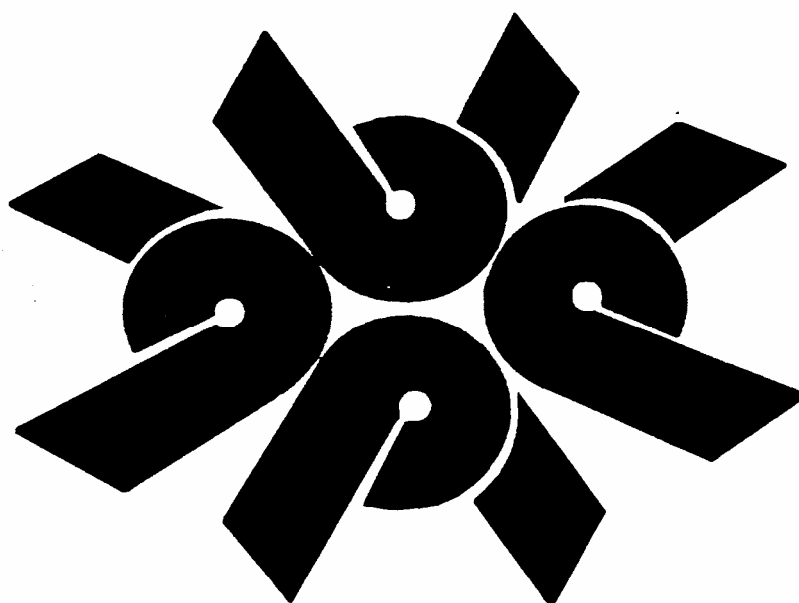


Engineering In Sustainable Development

Proceedings of the International Congress
FIUAEM '96
Toluca, México 22-25 May 1996

Vol.1



FIUAEM'96

Editors
E.A. Rincón Mejía
J.J. Ambriz García
H. Ramírez de Alba

METODO EULERIANO-LAGRANGIANO PARA RESOLVER LA ECUACION DE TRANSPORTE

Jaime Gárfias^(a), Cécile André^(a), Ismael Herrera^(b), Hilario Llanos^(c)

^(a) Centro Interamericano de Recursos del Agua, UAEM
Cerro de Coatepec, C.U. Toluca, Méx., C.P. 50130, México

^(b) Instituto de Geofísica, UNAM
Apdo. Postal 22-582, 14000
México, Distrito Federal

^(c) Departamento de Geodinámica
Facultad de Ciencias, Universidad del País Vasco
Bilbao, España

RESUMEN

La solución de la ecuación de transporte con advección y difusión es problemática cuando se presenta la combinación de los fenómenos de advección y difusión, sobre todo, cuando la advección domina en la ecuación. Por consiguiente, como una solución alternativa a este problema, este artículo presenta el método euleriano-lagrangiano de adjunto localizado (ELLAM), que es una extensión de la teoría algebraica de Herrera (1987). El método ELLAM, además de tener precisión del mismo orden que el Método de Características trata los términos de frontera de manera sistemática y conserva masa. En la implementación de ELLAM se han utilizado hasta la fecha dos clases de funciones de peso: funciones Bilineales y funciones de peso constantes. Cada una de las funciones presenta características particulares, cuyas peculiaridades son descritas, y conducen a esquemas numéricos diferentes. La aplicación del método ha permitido resultados satisfactorios para una amplia gama de números de Courant y de Peclet.

INTRODUCCION

El proceso de transporte de contaminantes en aguas subterráneas puede ser representado por la ecuación de advección-difusión. En la resolución práctica de esta ecuación se suelen utilizar métodos numéricos. Se han propuesto métodos que resuelven el problema en forma eficiente y precisa cuando en la ecuación están presentes la difusión y la advección por separado. Sin embargo, la obtención de soluciones adecuadas cuando se presenta la combinación de los dos fenómenos no ha sido fácil, sobre todo, cuando la advección domina en la ecuación. La

presencia de oscilaciones en la proximidad de los frentes abruptos o difusión numérica es introducida por la incapacidad de reproducir los frentes abruptos.

Tres enfoques distintos se han utilizado en el tratamiento numérico de la ecuación de transporte. Estos son el euleriano, el lagrangiano y el euleriano-lagrangiano. El primero de estos enfoques es muy conocido, lo utilizan los métodos de diferencia finitas y de elemento finito en su forma tradicional (Bouloutas and Celia, 1988; Cox and Nishikawa, 1991). Sin embargo, la aplicación de éstos está limitada a números de Courant menores de 1, ya que de otra manera, se obtienen errores significativos de truncamiento y difusión numérica. Por otra parte están los métodos lagrangianos que utilizan una malla en el espacio que se mueve en el tiempo con la velocidad de las "partículas". Esto es, la malla se adecua para poder rastrear el término advectivo y el término difusivo se aproxima con algún método estándar. Sin embargo, para la implementación numérica del método, el hecho que la malla cambie en cada paso del tiempo es problemático.

Los métodos eulerianos-lagrangianos o de características (CM) también rastrean la componente advectiva de la ecuación, pero utilizan una malla en el espacio fija en el tiempo (Neuman, 1984; Konikov, 1978; Douglas y Russell, 1982). A pesar de estas ventajas existen tres problemas en estos métodos que hacen que su utilización en algunos problemas prácticos de importancia no sea adecuada: i) la forma de tratar las fronteras no es clara, ii) no conserva masa, iii) presentan dispersión numérica, para algunos métodos, debido al bajo orden de interpolación o integración (Healy, 1993). Por otra parte, existe el método euleriano-lagrangiano de adjunto

localizado (ELLAM), que además de tener precisión del mismo orden que MMOC, trata los términos de frontera de manera sistemática y conserva masa (Celia, 1994; Herrera et al., 1993; Wang, 1994). Hasta ahora en la aplicación de ELLAM únicamente dos tipos de funciones de peso se han utilizado: funciones bilineales (ELLAM-bilineal) (Celia, 1990; Herrera et al., 1993), que se definen como funciones "chapeau" en el tiempo t^{n+1} y constantes a lo largo de las características, y funciones constantes localmente en t^{n+1} y también constantes a lo largo de las características (ELLAM-celdas) (Healy, 1993; Herrera, 1993). Por lo tanto, el objetivo de este artículo es en principio presentar las bases teóricas que sustentan el método, para luego describir las principales características de cada enfoque, y finalmente plantear los desarrollos futuros que permitirán mejorar el alcance y campos de aplicación del método.

MÉTODO EULERIANO-LAGRANGIANO DE ADJUNTO LOCALIZADO (ELLAM)

Sea el problema de valores de frontera, con saltos prescritos, definido por la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{en } \Omega, \quad (1)$$

sujeta a ciertas condiciones de frontera y con saltos prescritos, en la frontera de Ω ($\partial\Omega$) y en la superficie de discontinuidades Σ , respectivamente. En espacio-tiempo, las condiciones de frontera prescritas incluyen condiciones iniciales.

Sean D_1 y D_2 espacios lineales de las funciones base u y de peso w definidas en Ω , respectivamente. Cuando u y w satisfacen condiciones de frontera homogéneas, y son suficientemente lisas, las fórmulas de Green

$$\int_{\Omega} w \mathcal{L}u \, d\sigma = \int_{\Omega} \mathcal{L}^* w \, d\sigma, \quad (2)$$

se satisfacen. En la ecuación (2) $\mathcal{L}^*$ es el adjunto formal, que por definición satisface

$$w \mathcal{L}u - u \mathcal{L}^* w = \nabla \cdot \{ \mathcal{D}(u, w) \}, \quad (3)$$

para alguna función vectorial bilineal $\mathcal{D}(u, w)$.

Integrando la ecuación (3) sobre la región Ω y utilizando el teorema de la divergencia generalizado (Herrera, 1985, 1987), se tiene

$$\int_{\Omega} \{ w \mathcal{L}u - u \mathcal{L}^* w \} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathcal{R}_D(u, w) \, d\sigma + \int_{\Sigma} \mathcal{R}_I(u, w) \, d\sigma. \quad (4)$$

En las funcionales $\mathcal{R}_D$ y $\mathcal{R}_I$ así definidas, quedan involucrados términos "conocidos", asociados a las condiciones de frontera o de salto, y términos en los que aparecen únicamente incógnitas. La descomposición de la función bilineal $\mathcal{R}_D(u, w)$, que está relacionada con los términos de frontera es:

$$\mathcal{R}_D(u, w) = \mathcal{B}(u, w) \cdot \underline{n} = \mathcal{B}(u, w) - \mathcal{C}^*(u, w), \quad (5)$$

donde $\mathcal{B}(u, w)$ y $\mathcal{C}(w, u) = \mathcal{C}^*(u, w)$ son dos funciones bilineales. La forma de las funciones $\mathcal{B}(u, w)$ y $\mathcal{C}(w, u)$, depende no tan solo del operador $\mathcal{L}$, sino además, de las condiciones de frontera prescritas. La función $\mathcal{B}(u, w)$ tiene la característica de que para cualquier función u que satisfaga las condiciones de frontera e iniciales prescritas, $\mathcal{B}(u, w)$ es una función lineal de w que no depende de la elección particular de w . Por su parte, la función $\mathcal{C}(w, u)$, al ser evaluada en funciones u que satisfacen ciertos valores "complementarios de frontera", es una función lineal que depende exclusivamente de w . Las funciones bilineales $\mathcal{B}(u, w)$ y $\mathcal{C}(w, u)$ están asociadas a las condiciones iniciales y de frontera prescritas y complementarias, respectivamente. Por esto, su expresión cambia dependiendo del tipo de condiciones que se utilicen. Las funciones que resultan para las condiciones de Dirichlet, considerando la ecuación (5) son las siguientes:

$$\mathcal{B}(u, w) = -uw \quad \text{en } \partial_n \Omega, \quad (6)$$

$$\mathcal{C}(w, u) = -uw \quad \text{en } \partial_{n+1} \Omega, \quad (7)$$

$$\mathcal{B}(u, w) = u \mathcal{D} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \underline{n}, \quad (8)$$

$$\mathcal{C}(w, u) = w \left(\mathcal{D} \frac{\partial u}{\partial x} - Vu \right) \quad \text{en } \partial \Omega \quad (9)$$

De la misma manera, formulaciones convenientes de problemas con saltos prescritos requieren de una descomposición de la función bilineal $\mathcal{R}_I(u, w)$, cuya definición es local. En este caso, se puede descomponer de la siguiente manera

$$\mathcal{R}_\Sigma(u, w) = g(u, w) - \mathcal{K}^*(u, w), \quad (10)$$

con

$$g(u, w) = -D([u], \dot{w}) \cdot \underline{n} \quad (11)$$

$$\mathcal{K}^*(u, w) = D(\dot{u}, [w]) \cdot \underline{n} \quad (12)$$

la función lineal $\mathcal{K}^*(u, w)$, juega un papel similar al de los valores complementarios de frontera $\mathcal{C}^*(w, u)$. Similarmente, las condiciones de salto en Σ se especifican por medio de $\mathcal{L}(u, w)$.

Introduciendo la notación

$$\langle Pu, w \rangle = \int_{\Omega} w \mathcal{L} u \, d\sigma, \quad \langle Q^* u, w \rangle = \int_{\Omega} u \mathcal{L} w \, d\sigma,$$

$$\langle Bu, w \rangle = \int_{\Omega} \mathcal{B}(u, w) \, d\sigma, \quad \langle C^* u, w \rangle = \int_{\Omega} \mathcal{C}(w, u) \, d\sigma,$$

$$\langle Ju, w \rangle = \int_{\Sigma} g(u, w) \, d\sigma, \quad \langle K^* u, w \rangle = \int_{\Sigma} \mathcal{K}(w, u) \, d\sigma. \quad (13)$$

en donde σ denota la medida respecto a la cual se está integrando. Agrupando del lado izquierdo los términos que tienen que ver con los datos, la ecuación (4), se puede escribir más brevemente como

$$P - B - J = Q^* - C^* - K^*. \quad (14)$$

Esta identidad se conoce como la fórmula de Green-Herrera en campos discontinuos (Herrera, 1987). Utilizando la fórmula de Green-Herrera, la formulación variacional se transforma en

$$\langle (Q^* - C^* - K^*)u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle \quad \forall w \in D_2. \quad (15)$$

Esta es "la formulación variacional en términos de la información buscada", porque Q^*u , C^*u y K^*u no se prescriben. En esta expresión, f, g, j son funcionales que representan las condiciones prescritas.

ECUACIÓN DE ADVECCIÓN CON DIFUSIÓN

Sea la ecuación de advección-difusión transitoria en una dimensión en la forma conservativa sujeta a condiciones

iniciales y de frontera en $x = 0$ y $x = \ell$.

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} - Vu \right) + Ru = f_{\Omega}(x, t) \quad \text{in } \Omega, \quad (16)$$

$$u(x, t^n) = u^n(x). \quad (17)$$

Al aplicar la teoría algebraica (Herrera, 1987) a la región Ω , es conveniente dividir a la frontera $\partial \Omega$ en $\partial_0 \Omega$, $\partial_t \Omega$, $\partial_n \Omega$ y $\partial_{n+1} \Omega$, que satisfacen $x = 0$, $x = \ell$, $t = t^n$, $t = t^{n+1}$, respectivamente. Las condiciones iniciales prescritas se deben satisfacer en $\partial_0 \Omega$ y las condiciones de frontera en $\partial_n \Omega$ y en $\partial_t \Omega$.

En la implementación de los procedimientos ELLAM se han utilizado hasta la fecha dos clases de funciones de peso: funciones bilineales (ELLAM-bilineal) (Herrera et al., 1993; Celia et al., 1990) y más recientemente funciones de peso constante (Healy, 1993; Herrera, 1993), que dan como resultado un método de "Volumenes de Control" o de "Celdas", ELLAM. En el método Bilineal, se introduce una partición del intervalo $\{0 = x_0, x_1, \dots, x_E = \ell\}$, en el dominio $[0, \ell]$. La región Ω se descompone en regiones Ω_i que estarán limitadas por curvas espacio-temporales Σ_i , $i = 1, \dots, E$. Cada una de estas regiones estará asociada al nudo x_i de la malla de alguna forma (Fig. 1). En cambio en el método ELLAM-Celdas, las "Celdas" serán los subintervalos $\{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\}$ (con $i = 1, \dots, E-1$), $[x_0, x_{1/2}]$ y $[x_{E-1/2}, x_E]$, mientras que en los puntos $\{x_0, \dots, x_E\}$ serán los "centros" de las celdas (Fig. 2). Nótese que las funciones de peso lineales, son definidas en x_{i-1} y x_{i+1} , en cambio, las funciones de peso constante, son definidas sobre un bloque centrado en $x_{i-1/2}$ y $x_{i+1/2}$. En el método de celdas, al utilizar funciones de peso constantes en su soporte, la formulación del método se simplifica mucho respecto a la formulación de ELLAM-Bilineal. Esto es válido tanto cuando el soporte de la función no cruza fronteras como cuando las cruza. A diferencia del método ELLAM-Bilineal, no es necesario introducir incógnitas en la frontera $x = \ell$ porque ningún soporte de las funciones de peso la intercepta. Esto reduce el trabajo computacional que resulta al implementar el método, sin sacrificar precisión.

Cuando un método numérico se aplica paso a paso en el tiempo, el objetivo es predecir la solución en el tiempo t^{n+1} cuando se conocen en el tiempo t^n y se tienen condiciones de frontera prescritas. Además, se aplicarán funciones de peso que satisfacen

$$\mathcal{L}^* = -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial w}{\partial x} \right) - V \frac{\partial w}{\partial x} + R w, \quad (18)$$

y donde la función $\underline{D}(u, w)$ es definida como

$$\underline{D}(u, w) = \left[u \left(D \frac{\partial w}{\partial x} + (V - V_{\Sigma}) w \right) - w D \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (19)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{R}_{\Sigma}(u, w) = (1 + V_{\Sigma}^2)^{-1/2} \left[u \left(D \frac{\partial w}{\partial x} + (V - V_{\Sigma}) w \right) - w D \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (20)$$

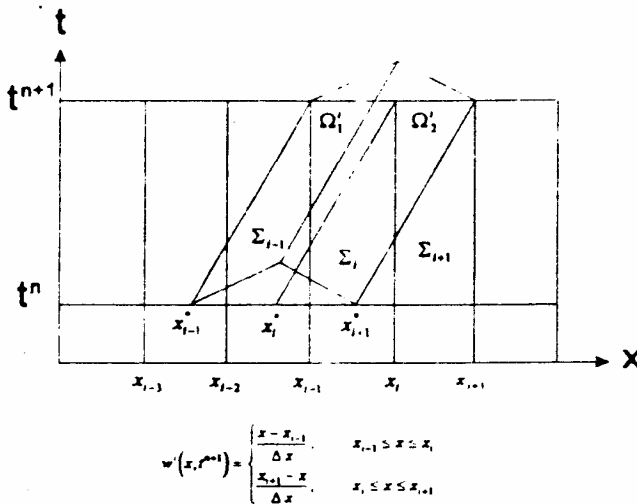


Figura 1. Funciones de peso-Método Bilineal.

En estas condiciones, la formulación variacional en términos de la información buscada se puede escribir como:

$$\langle (C^* + K^*) u, w \rangle = \langle g + j, w \rangle \quad \forall w \in D_2. \quad (21)$$

La clasificación de los métodos numéricos en Métodos Espaciales Óptimos y en Métodos de Características (CM) depende de las discontinuidades de las funciones de peso. Si la funciones de peso no dependen del tiempo la

velocidad de las curvas de discontinuidades V_{Σ} es cero, se obtienen Métodos Espaciales Óptimos. Tomando en cuenta estas consideraciones en el método ELLAM Bilineal, $\mathcal{R}^*(w, u)$ se anula, mientras que

$$\mathcal{R}^*(w, u) = \pm (1 + V_{\Sigma}^2)^{-1/2} u \left[D \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (22)$$

donde $(1 + V_{\Sigma}^2)^{-1/2}$ es el vector unitario normal a la superficie de discontinuidades Σ .

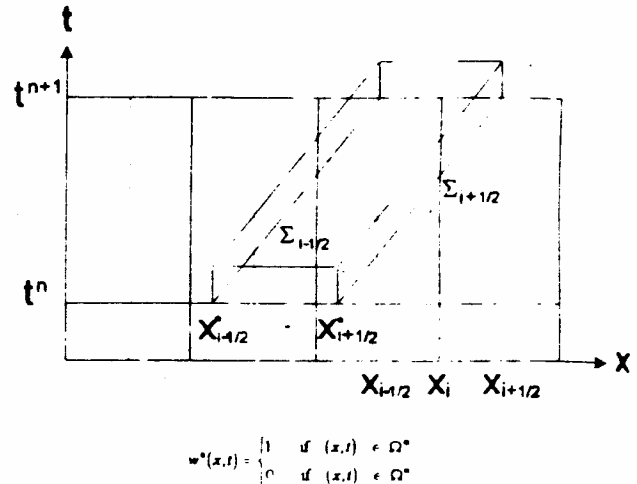


Figura 2. Funciones de peso- Método de Celdas.

Por lo tanto, el principio variacional en términos de la información buscada (Eq 3), cuando la región Ω' no intercepta las fronteras laterales, se reduce a

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x, t^{n+1}) w'(x, t^{n+1}) dx - \\ & \frac{D}{\Delta x} \left(\int_{x_{i-1}} u dt - 2 \int_{x_i} u dt + \int_{x_{i+1}} u dt \right) = \\ & \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x, t^n) w'(x, t^n) dx + \int_{\Omega} f_{\Omega} w' dx dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Las integrales que aparecen en esta ecuación se pueden aproximar de muchas formas distintas, diferentes aproximaciones resultan en diferentes algoritmos de

características reportadas en la literatura. En todos éstos las integrales se aproximan en términos de valores de u en los nodos en los niveles de tiempo t^n y t^{n+1} , de tal forma que las incógnitas en la ecuación corresponden, en última instancia, a las incógnitas en el tiempo t^{n+1} , por ejemplo, interpolación lineal de u por tramos en los tiempos t^n y t^{n+1} , aparejados por una interpolación totalmente implícita (en $t = t^{n+1}$) de la integral sobre las características, conducen al Método Modificado de Características (MMOC) de Douglas y Russell (1982).

En el método de ELLAM-Celdas, $\mathcal{K}^n(w, u) = 0$, debido a la continuidad de la derivada normal en toda la región, por lo que, toda la información que se busca en Σ está dada por $\mathcal{K}^n(w, u)$ que involucra a la derivada de la solución únicamente. Por consiguiente el valor de $\mathcal{K}^n(w, u)$ es:

$$\mathcal{K}^n(w, u) \equiv \mathcal{K}^n(w, u) = \pm(1+V^2)^{-1/2} [w] D \frac{\partial u}{\partial x} \quad (24)$$

Por lo tanto la formulación variacional en términos de la información buscada (Eq. 21) es:

$$\int_{x_{a-1/2}}^{x_{a+1/2}} u^{n+1} dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\Sigma_{a+1/2}} dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\Sigma_{a-1/2}} dt = \int_{x_{a-1/2}}^{x_{a+1/2}} u^n dx, \quad (25)$$

donde las incógnitas se han agrupado en el miembro del lado izquierdo de la ecuación y los datos en el miembro derecho de la misma. Aquí, las integrales de t^n a t^{n+1} se aproximan con un esquema totalmente implícito, por una aproximación de Euler regresiva. La primera integral espacial, se aproxima por medio de diferencias centrales, y la segunda integral espacial, es aproximada integrando un polinomio de Taylor expandido alrededor del punto medio del intervalo $[x_{a-1/2}, x_{a+1/2}]$. Sin embargo como u^n no es el punto medio de la celda, u^n es un valor no conocido, y una interpolación debe ser establecida para definir este valor.

Cuando la región Ω' intercepta la frontera de "Entrada" ($x = 0$) se requiere de una aproximación que no cruce curvas características, por lo cual es necesario introducir las condiciones de frontera. Para condiciones de Dirichlet, se usan $E-2$ funciones de peso, asociadas con las subregiones $\Omega^2, \dots, \Omega^{E-1}$. En particular, no son aplicadas

funciones de peso en la subregión (Ω^1) o en la última (Ω^E). Para condiciones de Dirichlet en la frontera de salida ($x = d$), las contribuciones de frontera se anulan para todas las funciones de peso. Esto se debe a que todas ellas son cero en $\Sigma_{E-1/2}$ y bajo esta característica. Además el sistema de ecuaciones así determinado queda cerrado porque u_E^{n+1} es un dato conocido.

CONCLUSIONES

Se llevaron a cabo pruebas numéricas para probar el desempeño del método trabajando con la ecuación de transporte con advección y difusión (Celia, 1989). Se desarrollaron únicamente los algoritmos para coeficientes constantes, utilizando un esquema de Euler para discretizar la parte temporal y se usaron dos problemas: la propagación de una discontinuidad de salto inicial y una campana de Gauss. Los resultados y la eficiencia del método se compararon con distintos métodos, variando θ en el esquema de Euler y probando para distintos números de Courant y de Peclet. Se concluyó que las soluciones obtenidas con este método son comparables a las obtenidas con los mejores métodos Eulerianos disponibles.

Por otro lado, en este tipo de métodos se proponen funciones de peso que no son simétricas. Cuando la velocidad es mayor que cero, estas funciones tienen una inclinación en la dirección negativa del eje, que por lo general depende de parámetros a determinar. En el método Espacial Óptimo propuesto con base en LAM, se encontró que las funciones de peso tienen una inclinación en la dirección contraria a la velocidad que varía continuamente con los coeficientes de la ecuación y no depende de parámetros artificiales.

Los OSM en LAM se han utilizado también en algunas aplicaciones específicas, como es el caso de contaminación y biodegradación (Celia, 1989; Kindred, 1989). En estos trabajos se incluye el término de reacción y se discuten ejemplos con coeficientes variables y sistemas de ecuaciones no lineales.

Un enfoque más reciente al aplicar LAM a la ecuación de transporte con advección y difusión dio origen al Método Euleriano-Lagrangiano de Adjunto Localizado, que es una generalización del Método de Características. En este caso se aplica la formulación variacional al operador $\mathcal{L}$ en espacio-tiempo, es decir, se utilizan funciones de peso que dependen del tiempo t y la posición x y se integra sobre la región espacio-temporal Ω .

La aplicación de los métodos ELLAM-Bilineal y ELLAM-Celdas ha mostrado que el último de estos dos métodos es más eficiente en promedio que el primero. Es de especial interés que, en este método, el error se reduce más para los dominios en que se cruzan fronteras que para el

dominio en que no lo hace. Esto reafirma la idea de que la metodología ELLAM incorpora "correctamente" las condiciones de frontera en el tratamiento numérico de la ecuación de Advección-Difusión.

Otro aspecto que es importante resaltar es una mayor eficiencia en la implementación numérica del método de Celdas en comparación con la del Bilineal. Esto se debe por un lado a la sencillez de las funciones de peso que se utilizan, y por otro, a que no es necesario introducir incógnitas en la frontera de salida y tampoco hacer interpolaciones para aproximar los valores en esta región. Por lo que, con estas funciones de peso es posible eliminar las contribuciones en la frontera de salida.

Tomando en cuenta los resultados numéricos obtenidos hasta ahora, el método ELLAM-Celdas parece muy prometedor. Más aún porque la sencillez hace que generalizaciones a coeficientes variables y a varias dimensiones se puedan hacer con relativa facilidad. Actualmente se realizan pruebas numéricas para extender el método a dos y tres dimensiones e incluir un espectro más amplio de números de Courant.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido posible, gracias al apoyo de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM) y del Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

REFERENCIAS

- Bouloutas, E.T., and M.A. Celia. 1988. An analysis of some classes of Petrov-Galerkin and optimal test function methods. In *Proceedings of Seventh International Conference on Computational Methods in Water Resources*, vol. 2, pp. 15-20.
- Celia, M.A., I. Herrera, E.T. Bouloutas, and J.S. Kindred. 1989. "A New Numerical Approach for the Advective-Diffusive Transport Equation". *Numer. Methods Partial Different. Equ.* 5, 203-226.
- Celia, M.A., J.S. Kindred, I. Herrera. 1989. "Contaminant Transport and Biodegradation: 1. A Numerical Model for Reactive Transport in Porous media". *Water Resour. Res.* 25(6), 1141-1148. *Numer. Methods Partial Different. Equ.* 5, 203-226.
- Celia, M.A., T.F. Russell, I. Herrera, and R.E. Ewing. 1990. "An Eulerian-Lagrangian Localized adjoint method for the Advection-Diffusion Equation," *Adv. Water Res.* 13, 187.
- Celia, M.A. 1994. Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Methods for Contaminant simulations. A. Peters et al. (eds.) *Computational Methods in Water Resources X*, Heidelberg. 207-216.
- Cox, R.A., and T. Nishikawa. 1991. A New total variation diminishing scheme for the solution of advective-dominant solute transport. *Water Resour. Res.*, 27(10), 2645-2654.
- Douglas, J., Jr., AND T.F. Russell. 1982. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, 871-885.
- Espedal, M.S., and R.E. Ewing. 1987. Characteristic Petrov-Galerkin subdomain methods for two-phase immiscible flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 64, 113-136.
- Healy, R.W., and T.F. Russell. 1993. A finite-volume Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method for solution of the Advection-Dispersion equation. *Water Resour. Res.*, Vol 29, No 7, pp. 2399-2413.
- Herrera, I., L. Chargo, and G. Aldulcin. 1985 "Unified formulation of numerical methods. Part III. Finite differences and ordinary differential equations," *Numer. Methods Partial Different. Equ.* 1 241.
- Herrera, I. 1987. The algebraic theory approach for ordinary differential equations. Highly accurate finite differences. *Numer. Methods Partial Different. Equ.* 3, 199-218.
- Herrera, I., R.E. Ewing, M.A. Celia, and T.F. Russell. 1993. Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method: The theoretical Framework. *Numer. Methods Partial Different. Equ.* 9, 431-457.
- Herrera, G., and I. Herrera. 1993. Eulerian- Lagrangian Method of Cell Based on Localized Adjoint Method. *Numer. Methods Partial Different. Equ.* 10, 205-223
- Kindred, J., M.A. Celia. 1989. "Contaminant Transport and Biodegradation 2. Conceptual and Test Simulations". *Water Resour. Res.* 25(6), 1149-1189.
- Konikow, L.F., and J.D. Bredehoeft. 1978. Computer model of two-dimensional solute transport and dispersion in groundwater, in *Techniques of Water-Resource Investigations*, Book 7, Chapter C2, 90 pp., US Geological Survey, Washington, DC.
- Neuman, S.P. 1984. Adaptive Eulerian-Lagrangian finite-element method for advection-dispersion, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20, 321-337.
- Wang, H., and R.E. Ewing. 1994. Optimal-Order Convergence rates for Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Methods for Reactive Transport and Contamination in Groundwater. *Numer. Methods Partial Different. Equ.* 11, 1-31.