido por cuatro cuerpos con características y funcionamiento hidráulico diferentes. El superior lo forma un acuitardo con valores promedio de 70 m de espesor y en el que el flujo es esencialmente vertical. Bajo esta formación se localiza el acuífero granular con 800 m de espesor medio, en cuyos 300 m superiores se lleva a cabo la extracción del agua subterránea. Subyaciendo estas formaciones se encuentra un acuífero volcánico de 2 000 m de espesor medio, el que está limitado inferiormente por rocas carbonatadas sedimentarias de espesor y características desconocidos. Este sistema se modeló en tres dimensiones con cuatro capas y 1 344 celdas por capa, simulándose el acuitardo a través de la formulación integrodiferencial de Herrera. Los resultados preliminares indican que para tiempos medios del orden de quince años, la alimentación desde el cuerpo carbonatado sedimentario no es significativa en el comportamiento de los cuerpos superiores.

ABSTRACT

In this paper, a new model of the aquifer system of the Basin of Mexico is presented. This system consists of four water bodies each one presenting different characteristics and hydraulic behaviour. The upper water body is an aquitard with average thickness of 70 m where flow is essentially vertical. Under this formation there is a granular aquifer 800 m average thickness, where groundwater exploitation is performed in the upper 300 m. Sublaying both formations a volcanic aquifer 2000 m mean thickness is located, limited below by carbonate sedimentary rocks of unknown thickness and characteristics. This system was modelled in three dimensions with four layers of 1344 cells each, simulating the aquitard through Herrera's integrodifferential formulation. Preliminary results indicate that for intermediate times of an order of fifteen years, the input from the carbonated sedimentary body is not significant for the behavior of the upper bodies.

* *Instituto de Geofísica, UNAM, MEXICO.*

INTRODUCCION

Debido al alto costo de otras alternativas, se prevé que el abastecimiento de agua de la Ciudad de México continuará por muchos años dependiendo en forma sustancial de los recursos subterráneos. El volumen que se requiere para abastecer a esta metrópoli, la más grande del mundo, es ya enorme y continuará aumentando en el futuro. El suministro actual es de $50 \text{ m}^3/\text{seg}$, de los cuales $40 \text{ m}^3/\text{seg}$, que representan el 80%, provienen del subsuelo. Ante estos hechos, resulta evidente que es necesario utilizar este recurso con gran eficiencia.

Por otra parte, el sistema acuífero de la Cuenca de México es sumamente complejo. Localizada en la parte central del Eje Neovolcánico Mexicano, tiene una altitud promedio de 2 400 m.s.n.m. y una área aproximada de $11\,000 \text{ km}^2$, de los cuales $4\,700 \text{ km}^2$ corresponden a la porción sur, donde se encuentra el área urbana. Limitada al sur por la Sierra de Chichinautzin, al Norte por la Sierra de Pachuca, al Este por la Sierra Nevada y al Oeste por la Sierra de las Cruces, superficialmente la Cuenca está dividida en once subcuencas: Xochimilco, Cuautitlán, Texcoco, Tochac, Churubusco, Pachuca, Chalco, Tecomulco, Ciudad de México, Teotihuacán y Apan.

El contenedor del sistema está formado básicamente por rocas volcánicas originadas por diversos aparatos de emisión en diferentes períodos de actividad: andesitas, dacitas y riódacitas, del Mioceno-Pleistoceno y basaltos del Cuaternario. Los materiales presentes en la Cuenca son de origen volcánico y lacustre, y constituyen un sistema acuífero complejo formado por tres grandes cuerpos. En la parte superior dos grandes estratos de arcilla separados por una capa delgada de material arenoso, la llamada capa dura que, a pesar de su reducido espesor, hidráulicamente tiene gran importancia debido a su alta permeabilidad. El acuífero actualmente en explotación se extiende por debajo de la segunda capa de arcilla y está formado por material granular más grueso: piroclastos, conglomerados y otro tipo de material volcánico. Le subyacen rocas volcánicas fracturadas, cuya base llega a estar a más de 3 000 m de profundidad, por lo que se trata de un acuífero de enorme espesor. Bajo estas últimas se encuentran rocas carbonatadas de origen sedimentario de espesor desconocido.

Un aspecto que complica aún más la administración del recurso subterráneo en la Cuenca de México es el hundimiento del terreno asociado a la explotación de agua subterránea y que es de gran magnitud, debido principalmente a la alta compresividad de la arcilla.

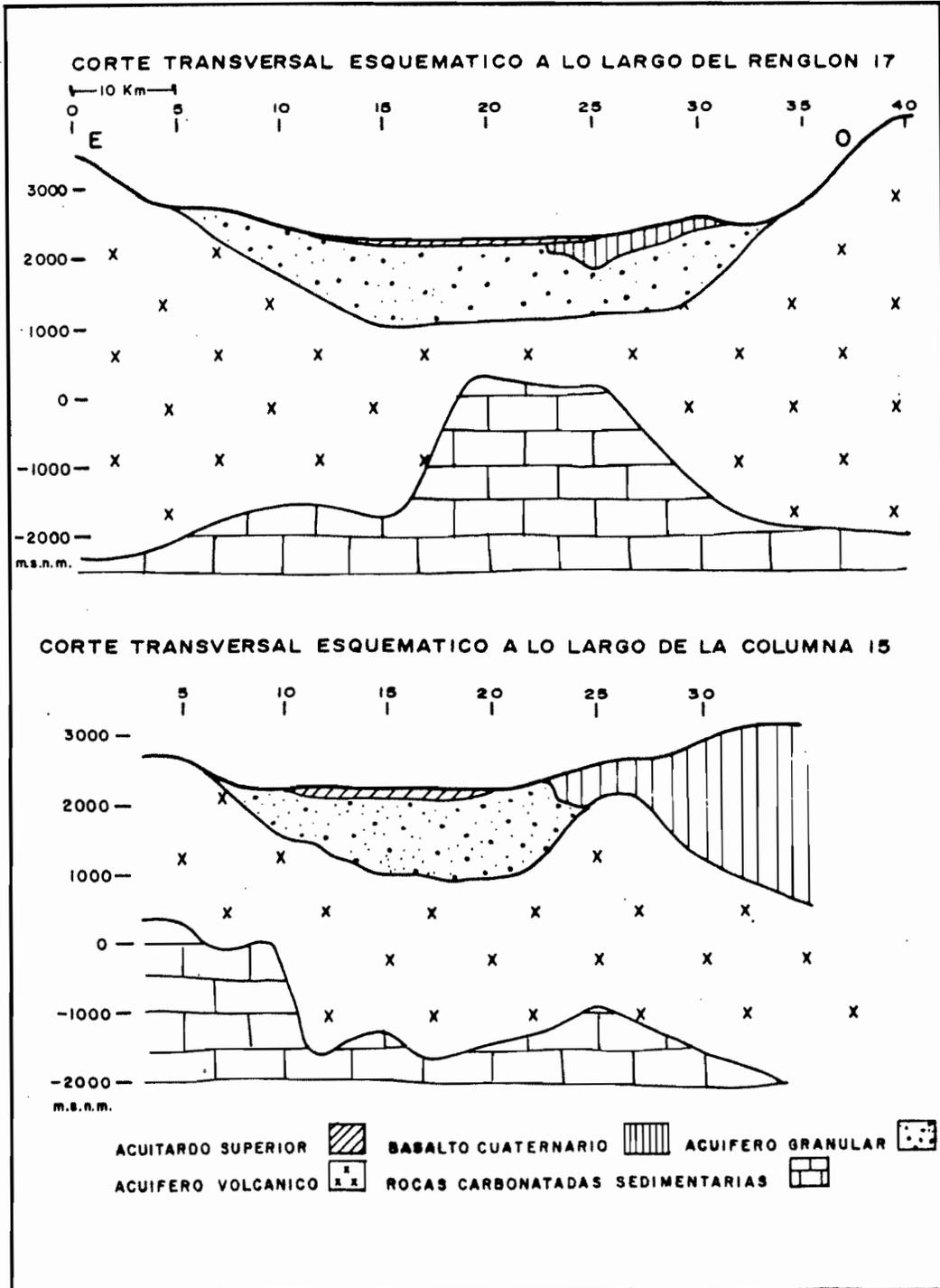


Fig. 1. Cortes transversales esquemáticos.

A la complejidad hasta aquí descrita debe agregarse la debida a los procesos geoquímicos que tienen lugar en la cuenca subterránea. Por una parte los motivados por causas naturales. Destacan entre ellos los que origina la composición química de las arcillas. Por otra parte están los antropogénicos: los generados por el quehacer cotidiano de la gran colectividad que habita el Valle y la que provoca la actividad industrial que ahí se asienta y que es, por mucho, la mayor del país.

Todo lo anterior hace ver que en la Ciudad de México, la administración del agua subterránea requiere de métodos científicos avanzados. El progreso mundial que ha habido en los métodos para administrar en forma científica los recursos subterráneos ha sido espectacular, especialmente a partir de la década de los setentas. Y aquí el término administración se emplea en un sentido amplio, de manera que incluye planeación, implementación, y control adaptativo de políticas y programas relacionados con exploración, inventario, desarrollo y operación de los recursos subterráneos.

Buena parte de este progreso se ha derivado del avance habido en la capacidad para modelar matemáticamente y de esta manera predecir el comportamiento de los sistemas hidrológicos frente a diferentes opciones de explotación, utilizando para ello a la computación electrónica. Los modelos numéricos constituyen una herramienta fundamental para resolver problemas geohidrológicos relevantes y suministran al administrador información indispensable para tomar las decisiones con fundamento adecuado.

En este trabajo se presenta una nueva versión de un modelo numérico de la Cuenca de México, con la intención de que constituya una herramienta útil para quienes tienen la responsabilidad de administrar el recurso. Un antecedente importante del presente trabajo es el modelo que desarrolló Herrera con un grupo de colaboradores y que apareció en tres publicaciones [1-3]. En la primera de ellas [1], se presentaron resultados preliminares, en la segunda [2] se establecieron las conclusiones relativas al balance, funcionamiento hidrológico y hundimiento que se obtuvieron en ese estudio. Finalmente, en la tercera [3] se presentó un modelo perfeccionado que ampliaba su versatilidad. La metodología empleada en estos trabajos fue la de ecuaciones integrodiferenciales que se originó en México, desarrollada por Herrera y colaboradores [4-8].

Este nuevo modelo que aquí se presenta, constituye un avance con respecto a los trabajos referidos antes por varias razones. La información disponible se ha amplia-

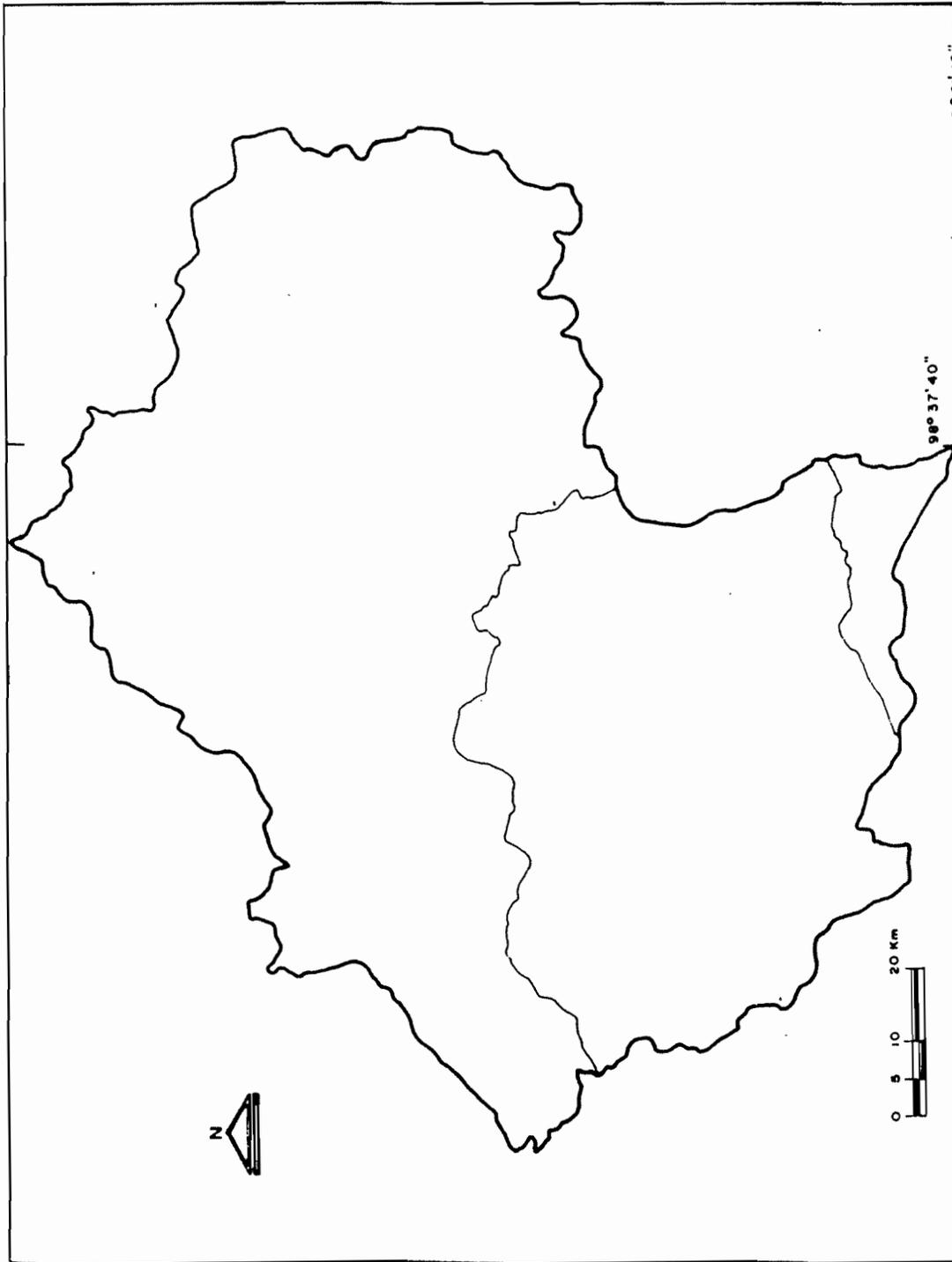


Fig. 2. Posición relativa de la zona de estudio en la cuenca.

do en forma muy importante, especialmente como resultado de los estudios que sobre la estructura subterránea del Valle se han realizado a partir del gran sismo de 1985. Aunque estos estudios fueron planteados con objetivos de sismología e ingeniería sísmica, sin embargo la información así generada tiene gran valor para conocer los acuíferos a profundidad mucho mayor que anteriormente. Por otra parte, en otros modelos el tratamiento había sido bidimensional. En esta ocasión, el tratamiento numérico es tridimensional. La necesidad de proceder de esta manera es, en buena medida, consecuencia del conocimiento ampliado de las estructuras geohidrológicas de que ahora se dispone y que han puesto en evidencia espesores muy superiores a los que se habían incluido en los modelos desarrollados en el pasado.

2.- EL SISTEMA HIDROLOGICO SUBTERRANEO.- Los materiales arcillo-arenosos, en algunos lugares interdigitados con materiales volcánicos recientes, que cubren los acuíferos de la Cuenca de México, constituyen desde el punto de vista hidráulico estratos semiconfinantes. Este sistema semiconfinante está dividido en dos grandes acuitardos separados por un estrato de materiales granulares arenosos, de espesor reducido de 3 m en promedio: la llamada capa dura.

Bajo estos materiales lacustres se encuentran las formaciones acuíferas actualmente en explotación; los llamados depósitos profundos. Un estrato granular de origen volcánico y espesor considerable, superior a mil metros en algunas zonas. En el interior de este estrato y abarcando parte de él, se encuentra un cuerpo de basalto fracturado (Fig. 1). Por debajo de este acuífero granular está un acuífero de roca volcánica fracturada que se extiende hasta más de 2 000 m de profundidad, el cual sobreyace a las rocas sedimentarias carbonatadas localizadas bajo el nivel medio del mar.

Desde el punto de vista hidráulico el sistema hidrológico subterráneo de la Cuenca de México constituye un sistema de acuíferos semiconfinados. Las recargas laterales del sistema se originan en las montañas que circundan al Valle: Sierra de Chichinautzin, Sierra de las Cruces y Sierra Nevada y fueron analizadas durante este estudio. Los resultados obtenidos se presentan en este mismo volumen [9]. Además, debido a la explotación de los acuíferos existe en ellos una depresión piezométrica, en donde los niveles son menores a los del acuitardo, lo que ha generado gradientes piezométricos en las arcillas que dan lugar a un drenaje vertical hacia los cuerpos inferiores. Por consiguiente, parte de la recarga de los acuíferos principales proviene de los acuitardos. Esto, además, produce asentamiento del terreno, que en algunas zonas

de la Ciudad de México ha llegado a ser muy acentuado creando problemas difíciles para las obras civiles.

Debido a la gran extensión que abarca la Cuenca de México y a la insuficiente información sobre algunas zonas, fue necesario incluir solo parte de la Cuenca en el modelo que se desarrolló. La parte que se incluyó en el modelo y su posición relativa con respecto al Valle se muestra en la Figura 2.

En la Figura 3 se muestra la topografía del terreno. El espesor y profundidad de la capa dura están en las Figuras 4 y 5. Este estrato, a pesar de ser muy delgado, ha jugado un papel muy importante en las cimentaciones de las obras civiles y en la explotación del agua subterránea de la Ciudad de México. Su importancia en las cimentaciones se debe a su solidez como apoyo de las mismas. Desde el punto de vista hidrológico, constituye un dren de alta permeabilidad, ubicado estratégicamente entre dos estratos de muy baja permeabilidad pero alta capacidad de almacenamiento. En la primera etapa de explotación de los acuíferos de la Ciudad de México los pozos perforados fueron de poca profundidad, por lo que la mayor parte del gasto provenía de las arcillas a través de la capa dura, cuya profundidad promedio es de un poco más de 30 metros.

El espesor del acuitardo o arcilla superior es esencialmente igual a la profundidad de la capa dura. El de la arcilla inferior se puede obtener de la Figura 6. Las Figuras 7-11, dan las profundidades de las cimas del acuífero granular y del basalto fracturado, así como las bases del basalto fracturado, del acuífero granular y de la roca volcánica. En el caso de la Figura 7, en algunos casos la cima granular cubre a los basaltos fracturados, cuya cima se presenta en la Figura 8 y su base en la Figura 9. La Figura 10 corresponde a la base del acuífero granular, que en algunos casos puede ser la cima del volcánico, principalmente donde el basáltico no está en contacto con el acuífero volcánico. La base de este último acuífero corresponde, en la Figura 11, a la cima de las rocas sedimentarias carbonatadas, cuyo espesor se desconoce. El espesor de los basaltos fracturados se indica en la Figura 12.

3.- MODELOS MATEMATICOS COMPUTARIZADOS DE LA CUENCA DE MEXICO.- Fue Roberto Gayol quien en 1925 informó a la Sociedad de Ingenieros y Arquitectos de México que la Ciudad se estaba hundiendo y que la causa probable era [10, 11]:

La perturbación que en el fondo del valle de México ha producido el drenaje de las aguas del subsuelo.

Gayol se refería al bombeo de agua que se hacía a través de los pozos profundos, cuya construcción se inició en la primera década del Siglo XX y que se amplió considerablemente a partir de 1930. Posteriormente, José Antonio Cuevas propuso a Nabor Carrillo que estudiara la influencia del bombeo sobre el hundimiento y en 1946 Carrillo [12, 13] expuso la explicación matemática del fenómeno, basado en los conceptos de la teoría de la consolidación de Terzaghi y utilizando los datos de observaciones experimentales que se habían realizado.

A partir de que Carrillo explica los hundimientos observados por la Dirección de Geografía en varios puntos de la Ciudad, se inicia el estudio sistemático del subsuelo y se amplía también el estudio de las Aguas Subterráneas de la Cuenca de México. La correlación de bancos y las primeras mediciones piezométricas realizadas en 1952 por Marsal, Hiriart y Sandoval [14], permiten corroborar los hallazgos de Nabor Carrillo. A esta información se agregan las investigaciones de Zeevaert [15] y la labor muy destacada de la Comisión Hidrológica de la Cuenca del Valle de México (S.R.H.), la cual realizó nivelaciones periódicas, instaló un gran número de bancos de nivel y construyó y operó más de 100 estaciones piezométricas, desde 1953. También hizo mediciones complementarias, que están contenidas en sus publicaciones [16, 17]. Esta labor es continuada por la Comisión de Aguas del Valle de México, que la sustituye a partir de 1974. El comportamiento de las arcillas es estudiado en forma muy amplia por Marsal y Mazari [18, 19]. Una revisión bastante completa del problema del hundimiento y de los estudios realizados hasta esa fecha fue presentada por Hiriart y Marsal en 1969 [20]. Una revisión bastante completa del problema del hundimiento y de los estudios realizados hasta esa fecha fue presentada por Hiriart y Marsal en 1969 [20]. Posteriormente Juárez Badillo [21-23] estudia en forma amplia las ecuaciones constitutivas de las arcillas y Herrera [24-26] establece nuevas bases para la formulación de las mismas.

La modelación matemática y computacional en Hidrología Subterránea y en Mecánica de Suelos, como herramienta para la administración científica de los recursos subterráneos es un campo relativamente nuevo y cuya aplicación práctica se ha extendido sólo en años recientes. Desde una perspectiva actual, los trabajos iniciados por Nabor Carrillo hace ya más de cuarenta años, pueden considerarse como importantes antecedentes de la aplicación de esta herramienta en la Cuenca de México.

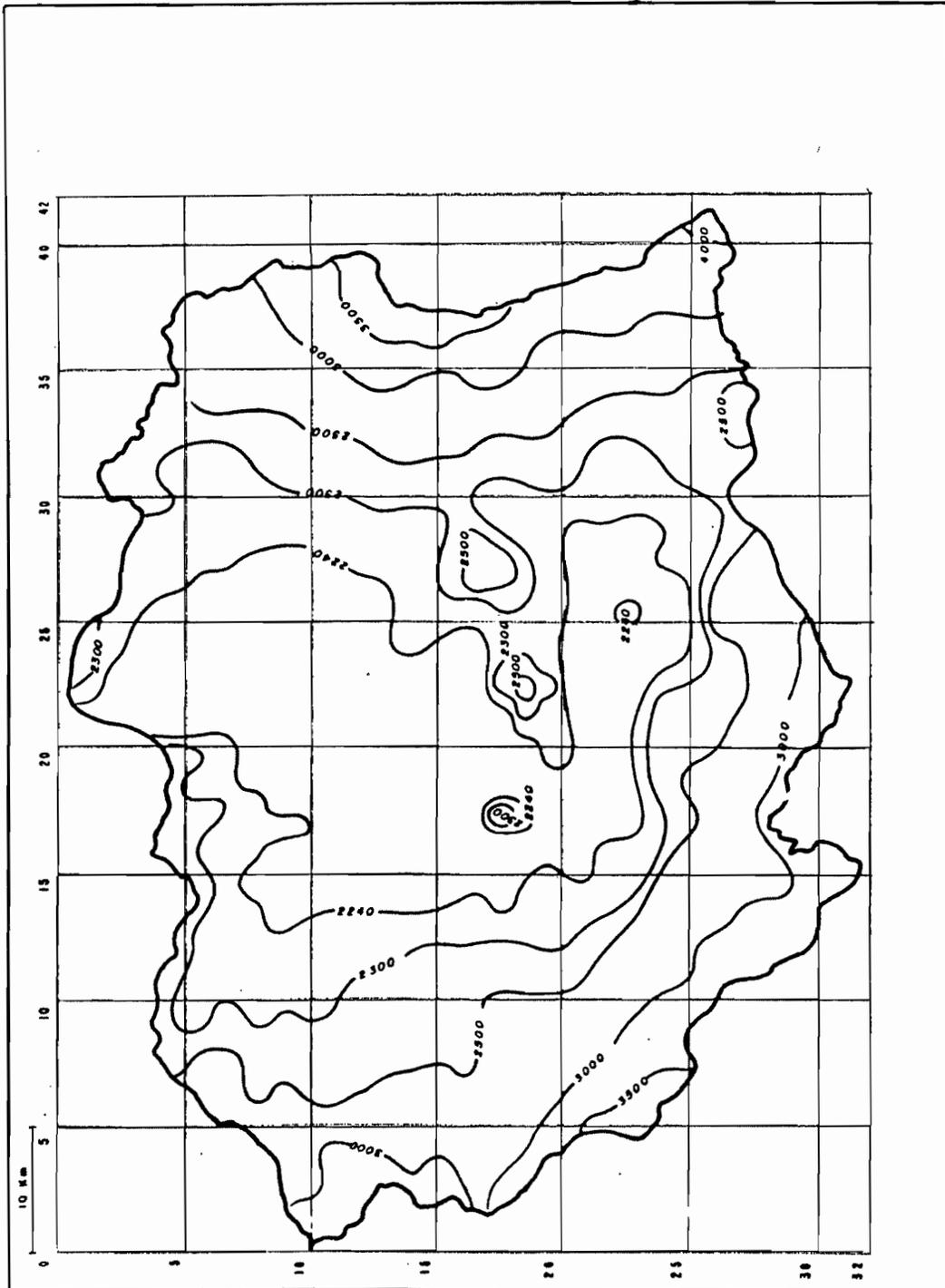


Fig. 3. Topografía de la porción sur del valle. m.s.n.m.

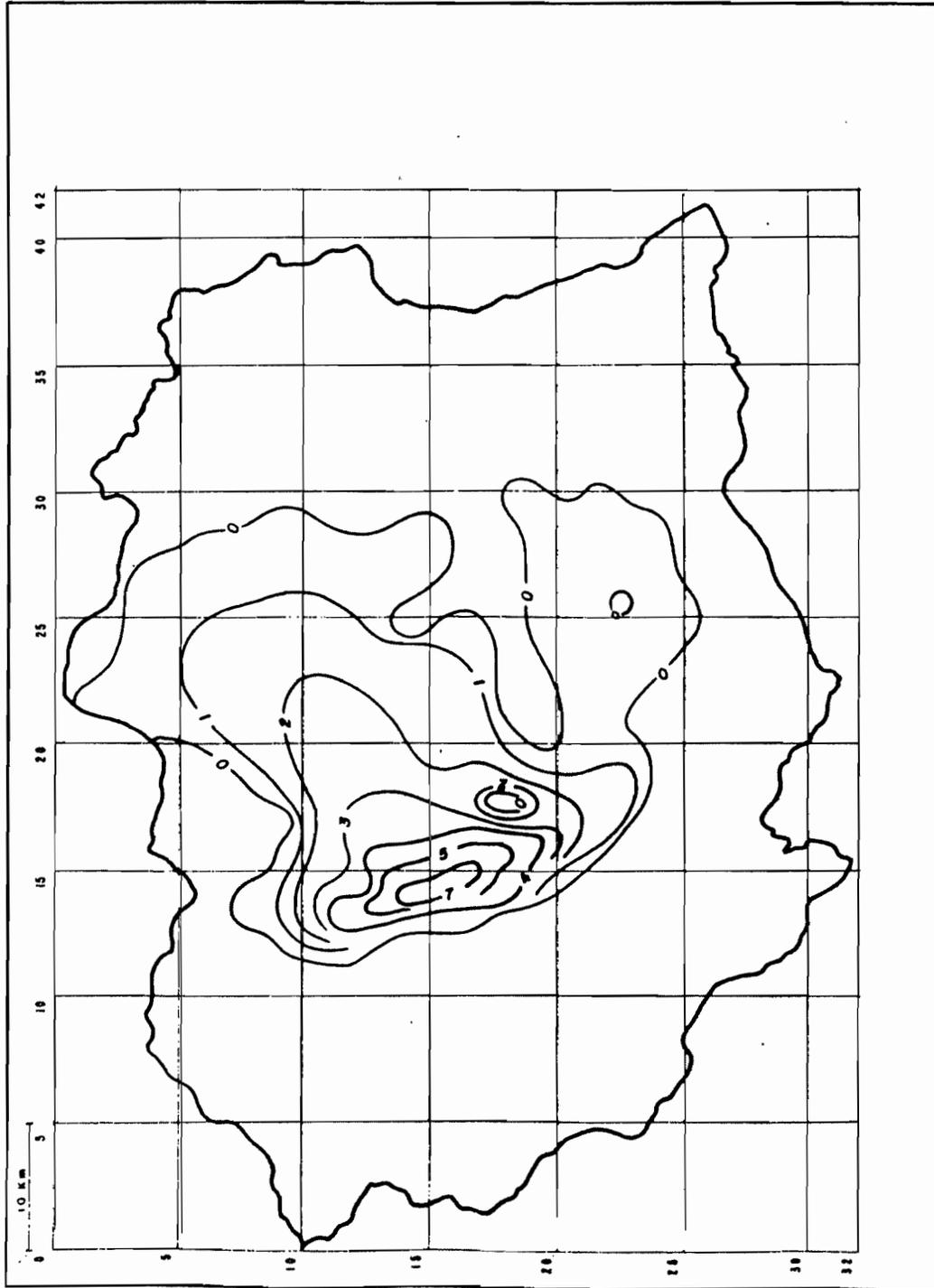


Fig. 4. Espesor de la capa dura. m.

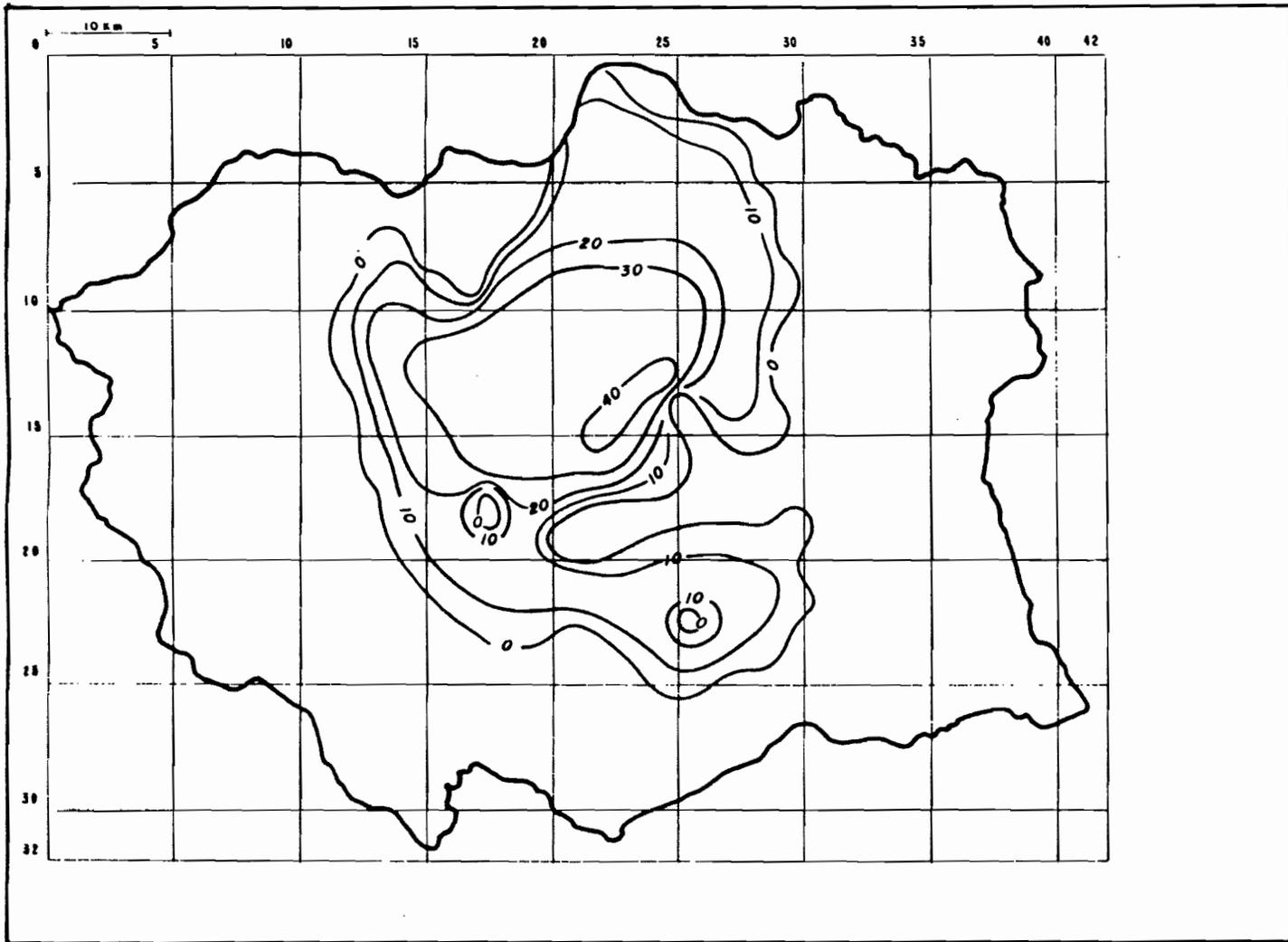


Fig. 5. Profundidad de la cima de la capa dura. Espesor del acuitardo superior. m.

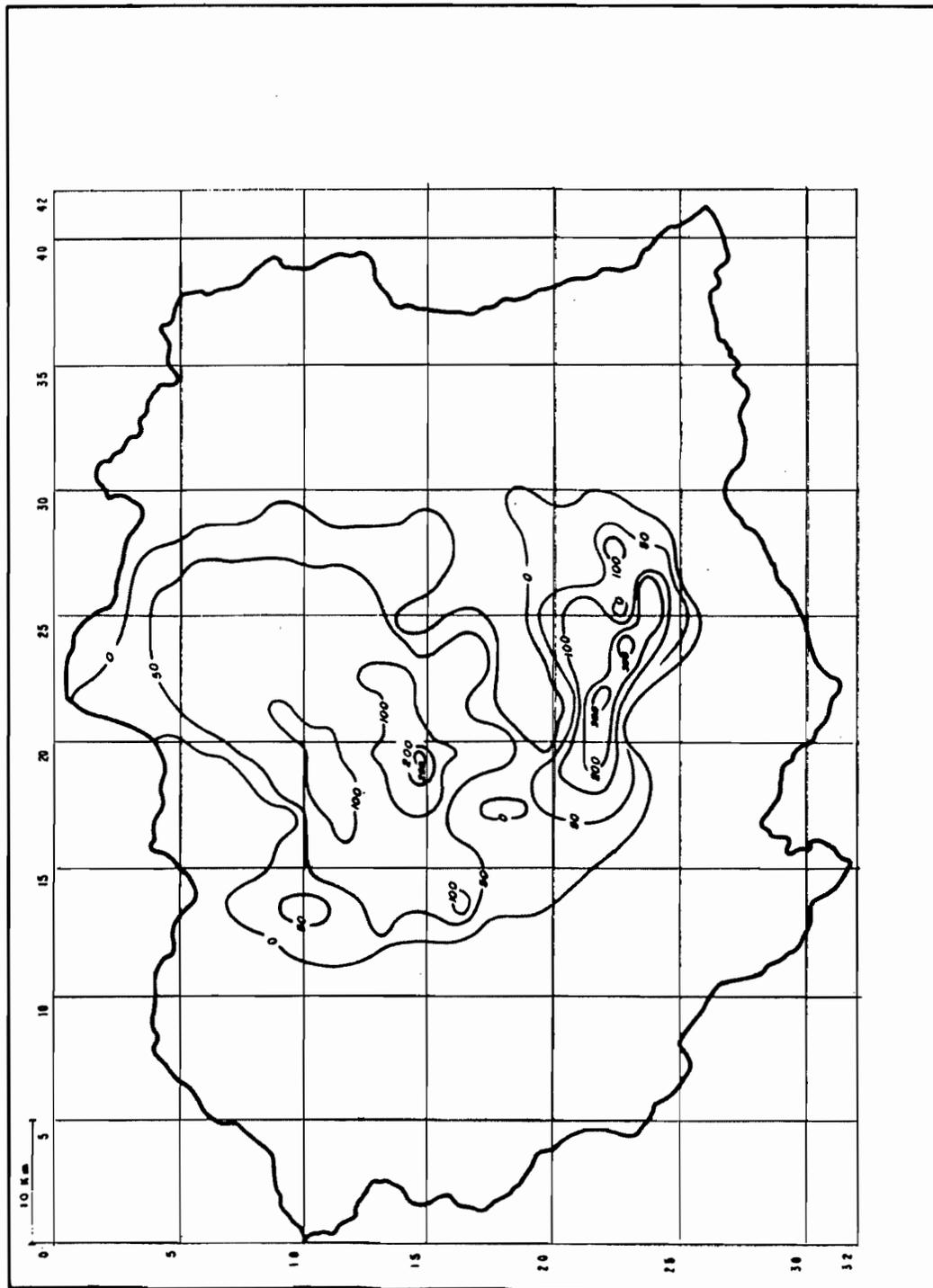


Fig. 6. Espesor total del acuitardo. m.

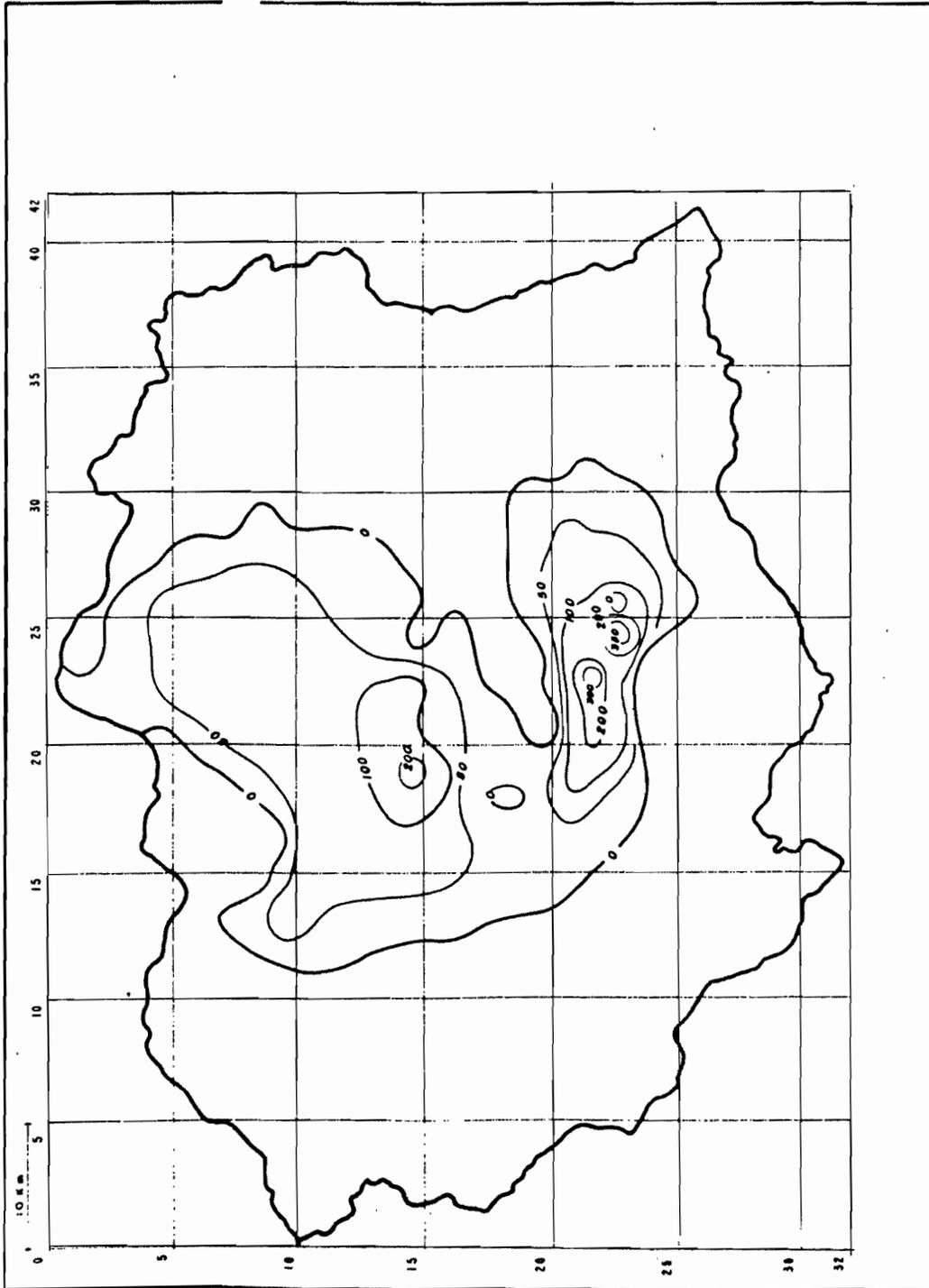


Fig. 7. Profundidad de la base del acuitardo inferior. m.

Aún desde el punto de vista internacional, el tratamiento de acuíferos semiconfinados múltiples, que es el caso de los de la Cuenca de México, es difícil, debido a que un tratamiento adecuado de la arcilla requiere de una discretización muy fina. Un paso importante en los desarrollos teóricos encaminados a la construcción de modelos para esta clase de sistemas tuvo lugar en 1968, cuando Germán Figueroa expone el problema a Ismael Herrera, quien propone un tratamiento integrodiferencial [4, 5]. Esta misma idea es ampliada y sistematizada a partir de 1973 [6-8], y por invitación es presentada ante la American Water Resources Association, en 1976 [27]. Se hace ver entonces que la Teoría Integrodiferencial propuesta en 1968, constituye un método poderoso y con base en ella se construye un modelo numérico [8] que demostró ser el más eficiente [28], ya que reduce la capacidad de memoria y el tiempo de cómputo en, al menos, un orden de magnitud. Posteriormente, el procedimiento se perfeccionó aún más al desarrollarse una manera de tratar numéricamente en forma eficiente los tiempos cortos [29]. Por invitación, esta forma de proceder se presentó en el John Ferris Symposium, que tuvo lugar en Baltimore en 1982.

De 1979 a 1981, Herrera y colaboradores [1-3] construyen para el Departamento del Distrito Federal, un modelo computacional basado en el Método Integro-Diferencial. En 1979 [1] se presentan resultados preliminares y en enero de 1982 [2, 3] se publican los resultados finales, así como diversos perfeccionamientos. Debe señalarse, sin embargo, que este modelo es bidimensional y desde luego está basado en la información sobre el subsuelo disponible hasta 1981.

4.- EL MODELO ACTUAL. - A continuación se explican las bases y la forma en que se construyó el nuevo modelo, desarrollado durante el presente estudio. Las ecuaciones que gobiernan el flujo subterráneo son:

$$\partial(K\partial s/\partial x)/\partial x + \partial(K\partial s/\partial y)/\partial y + \partial(K\partial s/\partial z)/\partial z = S_s \partial s/\partial t \quad (4.1)$$

en los acuíferos principales. En los acuitardos, en cambio, las ecuaciones son:

$$\partial(K'\partial s'/\partial z)/\partial z = S'_s \partial s'/\partial t \quad (4.2)$$

debido a que en ellos el flujo es predominantemente vertical. El flujo en la capa dura se consideró bidimensional, por lo que ahí se aplicaron las ecuaciones:

$$\partial(T\partial s/\partial x)/\partial x + \partial(T\partial s/\partial y)/\partial y + K'[\partial s'/\partial z]_{z=0} = S \partial s/\partial t \quad (4.3)$$

En estas ecuaciones, al igual que en lo que sigue, la notación utilizada es la que se da en el Apéndice. Debe observarse que el tercer término del miembro izquierdo de la ecuación (4.3), es el aporte que hacen los acuitardos a la capa dura.

Las condiciones de frontera entre los diferentes estratos son:

$$s' = s \quad K' \partial s' / \partial z = K \partial s / \partial z \quad (4.4)$$

entre las arcillas y el acuífero granular; y continuidad de los niveles piezométricos y de la componente vertical de la velocidad de flujo, al pasar de unas a otras de las demás formaciones. Para el tratamiento de los acuíferos principales se utilizó el modelo modular tri-dimensional de McDonald y Harbaugh [30] y para el de los acuitardos la Teoría Integro-Diferencial de Herrera y colaboradores, a que se ha hecho referencia en la Sección 3. Los rasgos esenciales de la forma en que estos dos procedimientos se combinaron, se explican a continuación.

Debido a la segunda condición de las ecuaciones (4.4) hay un aporte del acuitardo a través de la frontera superior. Este flujo se calculó por medio de la teoría íntegro-diferencial y se incorporó en el modelo tridimensional de los acuíferos principales a través de la frontera superior.

El modelo de McDonald y Harbaugh es un modelo de celdas. En esta clase de procedimiento (véase, por ejemplo, [31]), la región ocupada por los acuíferos se divide en un número finito de celdas (Fig. 13) y las ecuaciones de flujo se integran sobre cada una de ellas. Como se mencionó antes, a los acuíferos principales se les dio el tratamiento tridimensional, por lo que las celdas en este caso son paralelepípedos. Las celdas se numeran utilizando los índices i, j y k . Además el número total de divisiones en las dos direcciones horizontales son I y J mientras que en la vertical son L .

Al integrar la ecuación (4.1) se obtiene:

$$[T_{*,j,k}^x \partial s / \partial n]_{i-1/2}^{i+1/2} + [T_{i,*,k}^y \partial s / \partial n]_{j-1/2}^{j+1/2} + [T_{i,j,*}^z \partial s / \partial n]_{k-1/2}^{k+1/2} = [S_s V \partial s / \partial t]_{i,j,k} \quad (4.5)$$

Los seis términos que aparecen en el miembro izquierdo de la ecuación (4.5) representan el flujo a través de cada una de las seis caras de la celda correspondiente a los índices (i, j, k) . En un paso posterior estos términos se aproximan por:

$$[T^x \partial s / \partial n]_{i+1/2,j,k} \approx T_{i+1/2,j,k}^x [s_{i+1,j,k} - s_{i,j,k}] / \Delta x \quad (4.6)$$

y aproximaciones similares para los demás. Al término del miembro derecho de la ecuación (4.5), se le aplica un esquema Teta de integración en el tiempo (véase, por ejemplo, [32]), y de esta manera se obtienen ecuaciones heptadiagonales.

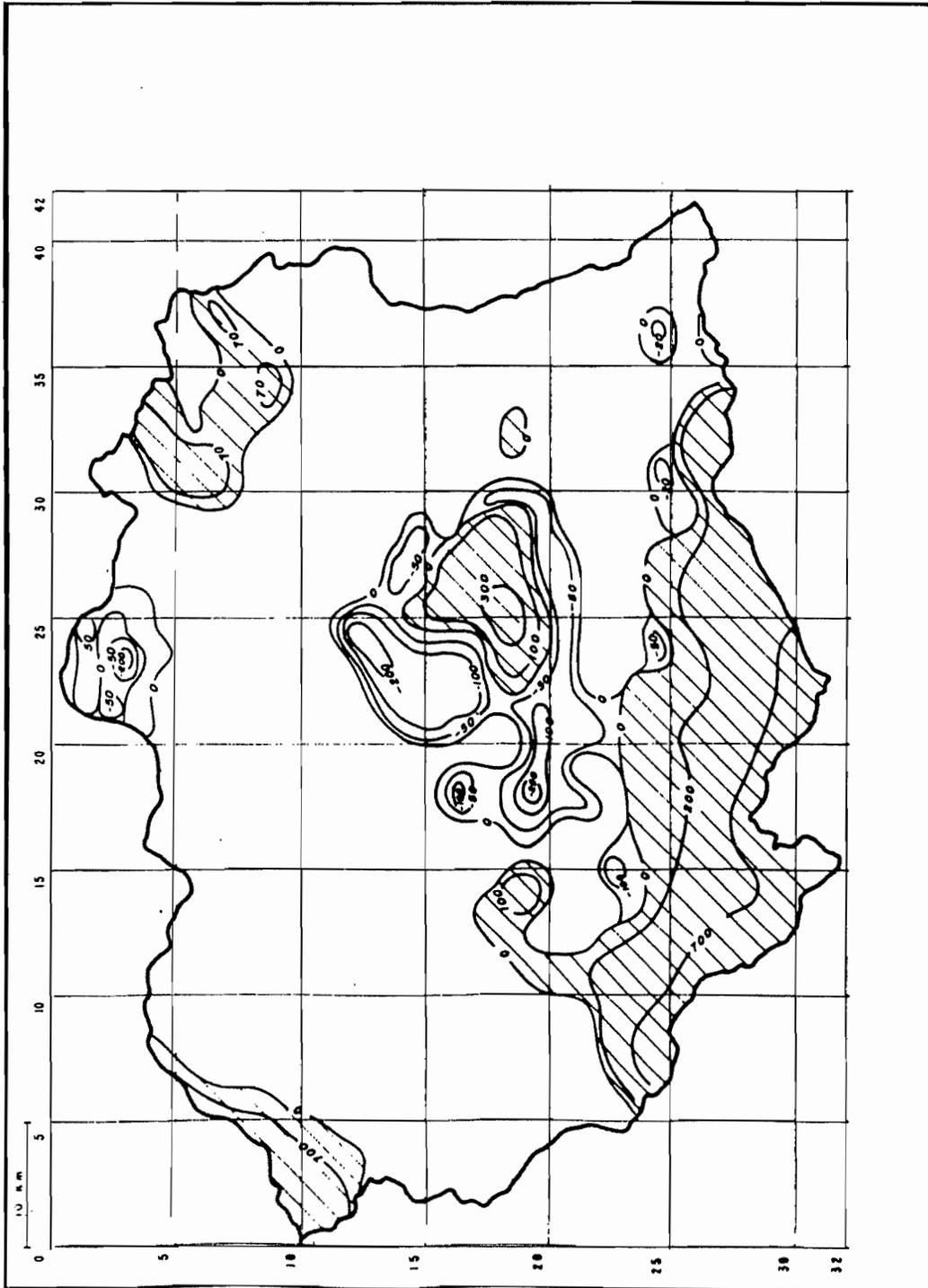


Fig. 8. Profundidad de la cima del basalto fracturado. m.

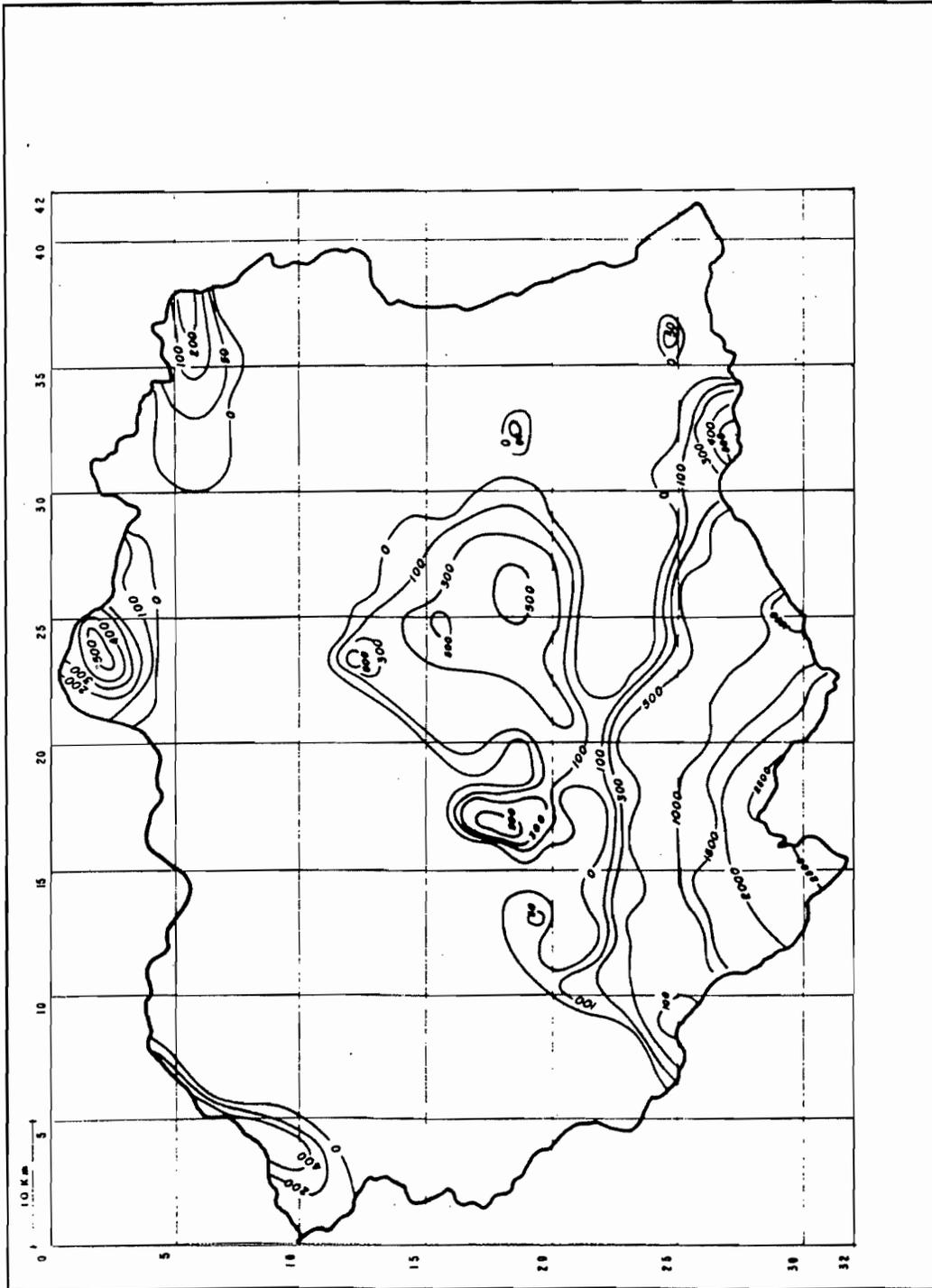


Fig. 9. Profundidad de la base del basalto fracturado. m.

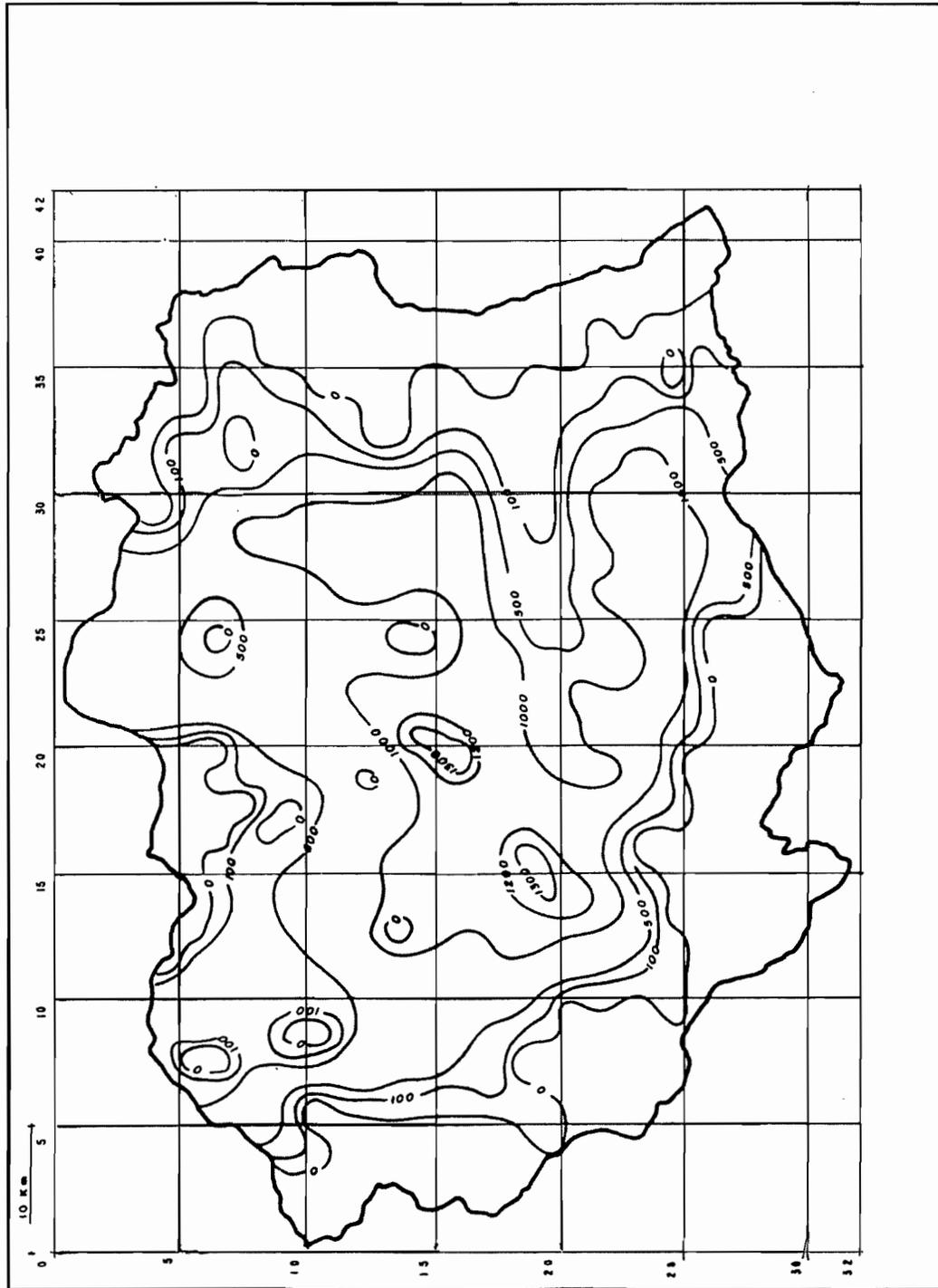


Fig. 10. Profundidad de la base del acuífero granular. m.

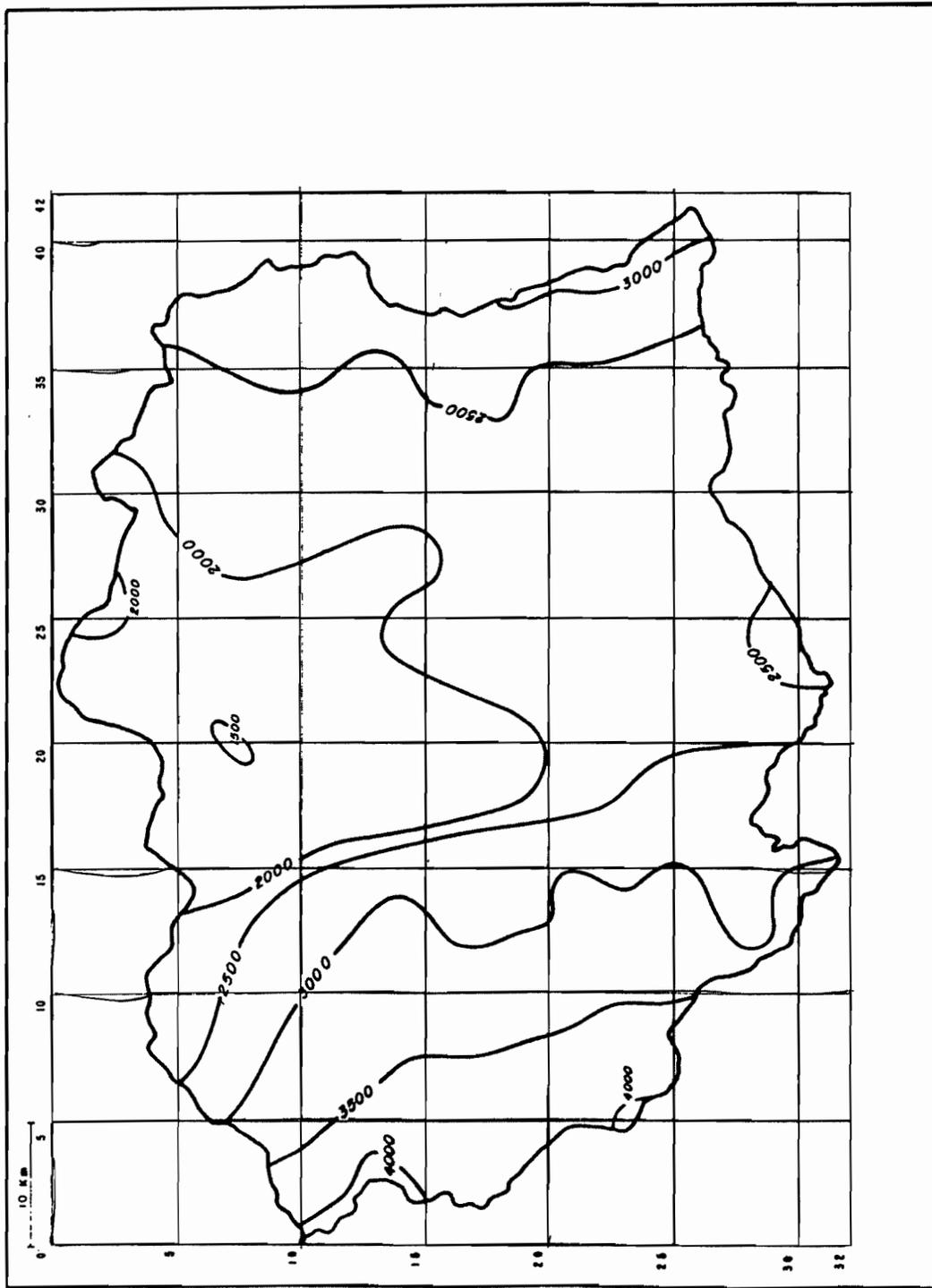


Fig. 11. Profundidad de la base del acuífero volcánico. m.

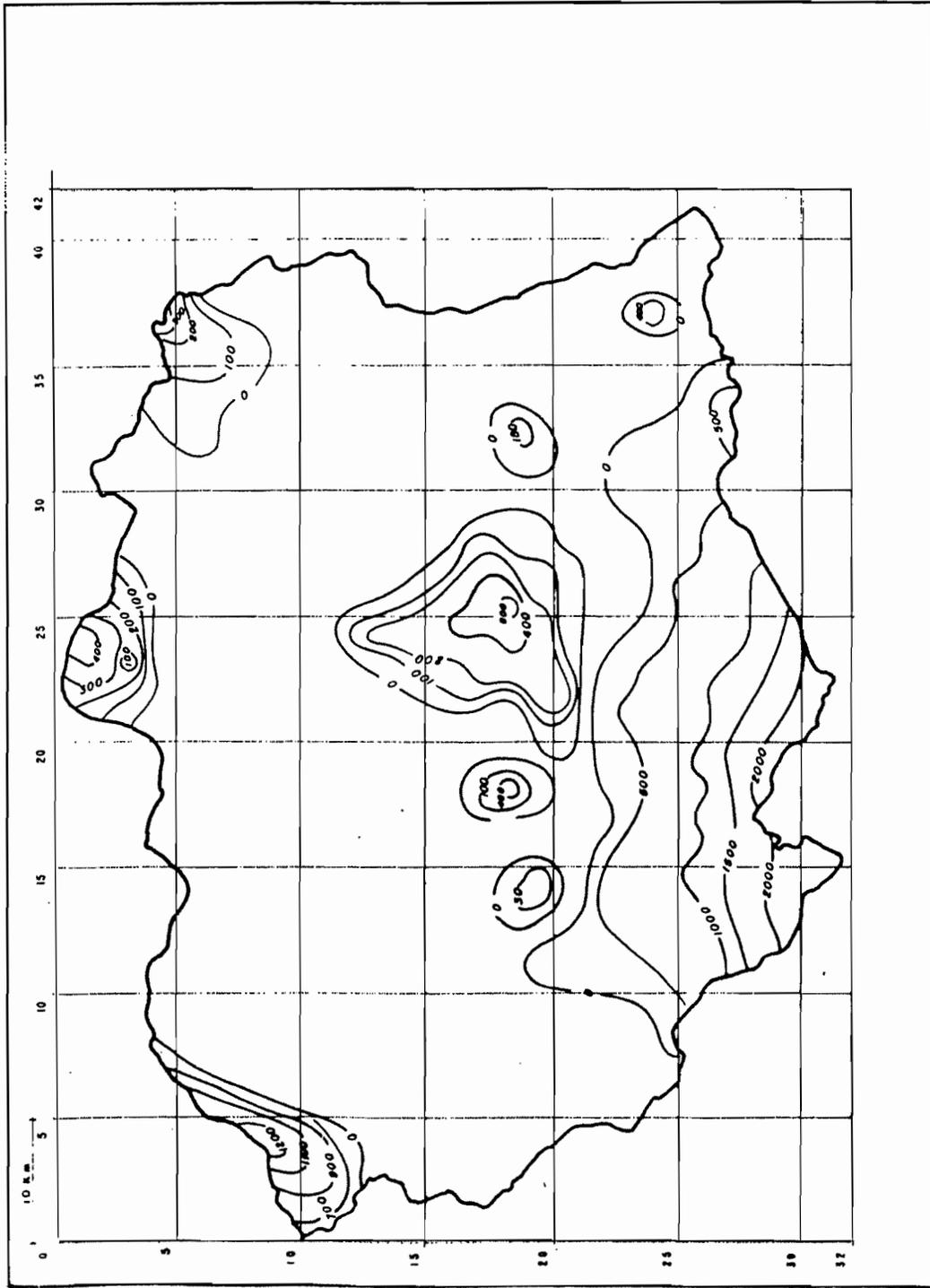


Fig. 12. Espesor de los basaltos fracturados. m.

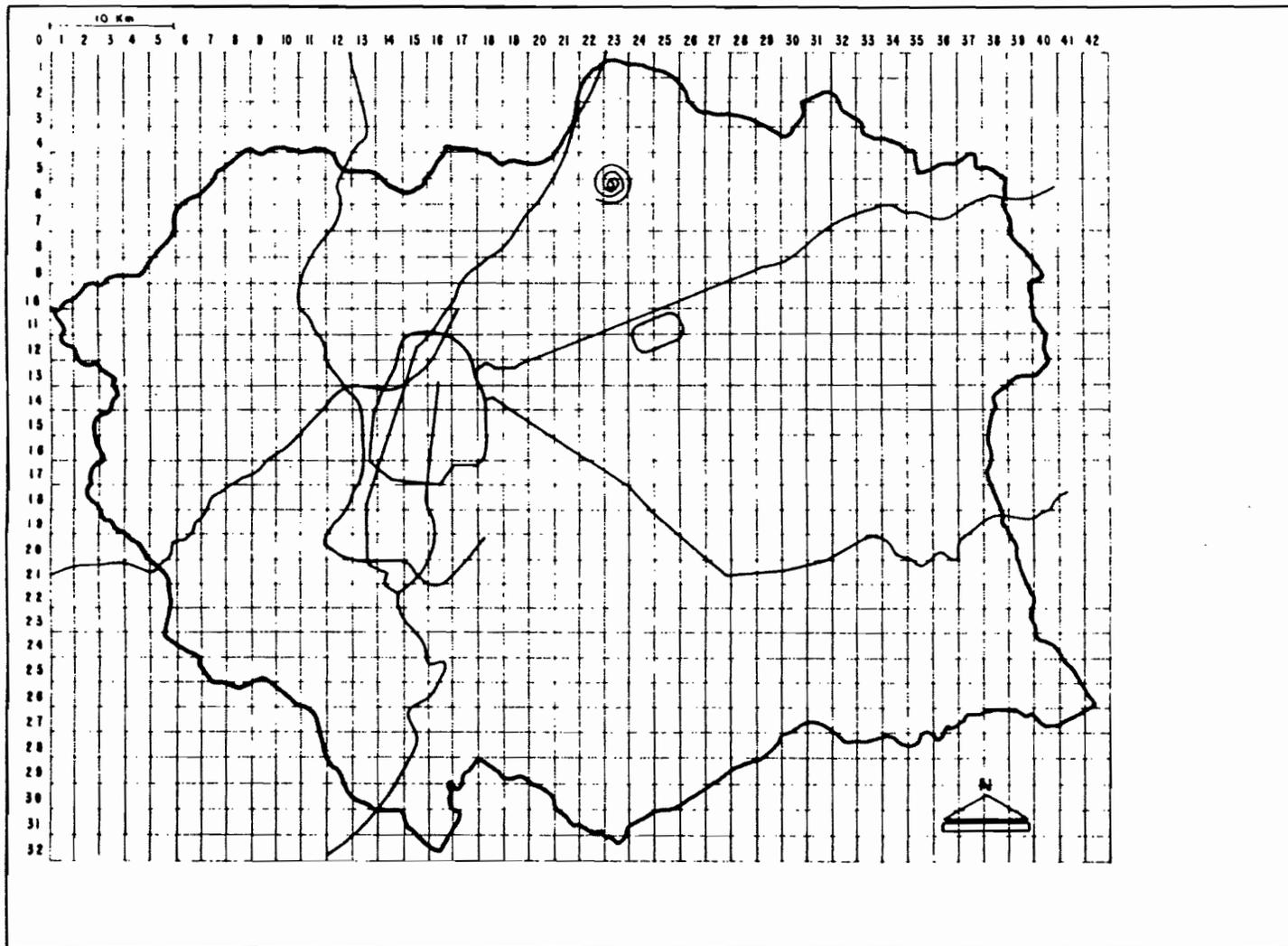


Fig. 13. Ilustración en planta de las celdas del modelo.

Una ventaja muy importante del método de celdas es precisamente que produce matrices heptadiagonales. Esta clase de matrices ha sido ampliamente estudiada en la literatura internacional y existe un gran número de procedimientos para invertir-las, algunos de ellos sumamente eficientes. El modelo aquí descrito, proporciona dos opciones: el secuencial modificado y el SIP (Strongly Implicit Procedure) de Stone [33].

Para evaluar el aporte del acuitardo se utiliza el método integro-diferencial. Su aplicación es directa, utilizando principalmente los resultados dados en [6, 8]. En la frontera común entre el acuífero y el acuitardo, el flujo por unidad de área está dado por:

$$K(\partial s/\partial z) = K'(\partial s'/\partial z) = -\frac{K'}{b'} \left[\int_0^t \frac{\partial s}{\partial t} (t-\tau) f(\tau') d\tau \right] \quad (4.7)$$

donde:

$$f(\tau') = 1 + 2 \sum_1^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 \tau') \quad (4.8)$$

mientras que $\tau' = \alpha' \tau / (b')^2$. Tomando en cuenta que el abatimiento inicial del sistema es nulo, la ecuación (4.7) puede escribirse en la forma:

$$K \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right) = -Cs(t) - C \int_0^t \frac{\partial s}{\partial t} (t-\tau') g(\tau') d\tau \quad (4.9)$$

donde $C = K'/b'$, y

$$g(\tau') = 2 \sum_1^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 \tau') \quad (4.10)$$

En aplicaciones numéricas de la fórmula (4.9), es necesario aproximar la función $g(\tau')$. Se utilizará una forma muy eficiente de hacerlo, debida a Herrera y Yates [8]. El procedimiento se puede hacer tan exacto como se desee, dependiendo del número de términos en que se trunque la serie de exponenciales de la ecuación (4.10). Sea N dicho número. Entonces se define la función g_N por la ecuación:

$$g_N(\tau') = A_N \delta(\tau') + 2 \sum_1^N \exp(-n^2 \pi^2 \tau') \quad (4.11)$$

La función g_N se utiliza como aproximación de g . Sustituyendo en la ecuación (4.9) se obtiene:

$$K \left[\frac{\partial s}{\partial z} \right] = -Cs(t) - A_N S' \frac{\partial s}{\partial t} (t) - 2C \sum_1^N \int_0^t \frac{\partial s}{\partial t} (t-\tau) \exp(-n^2 \pi^2 \tau') d\tau \quad (4.12)$$

Obsérvese que por la simetría, que como operación entre funciones tiene la convolución:

$$\int_0^t \frac{\partial s}{\partial t} (t-\tau) \exp(n^2 \pi^2 \tau') d\tau = \int_0^t \frac{\partial s}{\partial t} (\tau) \exp[-n^2 \pi^2 (t'-\tau')] d\tau \quad (4.13)$$

donde $t' = \alpha't/(b')^2$. Utilizando (4.13) es claro que si se define:

$$Ds_n(t) = \exp(-n^2 \pi^2 t') \int_0^t \frac{\partial s}{\partial t} (\tau) \exp(n^2 \pi^2 \tau') d\tau \quad (4.14)$$

entonces:

$$K\left[\frac{\partial s}{\partial z}\right] = -Cs(t) - A_N S' \frac{\partial s}{\partial t} (t) - 2C \sum_1^N Ds_n(t) \quad (4.15)$$

La ventaja de haber introducido las funciones $Ds_n(t)$ por medio de las ecuaciones (4.14), es que cuando se lleva a cabo la integración de las ecuaciones paso a paso en el tiempo, las funciones $Ds_n(t)$ se actualizan fácilmente sin recargar la memoria de la computadora. El procedimiento para hacerlo es debido a Herrera y Yates [8]. Usando la definición (4.14) de esas funciones, se tiene:

$$\begin{aligned} Ds_n(t+\Delta t) &= [\exp -n^2 \pi^2 (t' + \Delta t')] \int_0^{t+\Delta t} \frac{\partial s}{\partial t} (\tau) \exp(-n^2 \pi^2 \tau') d\tau \quad (4.16) \\ &= \exp(-n^2 \pi^2 \Delta t') Ds_n(t) + \exp[-n^2 \pi^2 (t' + \Delta t')] \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial s}{\partial t} (\tau) \exp(n^2 \pi^2 \tau') d\tau \end{aligned}$$

Manipulando con la última integral de la ecuación (4.16) se obtiene [8]:

$$Ds_n(t + \Delta t) = \exp(-n^2 \pi^2 \Delta t') [Ds_n(t) + \int_0^{\Delta t} \frac{\partial s}{\partial t} (t + \tau) \exp(n^2 \pi^2 \tau') d\tau] \quad (4.17)$$

Usando integración Gaussiana para evaluar la última integral, se obtiene:

$$Ds_n(t + \Delta t) = \exp(-n^2 \pi^2 \Delta t') Ds_n(t) + [\exp(-n^2 \pi^2 \Delta t'/2)] \Delta s \quad (4.18)$$

La fórmula (4.18) se aplica recursivamente partiendo de las condiciones iniciales $s(0) = 0$ y $Ds_n(0) = 0$. Esto conduce a que en el primer incremento de tiempo se tiene:

$$Ds_n(\Delta t) = s(\Delta t) \exp(-n^2 \pi^2 \Delta t'/2) \quad (4.19)$$

En un modelo tridimensional de celdas como el que se desarrolló, para incorporar el efecto del acuitardo es necesario solamente modificar el tratamiento de las celdas vecinas al mismo. En ellas hay una aportación del acuitardo igual a la velocidad de flujo por el área de la celda. A este aporte se le llamó q' . Usando las ecuaciones (4.15) y (4.18), se obtiene:

$$q'(t + \Delta t) = \Delta x \Delta y \left[\frac{K'}{b'} \left\{ s(t + \Delta t) + 2 \sum_0^N \exp(-n^2 \pi^2 \Delta t') Ds_n(t) + 2 \Delta s \sum_1^N \exp(-n^2 \pi^2 \Delta t'/2) \right\} + A_N S' \frac{\partial s}{\partial t}(t + \Delta t) \right] \quad (4.20)$$

Aquí, el área horizontal de la celda es $\Delta x \Delta y$. Al incorporar el tratamiento numérico del modelo, se ve la conveniencia de descomponer $q'(t + \Delta t)$, en dos partes:

$$q_{mem}(t) = \frac{K' \Delta x \Delta y}{b'} [s(t) + 2 \sum_1^N \{ \exp(-n^2 \pi^2 \Delta t') Ds_n(t) + \Delta s \exp(-n^2 \pi^2 \Delta t'/2) \}] \quad (4.21)$$

y el término $\Delta x \Delta y A_N S' \partial s / \partial t$. Este último término, debido a que contiene la derivada respecto al tiempo de abatimiento, implica una modificación de la matriz del sistema de ecuaciones, mientras que el definido por la ecuación (4.21) se puede incorporar como una fuente en cada paso del tiempo.

Dividiendo $\Delta x \Delta y A_N S'$, entre el volumen de la celda se obtiene:

$$S_s^a = A_N S'_s (b'/\Delta z) \quad (4.22)$$

De manera que para incorporar este término en el modelo de celdas, basta aumentar el coeficiente de almacenamiento específico de la celda vecina al acuitardo por esta cantidad.

5.- PARAMETRIZACION.- Para el modelo de la Cuenca de México se identificaron 5 cuerpos litológicamente diferentes, los que se discretizaron en el espacio de acuerdo con su secuencia estratigráfica. En la parte superior y cubriendo la parte baja de la cuenca hasta aproximadamente una elevación de 2 240 msnm se encuentra un

acuitardo con un espesor máximo de 300 m en la zona de Xochimilco-Chalco y hasta 250 m al sur del Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, cuya distribución se indica en la Figura 7. Dentro de este cuerpo se localiza la capa dura de 3 m de espesor en promedio (Figura 4), compuesta de material arenoso, bordeada superior e inferiormente por materiales arcillo-limosos. Este acuitardo originalmente fue una de las fuentes de abastecimiento de agua subterránea en la cuenca, principalmente a través de la capa dura.

En la actualidad este acuitardo debe funcionar preferentemente como una zona de recarga, con una dirección de flujo esencialmente vertical. La conductividad hidráulica vertical es variable entre 5 y 20×10^{-9} m/s, como se indica en la Figura 14 tomada de Herrera *et al.* [2], quienes propusieron esta distribución por un análisis bidimensional del sistema acuífero con base en la información disponible hasta 1982. El acuitardo se simula en el modelo como condición de frontera superior a través de la formulación integrodiferencial, que se mencionó en la sección 4. El coeficiente de almacenamiento específico correspondiente ($5.73 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$) se tomó del trabajo de Herrera *et al.* [2] quienes solamente derivaron la combinación $K' S'_s$ del modelo bidimensional (Figura 15), ya que solamente ésta es relevante para la definición de su comportamiento hidráulico.

Bajo este acuitardo se encuentra un material granular de espesor variable, entre 300 y 1 000 m como se indica en la Figura 16, que también aflora en la superficie de la cuenca y que en algunas partes de la misma se interdigita con material volcánico de origen basáltico cuaternario y volcánico terciario. Este material granular, explotado actualmente por la mayor parte de los pozos de la cuenca, está compuesto de material aluvial, cenizas volcánicas, piroclastos, etc. con intercalaciones de gravás, arenas, arcillas y limos, el cual fue clasificado como el acuífero principal de la cuenca. Este acuífero se parametrizó con base en el trabajo geohidrológico realizado por Lesser en 1984 [34] para el DDF, donde se reportan 31 pruebas de bombeo de larga duración con observación en los pozos vecinos, lo que proporciona una distribución espacial para la cuenca.

Estos resultados definen una distribución de conductividades hidráulicas horizontales entre 1.0×10^{-5} y 15×10^{-5} m/s hasta profundidades del orden de 300 m que corresponden a la configuración de isovalores de la Figura 17. Con los pocos valores disponibles del coeficiente de almacenamiento se obtuvo la distribución que se indica en la Figura 18, que como una primera aproximación se propone como punto de

partida. De esta forma este cuerpo granular se discretiza en el modelo de acuerdo con la geometría que se indica en la Figura 16 en planta y con dos capas en perfil, de las que la primera tiene un espesor de 300 m y la segunda de 700 m. Para la conductividad hidráulica vertical de este acuífero se adopta el valor de 1×10^{-5} m/s obtenido a través de las pocas pruebas de bombeo que existen.

Las condiciones iniciales son las naturales que debieron haber prevalecido hasta 1940 y aunque no existe información precisa hasta el momento, en la Figura 19 se indica una configuración de niveles estáticos apoyada en la publicación [9]. Esta condición inicial es válida también para el acuitardo, considerándose que estos valores piezométricos fueron los mismos inicialmente para los dos cuerpos.

La extracción por pozos se lleva a cabo en la capa superior del acuífero granular, con un caudal instalado y distribución como el que se indica en la Figura 20, obtenida a través de la información proporcionada por la Comisión de Aguas del Valle de México, Departamento del Distrito Federal y Comisión Estatal de Aguas y Saneamiento del Estado de México. Esta información comprende los datos de localización, constructivos, de operación y uso de los pozos registrados y operados por las dependencias oficiales mencionadas con un caudal total instalado de $42.865 \text{ m}^3/\text{seg}$.

Dentro de este material granular se encuentra un cuerpo basáltico interdigitado, cuya localización y espesor se indican en la Figura 12, con base y cima en las Figuras 8 y 9, respectivamente. Su discretización en el modelo queda dentro de las capas mencionadas para el acuífero granular, con características físicas de conductividad hidráulica horizontal de 1×10^{-6} m/s y vertical de 5×10^{-6} m/s, así como almacenamiento específico de $3 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$, aunque no existe suficiente información al respecto.

Bajo estos cuerpos se localiza el acuífero volcánico, cuya cima en parte se indica en la Figura 10 y su base en la Figura 11, con un espesor variable de 500 a 4 000 m, como se muestra en la Figura 21. Debido a que este acuífero es poco conocido, se adoptan los valores de la conductividad hidráulica propuestos por Ortega [9], de 1×10^{-7} m/s para la horizontal y 5×10^{-7} m/s para la vertical, con un coeficiente de almacenamiento específico de $3 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$. Las condiciones piezométricas iniciales son las indicadas en la Figura 19. Para la discretización de este cuerpo se utilizaron celdas de 1 000 m de espesor.



Fig. 14. Conductividad hidráulica vertical del acuitardo 10^{-9} m/seg.

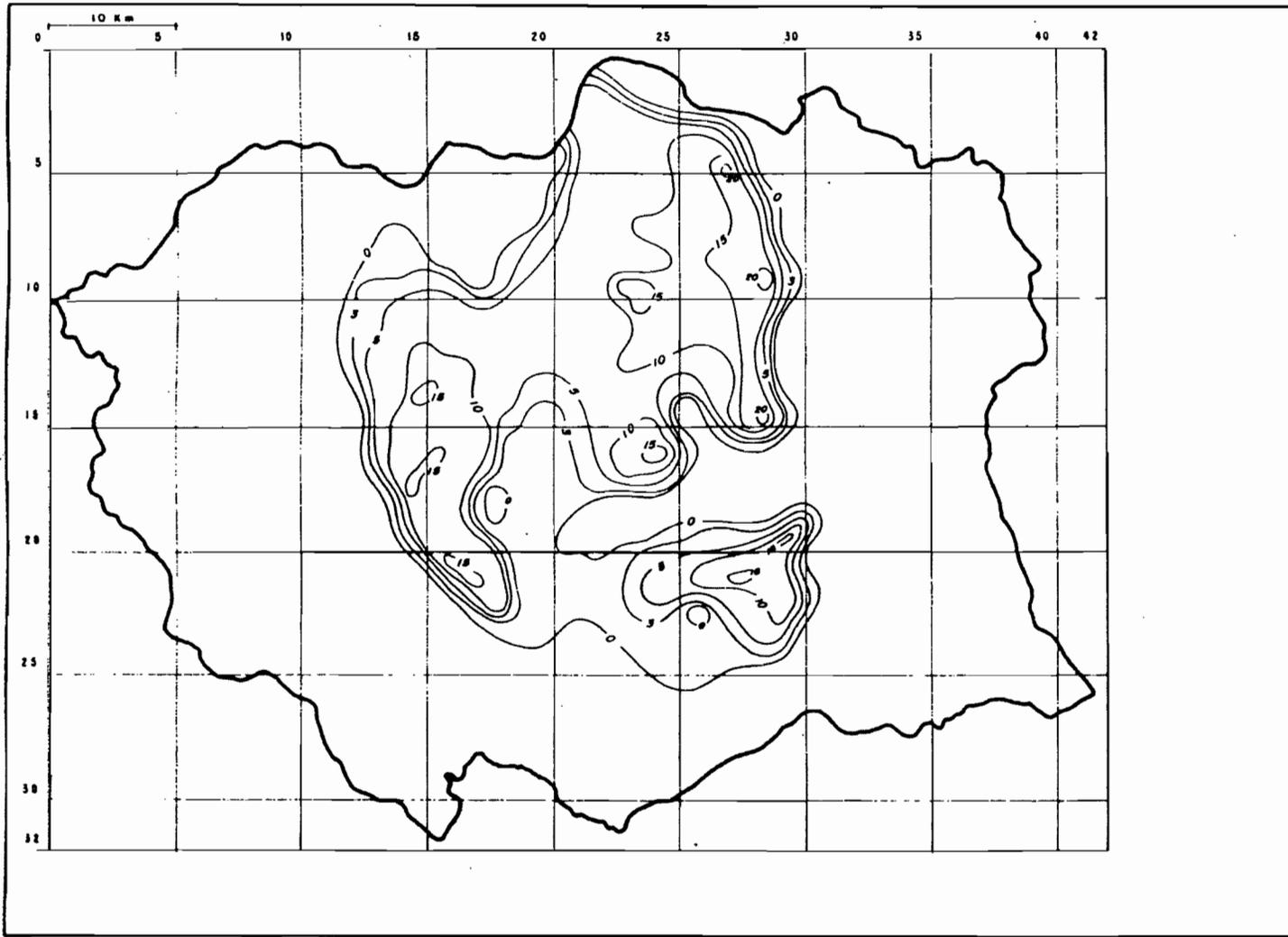


Fig. 15. Almacenamiento específico del acuitardo $10^{-2} m^{-1}$.

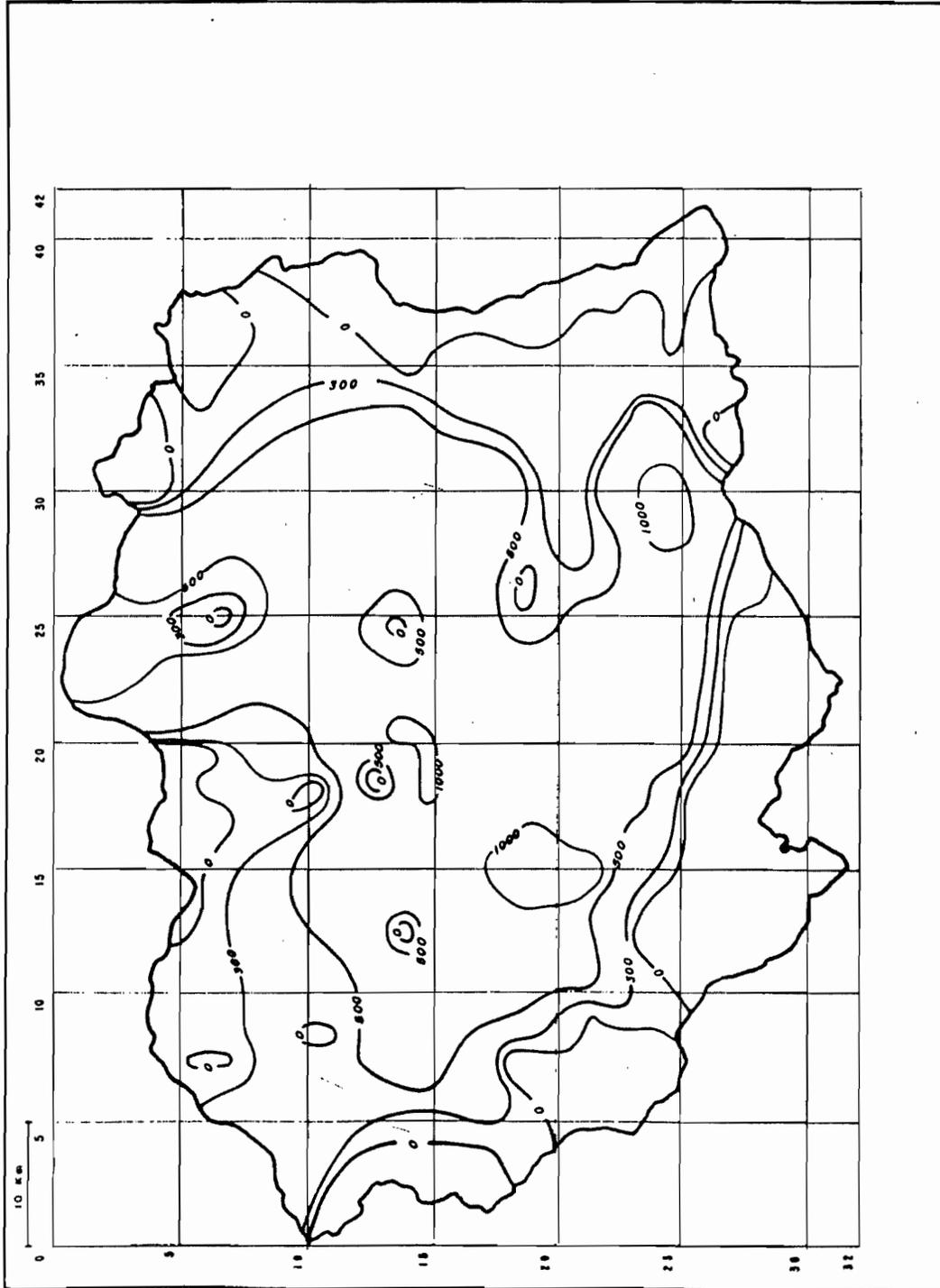


Fig. 16. Espesor del acuífero granular, m.

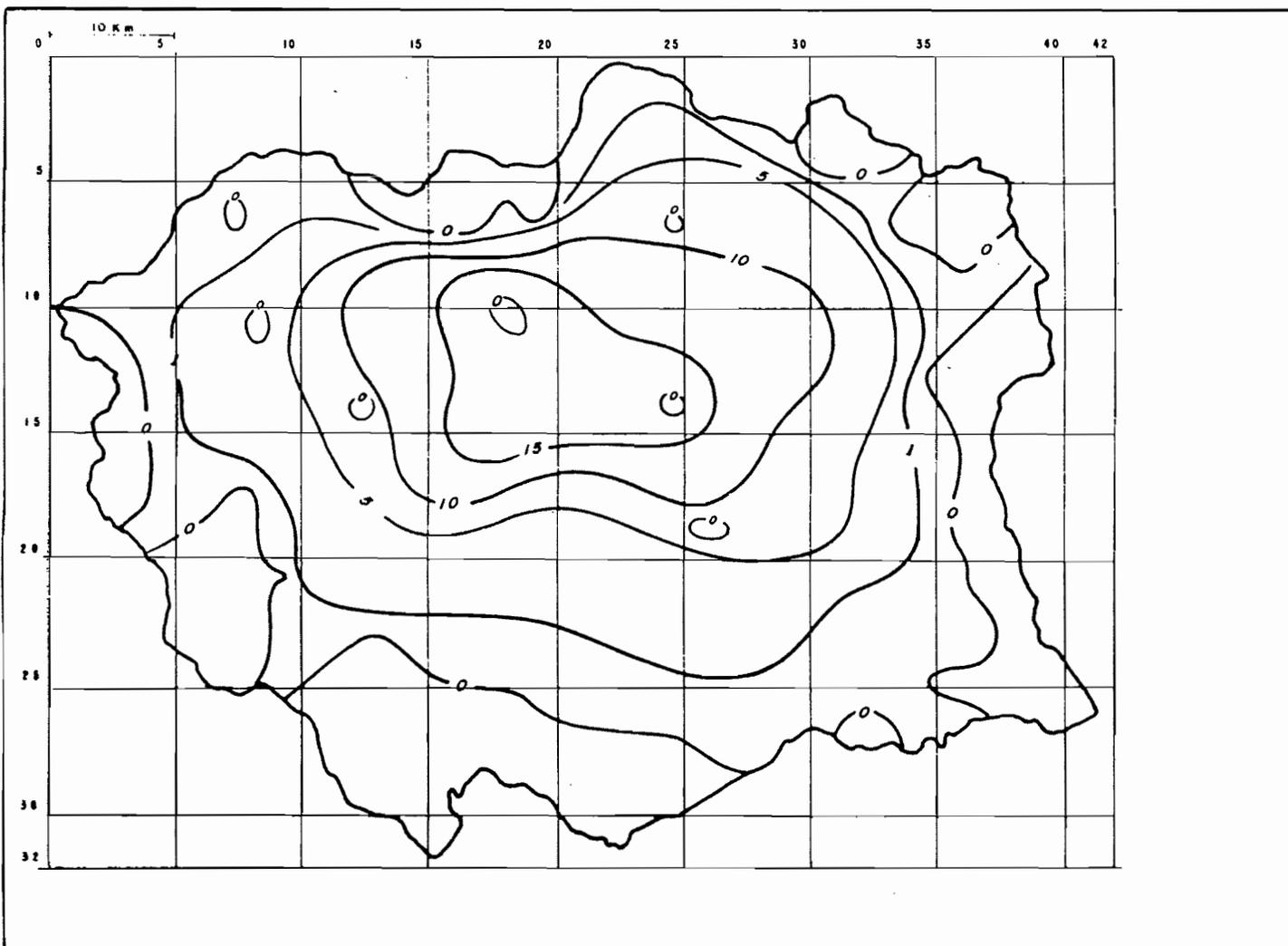


Fig. 17. Conductividad hidráulica horizontal del acuífero granular 10^{-5} m/seg.

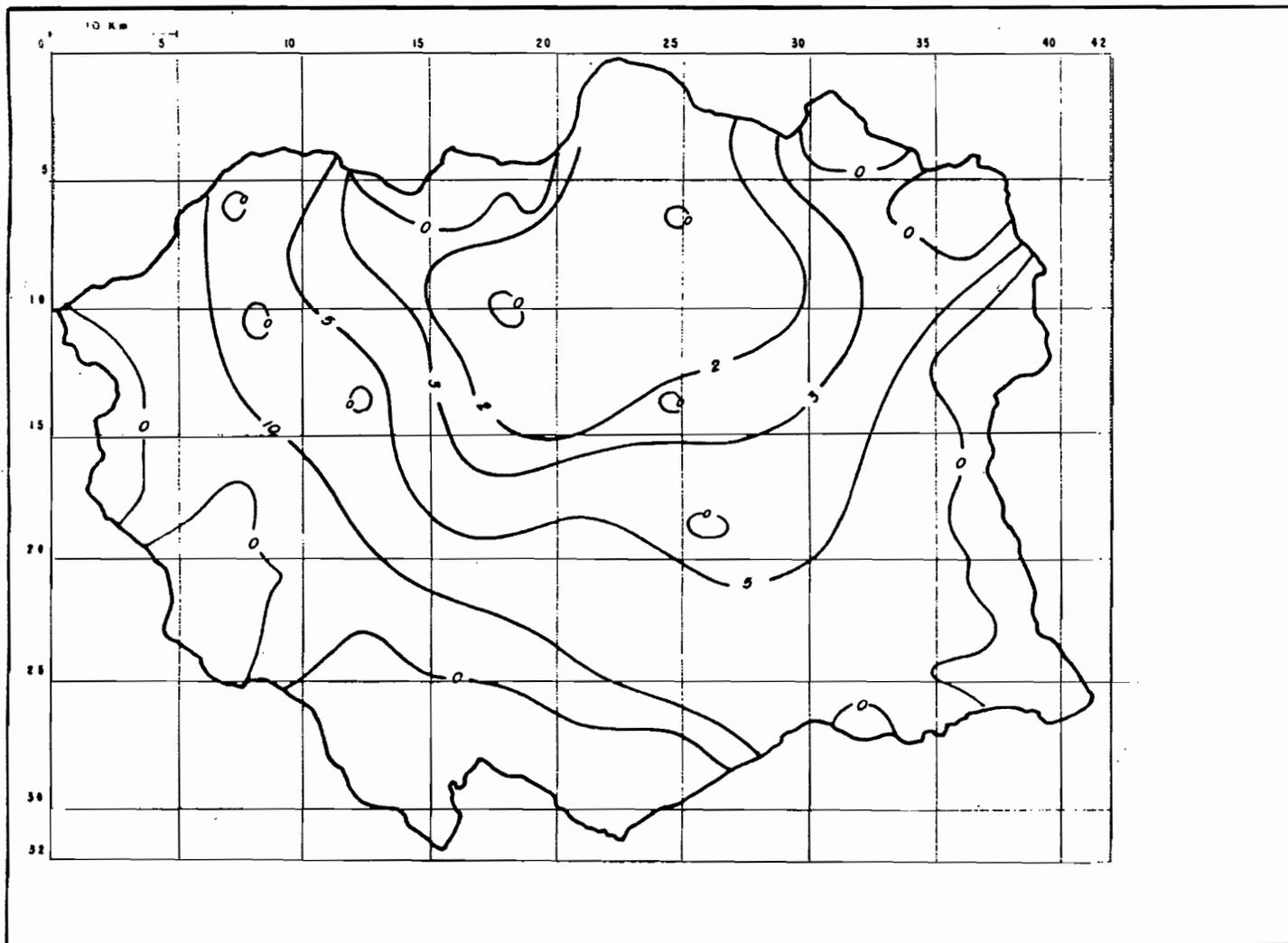


Fig. 18. Coeficiente de almacenamiento específico del acuífero granular. $10^{-6} m^{-1}$.

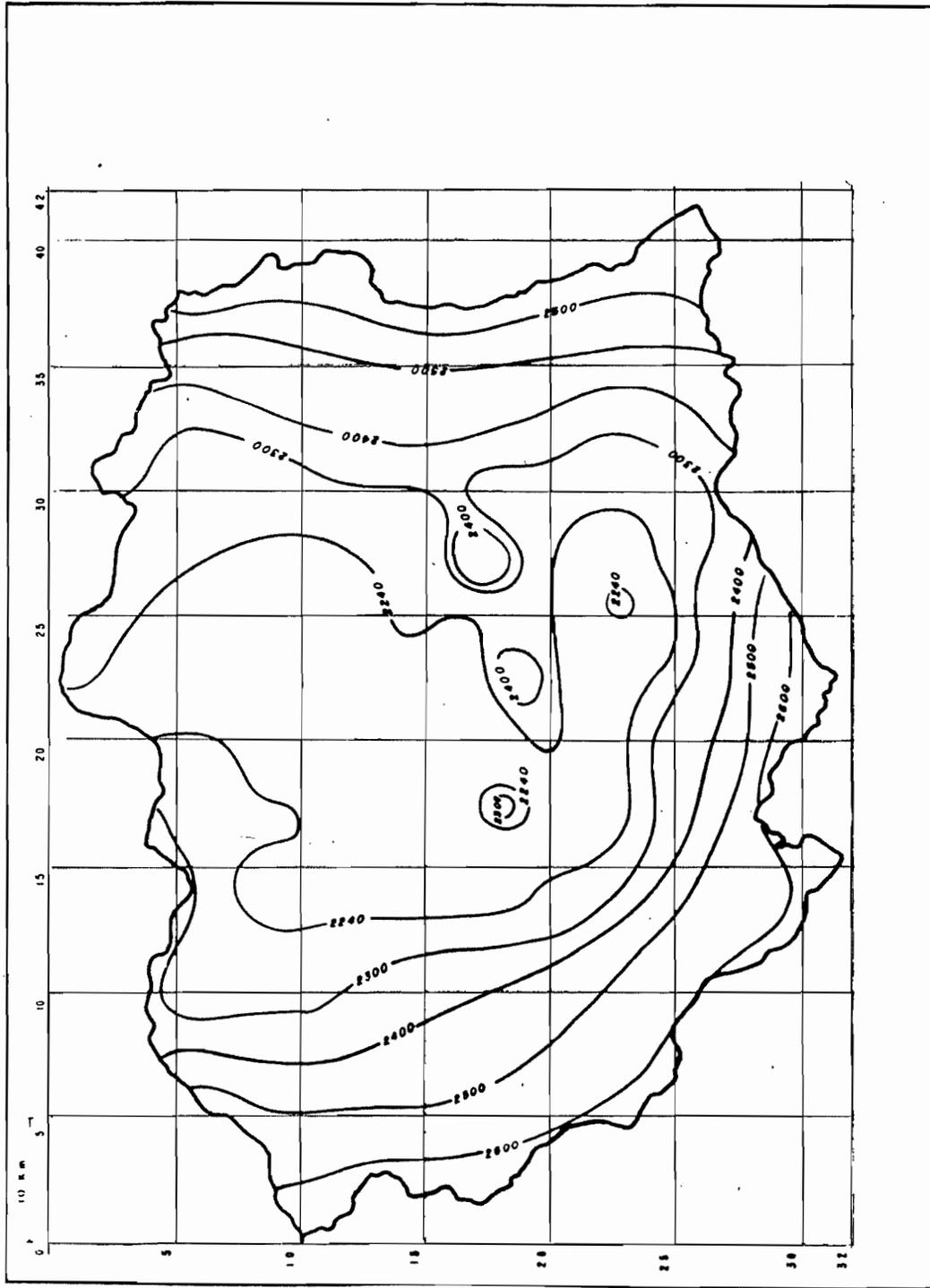


Fig. 19. Elevación inicial del nivel piezométrico, m.s.n.m. 1940.

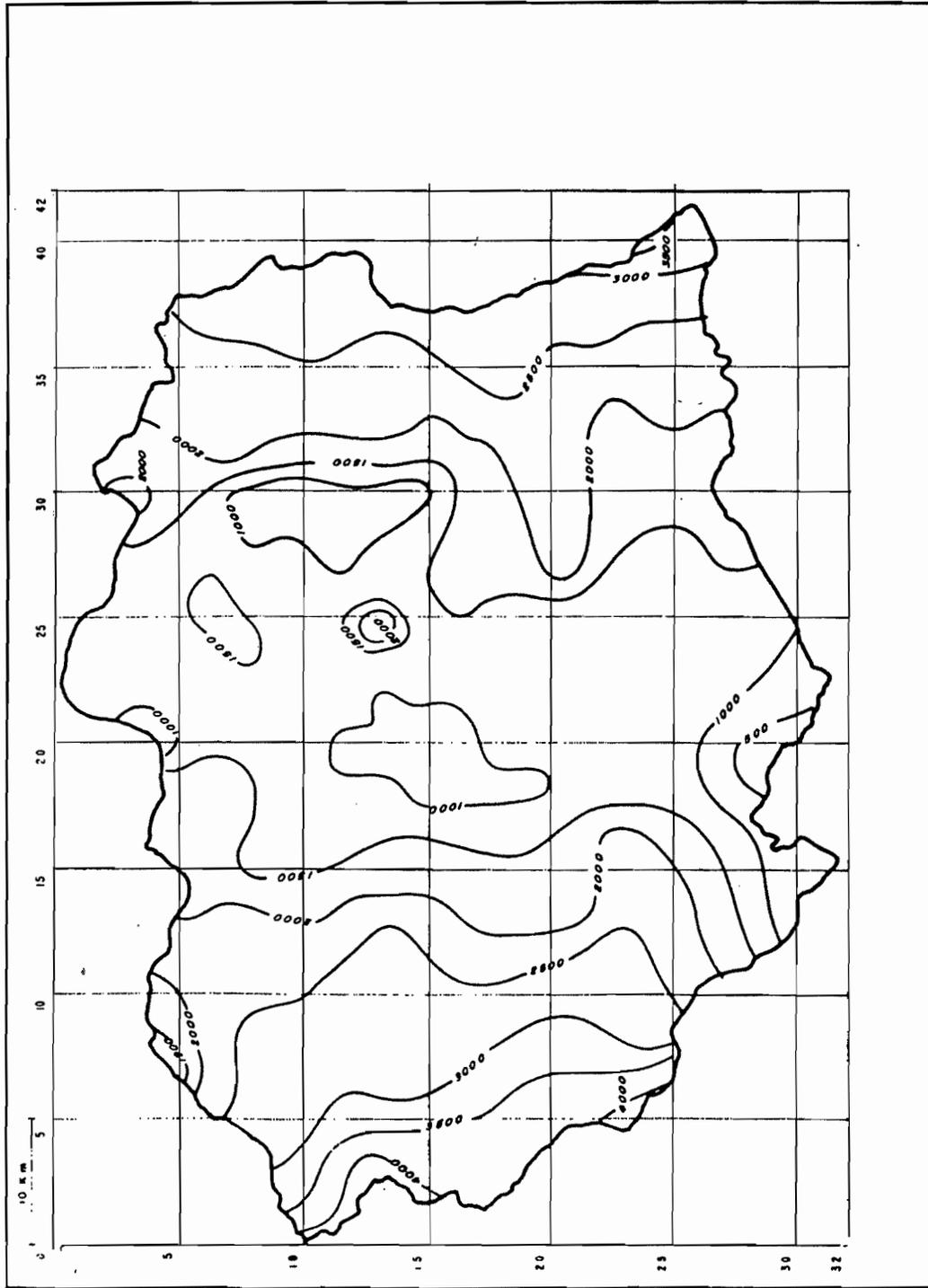


Fig. 21. Espesor del acuífero volcánico. m.

Finalmente, bajo este cuerpo se localiza el acuífero de rocas carbonatadas sedimentarias con la piezometría inicial de la Figura 19. Este cuerpo se adoptó como frontera inferior del modelo. Debido a la falta de información se adoptó un procedimiento de prueba de hipótesis, habiéndose realizado simulaciones con el modelo, tomando alternativamente condiciones en esa frontera de no flujo y de carga constante. Los resultados mostraron diferencias insignificantes, por lo que se concluyó que es adecuado utilizar cualquiera de ellas.

NOTACION

$$A_N = \frac{1}{3} - (2/\pi^2) \sum_{n=N+1}^{\infty} (n^2)^{-1} = (2/\pi^2) \sum_{n=1}^N (n^2)^{-1}, \text{ adimensional}$$

b_i = Espesor del i -ésimo acuífero, L.

b' = Espesor del acuitardo, L.

K_i = Conductividad hidráulica, i -ésimo acuífero, L/T.

K' = Conductividad hidráulica vertical del acuitardo, L/T.

S_s^a = Corrección del coeficiente de almacenamiento específico del acuífero, L^{-1} .

S_s = Almacenamiento específico del acuífero, L^{-1} .

S'_s = Almacenamiento específico del acuitardo, L^{-1} .

S' = Almacenamiento del acuitardo, adimensional.

s_i = Abatimiento en el acuífero, L.

s' = Abatimiento en el acuitardo, L.

Δs = Incremento de abatimiento del acuífero, L.

T_*^x = Transmisividad del acuífero en la dirección x , L/T.

t = Tiempo, T

Δt = Incremento de tiempo, T.

t' = Tiempo adimensional = $\alpha' t / b'^2$

x, y, z = Coordenadas, L.

V = Volumen del elemento, L^3

$\Delta z, \Delta y, \Delta x$ = incremento o dimensión de elemento, L.

α' = K'/S'_s , L^2/T

$\delta(t')$ = delta de Dirac, adimensional.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado en su parte de modelación computacional por Norberto Vera Guzmán. Se agradece la revisión de la Geología a Joel Carrillo. Toda la información geológica está tomada del trabajo de Ruiz, Vázquez y Jáimez, con apoyo de Carlos Vargas Cabrera, publicado en este mismo volumen.

BIBLIOGRAFIA

1. CRUICKSHANK, V. C., I. HERRERA, R. YATES, J. P. HENNART, D. BALAREZO y R. MAGAÑA, 1979. Modelos de Predicción del hundimiento del subsuelo del Valle de México, Proyecto 9138, Instituto de Ingeniería, UNAM.
2. HERRERA, I., R. YATES y J. P. HENNART, 1982. "Estudio de Hundimiento y Balance de los Acuíferos Subterráneos a la Ciudad de México". Elaborado para el Departamento del Distrito Federal, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS), UNAM.
3. HERRERA, I., R. YATES y J. P. HENNART, 1982. "Subrutinas y Perfeccionamiento del Programa para la Simulación de Acuíferos Múltiples". Elaborado para el Departamento del Distrito Federal, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS), UNAM.
4. HERRERA, I. y G. E. FIGUEROA, 1969. "A Correspondence Principle for the Theory of leaky Aquifers". *Water Resources Res.*, 5(4), 900-904.
5. HERRERA, I., 1970. "Theory of Multiple Leaky Aquifers". *Water Resources Res.*, 6(1), 185-193.
6. HERRERA, I. y L. RODARTE, 1973. "Integrodifferential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications. Part 1: The Nature of Approximate Theories". *Water Resources Res.*, 9(4), 995-1005. También Instituto de Ingeniería, UNAM, E-6.
7. HERRERA, I., 1974. "Integrodifferential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications. Part 2: Error Analysis of Approximate Theories". *Water Resources Res.*, 10 (4), 811-820. También Instituto de Ingeniería, UNAM, E-6, 1973.
8. HERRERA, I. y R. YATES, 1977. "Integrodifferential Equations for Systems of Leaky Aquifers. Part 3: A Numerical Method of Unlimited Applicability". *Water Resources Res.*, 13 (4), 725-732.
9. ORTEGA, A., 1989. "Las Condiciones de Frontera Hidráulicas Naturales en la Cuenca de México, usando Modelado Matemático" en este mismo Volumen, *Geofís. Int.*

10. GAYOL, R., 1929. "Breves Apuntes a las Obras de Saneamiento y Desagüe de la Capital de la República y de las que, del mismo género, necesita con grande urgencia", *Revista Mexicana de Ingeniería y Arquitectura*, Vol. VII.
11. GAYOL, R., 1929. "Breves Apuntes Relativos a la Catedral de México", *Revista de Ingeniería y Agricultura*, Vol. XI.
12. Volumen Nabor Carrillo, 1969. "El Hundimiento de la Ciudad de México", Secretaría de Hacienda y Crédito Público, México.
13. CARRILLO, N., 1948. "Influence of artesian wells on the sinking of Mexico City". Proc. of the 11th International Conference on Soil Mechanics, Holland.
14. MARSAL, R. J., F. HIRIART y R. SANDOVAL, 1952. "Hundimiento de la Ciudad de México, Observaciones y Estudios Analíticos", Ediciones ICA, Serie B, No. 3.
15. ZEEVAERT, L., 1953. "Pore pressure measurements to investigate the main source of surface subsidence in Mexico City". Proc. of the III International Conference on Soil Mechanics, Zurich.
16. Boletines de Mecánica de Suelos. Comisión Hidrológica de la Cuenca del Valle de México, S. R. H., de 1953 a 1969.
17. Boletín de Mecánica de Suelos. Comisión de Aguas del Valle de México, de 1970 a 1974.
18. MARSAL, R. J. y M. MAZARI, 1959. "Subsuelo de la Ciudad de México". 2 vols., Instituto de Ingeniería, UNAM.
19. MARSAL, R. J. y R. GRAUE, 1969. "El Subsuelo del Lago de Texcoco", Volumen Carrillo.
20. HIRIART, F. y R. J. MARSAL, 1969. "El Hundimiento de la Ciudad de México". Vol. Carrillo, VII Congreso Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones, 109-147.
21. JUAREZ-BADILLO, E., 1982. "Mechanical Characterization of Mexico City Clay". Simposio Internacional de Ingeniería Geotérmica de Suelos Blandos. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México, D. F., 65-69.
22. JUAREZ-BADILLO, E., 1975. "Constitutive Relationships for Soils". Symposium on Recent Developments in the Analysis of Soil Behaviour and Their Applications to Geotechnical Structures. The University of New South Wales, Kensington, Australia, 231-257.
23. JUAREZ-BADILLO, E., 1985. "General Time Volume Change Equations for Soils". Eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, San Francisco, Vol. 2, 519-530.

24. HERRERA, I., 1976. "Ecuaciones Constitutivas de los Suelos". Instituto de Ingeniería, UNAM, 370.
25. HERRERA, I., 1976. "El Concepto de Preconsolidación de los Suelos". *Rev. Ingeniería*, 46 (1), 53-60. También Instituto de Ingeniería, UNAM, 363, 1976.
26. HERRERA, I., J. L. LEON y FERNANDEZ DEL OLMO, "Preconsolidations and its Rheological Implications". Proc. Novena Conferencia Internacional de Mecánica de Suelos, Ingeniería de Cimentaciones, Tokio, Japón, 1, 127-130.
27. HERRERA, I., 1976. "A review of the Integrodifferential Equations Approach to leaky Aquifer Mechanics". *Advances in Ground Water Hydrology*. AWRA Symposium Proceedings, Chicago, Ill., 29-47 (ponencia invitada).
28. HERRERA, I., J. P. HENNART y R. YATES, 1980. "A Critical Discussion of Numerical Models for Multiaquifer Systems". *Advances in Water Resources*, 3 (4), 159-163. También en *Flow Through Porous Media*, G. F. Pinder Ed., CML Publications, Southampton, 51-55, 1983.
29. CHEN, B. e I. HERRERA, 1982. "Numerical Treatment of Leaky Aquifers in the Short Time Range". *Water Resources Res.*, 18 (3), 55-562. Presentado por invitación en el John Ferris Symposium on Groundwater Hydraulics in the Spring Annual A.G.U. Meeting in Baltimore, MD.
30. McDONALD, M. G. y A. W. HARBAUGH, 1984. "A Modular Three-dimensional Finite-Difference Ground Water Flow Model", Scientific Publications, Co., Washington, D. C.
31. AZIZ, K. y A. SETTARI, 1979. "Petroleum Reservoir Simulation". Applied Sc. Publishers, Londres.
32. ALLEN, M., I. HERRERA y G. F. PINDER, 1988. "Numerical Modeling in Science and Engineering". New York, N. Y., John Wiley & Sons.
33. STONE, H. L., 1968. "Iterative Solution of Implicit Approximations of Multi-dimensional Partial Differential Equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 5, No. 3, 530-558.
34. LESSER, J. M., 1984. "Actividades Geohidrológicas en el Valle de México". Elaborado para el D. D. F., México.