METODO TREFFTZ-HERRERA DE DESCOMPOSICION DE DOMINIO: Formulación en una dimensión

I. Herrera & A.L. Rivera,
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas,
Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado Postal 20-726, Admon. # 20, 01000 México, D.F. México
e-mail: rivera@ce.ifisicam.unam.mx

22 de mayo de 1997

Consideremos el problema de valores a la frontera que consiste en encontrar u tal que

$$\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}\left(D\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dx}(Vu) + Ru = f_\Omega \ , \tag{1}$$

siendo Ω la región de definición del problema, $(\Omega : 0 < x < l)$ y u tal que satisface las condiciones a la frontera

$$u(x=0) = u_0 \ , \qquad u(x=l) = u_l \ .$$

El adjunto de la ec. (1) es

$$\mathcal{L}^* w = -\frac{d}{dx}\left(D\frac{dw}{dx}\right) - \frac{d}{dx}(Vw) + Rw \ . \tag{2}$$

Cuando $V = 0$, $\mathcal{L}$ es autoadjunto y genera un sistema de ecuaciones simétrico.

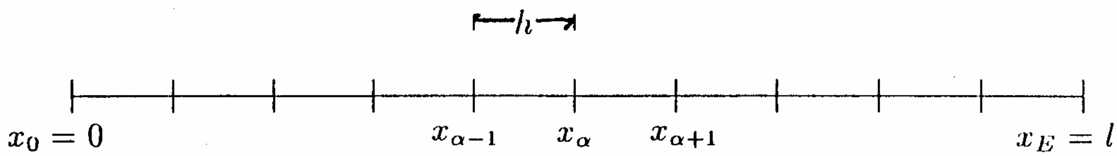

Figure 1: Partición de Ω en E subíntervalos.

Introduzcamos una partición de Ω en E subíntervalos $(x_{\alpha-1}, x_\alpha)$ con $\alpha = 1, \ldots, E$; $x_0 = 0$, $x_E = l$. La frontera interior consta de $E-1$ nodos (ver figura 1).

El problema (1) equivale a resolver el sistema de $E-1$ ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_1 + \rho_{1+} u_2 &= b_1 \, , \\
\rho_{\alpha-} u_{\alpha-1} + \rho_\alpha u_\alpha + \rho_{\alpha+} u_{\alpha+1} &= b_\alpha \, , \qquad \text{con} \quad \alpha = 2, \ldots, E-2 \\
\rho_{(E-1)-} u_{E-2} + \rho_{E-1} u_{E-1} &= b_{E-1} \, ,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

donde los coeficientes son:

$$
\begin{aligned}
\rho_{\alpha-} &= -\left[D_{\alpha-1} \frac{dw^\alpha}{dx} \right]_{\alpha-1} \\
\rho_\alpha &= -\left[D_\alpha \frac{dw^\alpha}{dx} \right]_\alpha \\
\rho_{\alpha+} &= -\left[D_{\alpha+1} \frac{dw^\alpha}{dx} \right]_{\alpha+1} \\
b_1 &= \int_0^{x_2} f_\Omega w^1 dx + \left(D \frac{dw^1}{dx} + V w^1 \right)_{x=0} u_0 \\
b_\alpha &= \int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} f_\Omega w^\alpha dx \\
b_{E-1} &= \int_{E-2}^{l} f_\Omega w^{E-1} dx - \left(D \frac{dw^{E-1}}{dx} + V w^{E-1} \right)_{x=l} u_l \, .
\end{aligned}
$$

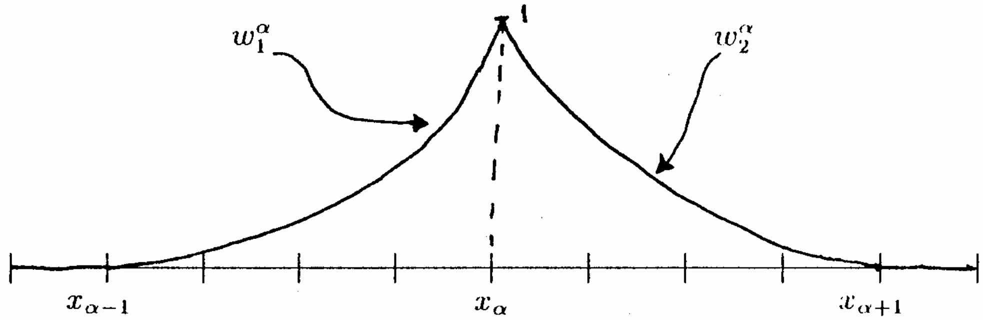

Figure 2: Función de peso w^α como función de x.

Para construir las funciones de peso w^α usaremos polinomios de grado G, es decir, $n = G - 1$ puntos de colocación. Los puntos de conlocación x_α^* serán las raíces del polinomio de Legendre de grado $G - 1$.

La función de peso w^α satisface (ver figura 2):

$$w^\alpha(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq x_{\alpha-1} \\ w_1^\alpha(x) & x_{\alpha-1} < x < x_\alpha \\ 1 & x = x_\alpha \\ w_2^\alpha(x) & x_\alpha < x < x_{\alpha+1} \\ 0 & x_{\alpha+1} \leq x < \infty \end{cases} \tag{4}$$

y la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}^* w^\alpha(x) = 0 \ . \tag{5}$$

En el intervalo $(x_{\alpha-1}, x_\alpha)$,

$$w_1^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{G} a_{1j}^\alpha (x - x_{\alpha-1})^j$$

por lo que el sistema de ecuaciones a satisfacer es

$$\sum_{j=1}^{G} a_{1j}^\alpha (x_\alpha - x_{\alpha-1})^j = 1$$

$$\sum_{j=2}^{G} \left\{ -(j-1)\, D + j \left(-V - \frac{dD}{dx} \right) \xi + R\xi^2 \right\} \xi^{j-2} a_{1j}^\alpha - \left\{ V + \frac{dD}{dx} - R\xi \right\} a_{11}^\alpha = 0$$

con

$$\xi = x^*_{\alpha 1} - x_{\alpha-1}, \ldots, x^*_{\alpha n} - x_{\alpha-1}\ .$$

En el intervalo $(x_\alpha, x_{\alpha+1})$,

$$w_2^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{G} a_{2j}^\alpha (x_{\alpha+1} - x)^j$$

por lo que el sistema de ecuaciones a satisfacer es

$$\sum_{j=1}^{G} a_{2j}^\alpha (x_{\alpha+1} - x_\alpha)^j = 1$$

$$\sum_{j=2}^{G} \left\{ -(j-1)\, D + j \left(-V - \frac{dD}{dx} \right) \xi + R\xi^2 \right\} \xi^{j-2} a_{2j}^\alpha - \left\{ V + \frac{dD}{dx} + R\xi \right\} a_{11}^\alpha = 0$$

con

$$\xi = x_{\alpha+1} - x^*_{\alpha 1}, \ldots, x_{\alpha+1} - x^*_{\alpha n}\ .$$

El orden de precisión del algoritmo resultante es $\mathcal{O}(h^{2n-1}) = \mathcal{O}(h^{2G-3})$, siendo $h = x_\alpha - x_{\alpha-1}$ la norma de la partición.

Implementación del método en una dimensión

Como ejemplo en una dimensión consideremos el oscilador armónico simple descrito por la ecuación

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + ku = 0 \tag{6}$$

con las condiciones a la frontera:

$$u(x=0) = 0 \quad , \quad u\left(x = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}\right) = 1$$

Este sistema tiene como solución exacta:

$$u(x) = \sin\left(\sqrt{k}x\right) \tag{7}$$

Solución por el método Trefftz-Herrera

Comparando la ec. (6) con la forma general de la ecuación diferencial de 2^o orden (ec. 1) tenemos:

$$D = 1, \qquad V = 0, \qquad R = k, \qquad f_\Omega = 0,$$

$$x_0 = 0, \qquad x_E = \frac{\pi}{2\sqrt{k}},$$

$$u(x_0) = 0, \qquad u(x_E) = 1.$$

Entonces, tenemos que resolver el sistema de $E-1$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 + \rho_{1+} u_2 &= b_1 \\ \rho_{\alpha-} u_{\alpha-1} + \rho_\alpha u_\alpha + \rho_{\alpha+} u_{\alpha+1} &= b_\alpha \qquad \text{con} \qquad \alpha = 2, \ldots, E-2 \\ \rho_{(E-1)\_} u_{E-2} + \rho_{E-1} u_{E-1} &= b_{E-1} \end{aligned}$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha-} &= -\left[\frac{dw^\alpha}{dx}\right]_{\alpha-1} \qquad & b_\alpha &= 0 \\ \rho_\alpha &= -\left[\frac{dw^\alpha}{dx}\right]_{\alpha} \qquad & b_1 &= 0 \\ \rho_{\alpha+} &= -\left[\frac{dw^\alpha}{dx}\right]_{\alpha+1} \qquad & b_{E-1} &= -\left(\frac{dw^{E-1}}{dx}\right)_{x=\frac{\pi}{2\sqrt{k}}} \end{aligned}$$

Para construir las funciones de peso w^α usaremos polinomios cúbicos que satisfagan (ver figura 2 y ecuación 4):

$$\mathcal{L}^* w^\alpha = -\frac{d^2 w^\alpha}{dx^2} + R w^\alpha$$

En este caso

$$w_1^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^\alpha (x - x_{\alpha-1})^j \;\Rightarrow\; \frac{dw_1^\alpha}{dx} = \sum_{j=1}^{3} j a_{ij}^\alpha (x - x_{\alpha-1})^{j-1}$$

satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} h a_{11}^\alpha + h^2 a_{12}^\alpha + h^3 a_{13}^\alpha &= 1 \\ \kappa\xi_\pm a_{11}^\alpha + (\kappa\xi_\pm^2 - 1) a_{12}^\alpha + (-2\xi_\pm + \kappa\xi_\pm^3) a_{13}^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$h = x_\alpha - x_{\alpha-1}, \qquad \xi_\pm = \frac{h}{2} \pm \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Los dos valores de ξ que usamos se deben a que las raíces del polinomio de Legendre de grado 2 son $\pm 1/\sqrt{3}$ y entonces:

$$x_{\alpha\pm}^* = x_{\alpha-1} + \frac{h}{2} \pm \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Además,

$$w_2^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}^\alpha (x - x_{\alpha+1})^j \Rightarrow \frac{dw_2^\alpha}{dx} = \sum_{j=1}^{3} j a_{2j}^\alpha (x - x_{\alpha+1})^{j-1}$$

donde el sistema de ecuaciones a satisfacer es

$$\begin{aligned} h a_{21}^\alpha + h^2 a_{22}^\alpha + h^3 a_{23}^\alpha &= 1 \\ \kappa\xi_\pm a_{21}^\alpha + (\kappa\xi_\pm^2 - 1) a_{22}^\alpha + (-2\xi_\pm + \kappa\xi_\pm^3) a_{23}^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Algoritmo a implementar:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0, \ldots, E-1 \\
h &= x_\alpha - x_{\alpha-1} \\
\xi_- &= \frac{h}{2} - \frac{h}{\sqrt{3}} \\
\xi_+ &= \frac{h}{2} + \frac{h}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones para resolver w_1^α:

$$\begin{aligned}
h a_{11}^\alpha + h^2 a_{12}^\alpha + h^3 a_{13}^\alpha &= 1 \\
\kappa \xi_\pm a_{11}^\alpha + (\kappa \xi_\pm^2 - 1) a_{12}^\alpha + (-2\xi_\pm + \kappa \xi_\pm^3) a_{13}^\alpha &= 0
\end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones para resolver w_2^α:

$$\begin{aligned}
h a_{21}^\alpha + h^2 a_{22}^\alpha + h^3 a_{23}^\alpha &= 1 \\
\kappa \xi_\pm a_{21}^\alpha + (\kappa \xi_\pm^2 - 1) a_{22}^\alpha + (-2\xi_\pm + \kappa \xi_\pm^3) a_{23}^\alpha &= 0
\end{aligned}$$

Los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha-} &= -\left(\frac{dw_1^\alpha}{dx}\right)_{\alpha-1} = -a_{11}^\alpha \\
\rho_\alpha &= -\left(\frac{dw_2^\alpha}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{dw_1^\alpha}{dx}\right)_\alpha = -\sum_{j=1}^{3} j a_{2j}^\alpha (x_\alpha - x_{\alpha+1})^{j-1} + \\
&\quad \sum_{j=1}^{3} j a_{1j}^\alpha (x_\alpha - x_{\alpha+1})^{j-1} \\
\rho_{\alpha+} &= -\left(\frac{dw_2^\alpha}{dx}\right)_{\alpha+1} = -a_{22}^\alpha \\
b_\alpha &= 0 \\
b_1 &= 0 \\
b_{E-1} &= -\left(\frac{dw^{E-1}}{dx}\right)_{x=\frac{\pi}{2\sqrt{k}}} = -\sum_{j=1}^{3} j a_{2j}^{E-1} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{k}} - x_{\alpha+1}\right)^{j-1}
\end{aligned}$$

y la solución (u_α) se obtiene al resolver el sistema:

$$\begin{aligned}
\rho_1 u_1 + \rho_{1+} u_2 &= b_1 \\
\rho_{\alpha-} u_{\alpha-1} + \rho_\alpha u_\alpha + \rho_{\alpha+} u_{\alpha+1} &= b_\alpha \quad \text{con} \quad \alpha = 2, \ldots, E-2 \\
\rho_{(E-1)_} u_{E-2} + \rho_{E-1} u_{E-1} &= b_{E-1}
\end{aligned}$$