MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS
E. Oñate, F. Zárate, G. Ayala, S. Botello y M.A. Moreles (Editores)

UNA TEORÍA GENERAL DE MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN DE DOMINIO

Ismael Herrera Revilla
Instituto de Geofísica
Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado Postal 22-582
14000, México, D.F.
Email: iherrera@servidor.unam.mx,
http://www.igeofcu.unam.mx/iherrera

Resumen. En esta plática se presenta una teoría unificada de los métodos de descomposición de dominio en que la estrategia unificadora consiste en obtener información acerca de la solución buscada, en la frontera interior (Σ) que separa a los subdominios entre sí, suficiente para definir problemas locales bien planteados en cada uno de ellos. Hay dos procedimientos generales que pueden aplicarse para obtener tal información; se les refiere como métodos directos e indirectos (o de Trefftz-Herrera). Los métodos directos, cuando son vistos desde está perspectiva general dan lugar a la formulación de condiciones de compatibilidad, a partir de las cuales es posible derivar la información buscada en (Σ). Los métodos de Schwarz y el de Steklov-Poincaré quedan incluidos entre esta clase de procedimientos. Los métodos de Trefftz-Herrera, introducidos en el análisis numérico de las ecuaciones diferenciales parciales por Herrera y sus colaboradores, se distinguen por hacer uso de funciones de peso especializadas, las cuales tienen la propiedad de suministrar la información requerida en Σ, exclusivamente. En esta plática se presenta la teoría general, se ilustran sus alcances y se indican algunos de los resultados obtenidos hasta ahora en la línea de investigación actualmente en desarrollo.

Palabras clave: Descomposición de Dominio, Elementos Finitos, Colocación, Método Trefftz-Herrera, LAM, ELLAM.

1. INTRODUCCIÓN

En la literatura se ha manifestado la importancia de establecer una teoría unificada de los métodos de descomposición de dominio (MDD)[1]. El marco teórico desarrollado por el autor y aparecido en una serie de artículos -muchos de ellos publicados recientemente[2-16] proporciona bases muy adecuadas, especialmente sistemáticas y generales, para el derivar en forma unificada los métodos de descomposición de dominio, por lo que en este artículo se describe de manera sucinta, y se actualiza en algunos puntos, una teoría general y unificadora de dichos métodos, recientemente propuesta por Herrera [2-5]. Esta teoría, además de permitir la presentación unificada de los MDD existentes actualmente, señala áreas con potencialidad para la investigación y sugiere nuevos métodos numéricos, que deberían desarrollarse, por lo que aquí también se mencionan algunos avances recientes habidos en ellos.

Generalmente los métodos numéricos de las ecuaciones diferenciales parciales, tales como los de elementos finitos, los de colocación y otros, se formulan usando 'splines'. Sin embargo, en la teoría que aquí se presenta los problemas de condiciones de contorno se formulan en espacios de funciones discontinuas, en las cuales no solamente sus derivadas pueden ser discontinuas, sino que las funciones mismas pueden serlo. Esta forma de proceder da mayor versatilidad a los procedimientos. En primer lugar, se introduce una partición del dominio y se consideran espacios de funciones cuyas discontinuidades se presentan en dichas fronteras interiores del dominio –es decir, aquéllas que separan a cualquier pareja de subdominios de la partición que sean contiguos-. En este marco se considera un problema general en el que las soluciones de las ecuaciones diferenciales buscadas, además de condiciones en la frontera, satisfacen discontinuidades (o 'saltos') -de la solución y sus derivadas- que se prescriben en las fronteras interiores del dominio. A este problema se le denominará como "el problema de condiciones de contorno con saltos prescritos" (o BVPJ: the Boundary Value Problem with Jumps).

El concepto unificador que sirve de base a la "Teoría General de Métodos de Descomposición de Dominio" propuesta por Herrera, que aquí se presenta, es que se supone que se conocen todas las funciones que satisfacen la ecuación diferencial en cada uno de los subdominios de la partición –a las que se les refiere como "soluciones locales"-. Cuando se adopta esta hipótesis, lo que se requiere para resolver el problema-BVPJ es identificar, en cada subdominio, a la solución local que es la restricción al subdominio de la solución global. Es decir, el problema que los métodos de descomposición de dominio deben resolver es uno de *"identificación"*. En la Teoría General se utilizan a los valores de frontera en cada uno de los subdominios como medio de identificación de la solución buscada. Cuando la información disponible acerca de dichos valores -complementada en algunos casos con los datos de frontera- es suficiente para definir problemas bien planteados en cada uno de los subdominios de la partición –nos referiremos a esta clase de problemas como "problemas locales"-, la solución local correspondiente queda identificada. Cualquier procedimiento para obtener información en las fronteras interiores de la partición, suficiente para definir dichos problemas locales, constituye un "Método de Descomposición de Dominio". Así, los diversos métodos de descomposición de dominio se identifican con los diferentes procedimientos que se pueden adoptar para obtener esa información, en las fronteras interiores del dominio. Esta forma de conceptuar al problema de la descomposición de dominio permite derivar a los métodos de descomposición de dominio tomando un punto de partida común y la teoría resultante, además de ser unificadora, es elegante y de gran generalidad. En ella se clasifica a dichos procedimientos en dos grandes grupos: los métodos directos y los indirectos (o de Trefftz-Herrera). Cada una de estas clases es muy amplia, pues incluye métodos muy diversos.

Una forma de abordar los métodos directos, introducida por Jirousek [17] (para referencias adicionales ver [2]) consiste en construir la solución global con base en las soluciones locales, imponiendo las condiciones de salto -generalmente de continuidad, pues en los procedimientos convencionales no es habitual tratar el problema con saltos prescritos- a través de las fronteras que separan a subdominios contiguos, en forma directa. En el método de Trefftz-Jirousek [2,17], se utilizan soluciones locales que no satisfacen ninguna condición de continuidad, por lo que todas las condiciones de continuidad –o con mayor generalidad, las condiciones de salto- se imponen simultáneamente. En otros métodos directos, como el de Steklov-Poincaré [18]–es decir, el que se basa en la aplicación de operadores de Steklov-Poincaré-, primero se satisfacen algunas de las condiciones de continuidad. Para este fin, generalmente se utilizan espacios de funciones que de entrada satisfacen algunas de las condiciones de continuidad. Otra forma, que se ha propuesto como resultado del desarrollo de la teoría unificada propuesta por Herrera, da lugar a una formulación del problema un poco más innovadora, pues las soluciones locales se utilizan para establecer condiciones de compatibilidad con las cuales es posible obtener la información buscada en la frontera interior del dominio [3]. En esta cita, además, se dan algunas muestras de la generalidad de dicha formulación, la cual incluye como casos particulares a los métodos de Schwarz[1,19,20].

Los métodos indirectos de descomposición de dominio fueron introducidos por Herrera[15,16] y frecuentemente se les refiere como métodos de Trefftz-Herrera. La descripción de los métodos indirectos o de Trefftz-Herrera método que se da a continuación está basada en[5]. Este tipo de procedimientos aprovechan el hecho de que cuando se aplica el método de residuos pesados la información acerca de la solución exacta contenida en una solución aproximada depende exclusivamente del sistema de funciones de peso que se utiliza y es independiente de las funciones de base. En los métodos indirectos, la búsqueda de la información que se requiere en las fronteras interiores se realiza utilizando funciones de peso que tienen la propiedad de suministrar exclusivamente dicha información ("la información buscada"), la cual se define de antemano como objetivo de la búsqueda. Para guiar la construcción de las funciones de peso con esta propiedad, se realiza un análisis detallado de la manera en que la información contenida en las soluciones aproximadas depende de la funciones de peso que se aplican. La base de tal procedimiento de análisis la suministra una clase de fórmulas de Green, también introducidas por Herrera en[6] (ver también[7]) y cuya versión más reciente apareció en[5], las cuales son válidas aun en el caso en que tanto las funciones de base como las de prueba presenten discontinuidades a través de las fronteras interiores del dominio de definición del problema.

Un factor que influye en forma importante en la eficiencia de los algoritmos es la cantidad de información que manejan. Es frecuente que para lograr eficiencia numérica óptima se requiera que los mismos manejen el mínimo de la información, indispensable para definir los problemas locales. Para lograr este objetivo, no basta con concentrar toda la información en la frontera interior del dominio, pues en general tal información puede contener información superflua -en el sentido de que es más que la que es indispensable para definir problemas locales bien planteados en los subdominios de la partición-. Por eso la teoría general de los métodos indirectos, proporciona procedimientos que permiten definir de antemano la información que se intenta obtener ('la información buscada') y desarrollar funciones de peso que proporcionan exclusivamente esta información[5]; así, al aplicarlas se elimina toda la información superflua. Este último propósito se alcanza por medio de un Teorema, que enuncia una condición necesaria y suficiente, la cual caracteriza a la información buscada[5]. Este Teorema constituye un enunciado sumamente general de los métodos indirectos, pues es aplicable a cualquier ecuación diferencial lineal o sistemas de esas ecuaciones, independientemente de su tipo (elíptico, parabólico o hiperbólico) y con coeficientes posiblemente discontinuos, cuando el problema considerado es uno de condiciones de contorno con saltos prescritos en sus fronteras interiores (BVPJ). Esta forma de proceder proporciona gran versatilidad a los métodos Trefftz-Herrera, pues permite seleccionar la información que se busca de acuerdo con las necesidades de la-aplicación que se hace. Por ejemplo, de esta manera en un artículo anterior[12] se derivaron los métodos mixtos de Raviart y Thomas.

Por otra parte, la descomposición del dominio puede ser ajena (non-overlapping); es decir, en las cuales los subdominios son ajenos; o la descomposición del dominio puede ser yuxtapuesta (overlapping); es decir, en las cuales los subdominios tienen intersecciones que no son vacías. Tanto los métodos directos como los indirectos se pueden aplicar con descomposiciones del dominio ajenas o yuxtapuestas. De esta manera se identifican cuatro clases de métodos de descomposición de dominio.
Es oportuno señalar que en los métodos indirectos la definición de la información buscada determina las condiciones de continuidad, o con mayor generalidad de "lisura", que las funciones de prueba deben satisfacer y conduce a considerar soluciones locales del operador diferencial adjunto, que satisfacen de antemano ciertas condiciones de continuidad. Esto es similar a lo que pasa en los métodos directos, en que las soluciones se pueden construir a partir de soluciones locales completamente discontinuas (como en el método de Trefftz-Jirouseк) o, alternativamente, a partir de soluciones que de entrada satisfacen algunas de las condiciones de continuidad. En general, si se utilizan soluciones locales totalmente discontinuas, la descomposición de dominio es ajena (non-overlapping) y si de entrada satisfacen algunas condiciones de continuidad, la descomposición de dominio es de subdominios yuxtapuestos (overlapping).

La notación utilizada en el presente artículo es la misma que se presentó en[5]. En la Sección 2 se define el problema general de contorno, con saltos prescritos en la frontera interior, del que se ocupa la teoría y en la Sección 3, se formalizan la ideas acerca de la manera de concebir el problema de los MDD que se explicaron antes. Las Secciones 4 y 5 están dedicadas a la exposición, muy sucinta, de los métodos directos e indirectos. El alcance de la teoría se muestra en la Sección 6, presentando en forma explícita las fórmulas correspondientes a algunos casos particulares de aplicación. Las referencias[3,5,21] contienen algunas de las aplicaciones realizadas hasta ahora.

2. PROBLEMAS CON SALTOS PRESCRITOS

El problema general de valores de contorno con saltos prescritos (BVPJ), que se considerará, está definido por [2]

$$\mathsf{L}u^i = f_\Omega^i \equiv \mathsf{L}u_\Omega^i; \quad in\, \Omega_i, \quad i = 1,\ldots,E \tag{2.1}$$

$$\mathsf{B}(u,\bullet) = g_\partial(\bullet) \equiv \mathsf{B}(u_\partial,\bullet); \quad in\, \partial\Omega \tag{2.2}$$

y

$$\mathsf{J}(u,\bullet) = j_\Sigma(\bullet) \equiv \mathsf{J}(u_\Sigma,\bullet); \quad in\, \Sigma \tag{2.3}$$

Aquí, f_{Ω}^{i} $(i = 1,...,E)$, así como $g_{\partial}(\bullet)$ and $j_{\Sigma}(\bullet)$ son datos. En lo que sigue, se supone que el BVPJ posee una solución única, para la cual se reserva la notación $u \equiv \{u^1,...,u^E\} \in \hat{D}_1(\Omega)$.

Como una ilustración considere la ecuación elíptica se segundo orden:

$$\mathcal{L}u^i \equiv -\nabla \bullet (\underline{\underline{a}} \bullet \nabla u^i) + \nabla \bullet (\underline{b}u^i) + cu^i = f_{\Omega}^{i}, \quad in\ \Omega_i, \quad i = 1,...,E \quad (2.4)$$

con condiciones de frontera del tipo de Dirichlet

$$u = u_{\partial}, \ on\ \partial\Omega \qquad (2.5)$$

y condiciones de salto

$$[u] = [u_{\Sigma}] \ \ and \ \ [\underline{a}_n \bullet \nabla u] = [\underline{a}_n \bullet \nabla u_{\Sigma}], \ \ on\ \Sigma \quad (2.6)$$

Aquí $\underline{a}_n \equiv \underline{a} \bullet \underline{n}$.

3. EL PROBLEMA DE DESCOMPOSICIÓN DE DOMINIO

En esta Sección se presenta una definición del "Problema de Descomposición de Dominio (PDD)", cuyo propósito es dar una expresión matemática a las ideas que sobre este problema se presentaron en la Introducción.

Sea $\hat{D}_1(\Omega)$, el espacio de funciones con "saltos" definido en[5]. Además, para cada $i = 1,...,E$, defina $H_i \subset D_1(\Omega_i)$ por

$$H_i \equiv \{v^i \in D_1(\Omega_i) \mid L v^i = 0, \ in\ \Omega_i\} \qquad (3.1)$$

y $\hat{H} \subset \hat{D}(\Omega)$ por

$$\hat{H} \equiv H_1 \oplus ... \oplus H_E \subset \hat{D}(\Omega) \quad (3.2)$$

Claramente la solución $u \equiv (u^1,...,u^E) \in \hat{D}_1(\Omega)$ del problema BVPJ puede escribirse como

$$u \equiv \sum_{i=1}^{E} u^i = \sum_{i=1}^{E} u_{\Omega}^{i} + \sum_{i=1}^{E} u_{H}^{i}; \qquad (3.3)$$

donde $u^i = u_{\Omega}^{i} + u_{H}^{i}$; .

Definición.3.1.- Al problema de encontrar $u^i \in D(\Omega_i)$,, para toda $i=1,...,E$, tales que $u \equiv (u^1,...,u^E) \in \hat{D}_1(\Omega)$ es *la solución del problema* BVPJ, se le referirá como "El Problema de Descomposición de Dominio".

Claramente para cada $i(=1,...,E)$, u^i pertenece a la variedad lineal $u^i_\Omega + \mathsf{H}_i$. Así, al problema formulado arriba se le puede concebir como un problema de identificación: se trata de identificar a las funciones $u^i = u^i_\Omega + u^i_H$ de las variedades lineales $u^i_\Omega + \mathsf{H}_i$ que constituyen la solución del mismo. En la teoría de métodos de descomposición de dominio que se presenta en este artículo, se utilizan los valores en cada una de las fronteras $\partial\Omega_i$ $(i=1,...,E)$ para identificar a la función $u^i = u^i_\Omega + u^i_H$ correspondiente. Para servir como medio de identificación, los valores que se utilicen deben ser suficientes para definir problemas bien planteados en cada una de las subregiones Ω_i. Como las condiciones de frontera utilizadas para definir el BVPJ se especifican en la frontera exterior $\partial\Omega$, en general basta con obtener información en la frontera interior Σ para alcanzar este objetivo, pues en aquellos subdominios en que $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i \neq \phi$, la información en Σ se complementa con los datos en la frontera exterior. La siguiente definición servirá de base para el desarrollo de la teoría general de métodos de descomposición de dominio que se presenta en este artículo:

> ***Los métodos de descomposición de dominio son procedimientos para obtener información, acerca de la solución buscada, en la frontera interior Σ suficiente para definir problemas bien planteados en cada una de la subregiones Ω_i $(i=1,...,E)$, que permitan obtener $u^i = u^i_\Omega + u^i_H$, para cada $(i=1,...,E)$, resolviendo problemas locales exclusivamente.***

Hay dos métodos muy generales que se pueden aplicar para obtener dicha información; los "directos" y los "indirectos (o método de Trefftz-Herrera)". Una característica general de los métodos directos es que en ellos se utilizan soluciones locales del operador diferencial que interviene en la formulación del BVPJ (al cual nos referiremos como "el operador diferencial" y a su operador adjunto como "el operador adjunto"). Por otra parte, una característica distintiva de los métodos indirectos es que en ellos se utilizan soluciones locales del operador adjunto. En las Secciones subsecuentes se discuten estas dos clases de métodos.

4. MÉTODOS DIRECTOS. LA IDEA BÁSICA

Como se dijo en la Introducción, cuando se adopta el punto de vista de la teoría descrita en este artículo, los métodos directos aparecen como una forma de utilizar las soluciones locales del operador diferencial, y no de su adjunto, para obtener condiciones de compatibilidad que los valores de la solución buscada deben satisfacer en la frontera interior Σ. Para ilustrar la idea básica de esta forma de proceder, en está Sección se presenta este procedimiento en un caso muy sencillo.

Considere el problema de resolver la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\mathcal{L}u \equiv -\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+\frac{d}{dx}(bu)+cu=0 \qquad (4.1)$$

en el intervalo (0,l) de los reales, sujeto a condiciones de frontera del tipo de Dirichlet. Se considerará además, la partición, $\{x_0=0, x_1, \ldots, x_E = l\}$ de dicho intervalo. Sea $x_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, entonces $u(x_i)$ depende linealmente de los valores: $u(x_{i-1})$ y $u(x_{i+1})$. Este hecho se puede expresar por la ecuación

$$u(x_i)=\varphi_i^-(x_i)u(x_{i-1})+\varphi_i^+(x_i)u(x_{i+1}) \qquad (4.2)$$

donde $\varphi_i^-(x)$ y $\varphi_i^+(x)$ son soluciones de dos 'problemas de condiciones de frontera locales'. Con mayor precisión, dichas soluciones satisfacen la ecuación diferencial de la Ec. (4.1), sujeta a las condiciones de frontera

$$\varphi_i^-(x_{i-1})=\varphi_i^+(x_{i+1})=1 \quad \text{y} \quad \varphi_i^-(x_{i+1})=\varphi_i^+(x_{i-1})=0 \qquad (4.3)$$

Cuando $i=1,\ldots,E-1$, la Ec. (4.2) constituye un sistema de ecuaciones tridiagonal del cual se obtienen los valores $u(x_i)$, $i=1,\ldots,E-1$ de la solución en los nodos interiores. Una ligera modificación de este procedimiento permite el tratamiento de la ecuación inhomogénea y de cualquier clase de condiciones de frontera, así como del problema con saltos prescritos en las fronteras interiores, como se ha hecho en[3]. La extensión de estas ideas a varias dimensiones permiten incluir a métodos tales como el método de Schwarz (véase [3]).

El sistema de ecuaciones (4.2) es exacto, pero para aplicarse se requiere el conocimiento de los coeficientes $\varphi_i^-(x_i)$ y $\varphi_i^+(x_i)$, los cuales se obtienen resolviendo, en el intervalo (x_{i-1}, x_{i+1}), el problema de condiciones de contorno definido arriba. En general, salvo para ecuaciones diferenciales muy sencillas, la obtención de dicha solución requiere de la aplicación de métodos numéricos aproximados. Cuando el procedimiento explicado en está Sección se utiliza como un método de discretización, los procedimientos numéricos para la solución de los problemas locales son muy sencillos, pues el intervalo de definición de dichos problemas son pequeños y generalmente es suficiente utilizar pocos grados de libertad. En particular, un método conveniente es el de colocación y de esta manera una versión no convencional del método de colocación se derivó en un artículo anterior[3]. Desde luego, el método numérico que se utilice para resolver los problemas locales puede ser cualquiera; el método del elemento finito entre otros.

5. TREFFTZ-HERRERA METHODS

Cuando el problema BVPJ está definido por las ecuaciones (2.1) a (2.3), la fórmula de Green es

$$\begin{aligned} &\int_\Omega wLu\,dx - \int_{\partial\Omega} \mathsf{B}(u,w)dx - \int_\Sigma \mathsf{J}(u,w)dx = \\ &= \int_\Omega uL^*w\,dx - \int_{\partial\Omega} \mathsf{C}^*(u,w)dx - \int_\Sigma \mathsf{K}^*(u,w)dx \end{aligned} \qquad (5.1)$$

La diferencia de esta fórmula con respecto a las fórmulas de Green clásicas [22] son los términos de las integrales sobre la frontera interior. Aquí

$$\underline{\mathsf{D}}(u,w)\cdot\underline{n} = \mathsf{B}(u,w) - \mathsf{C}(w,u); \quad \text{on } \partial\Omega \qquad (5.2)$$

y

$$-[\underline{\mathsf{D}}(u,w)]\cdot\underline{n} = \mathsf{J}(u,w) - \mathsf{K}(w,u); \quad \text{on } \Sigma \qquad (5.3)$$

donde $\underline{\mathsf{D}}(u,w)$, es una función bilineal, cuyos valores son vectores y que satisface la identidad

$$w\mathsf{L}u - u\mathsf{L}^*w \equiv \nabla\cdot\underline{\mathsf{D}}(u,w); \qquad (5.4)$$

La función $\mathsf{B}(u,w)$ puede elegirse de varias maneras y su elección depende del tipo de condiciones de frontera que correspondan al BVPJ (ver[22]). Por lo que respecta a $\mathsf{J}(u,w)$ y $\mathsf{K}(w,u)$, las siguientes expresiones explícitas

$$J(u,w) \equiv -\underline{D}\left([u],\bar{w}\right)\bullet\underline{n} \ \text{ y } \ K(w,u) \equiv \underline{D}\left(\bar{u},[w]\right)\bullet\underline{n} \qquad (5.5)$$

se pueden aplicar cuando los coeficientes del operador diferencial son continuos. En la notación el paréntesis rectangular se utiliza para el salto a través de Σ, de la función contenida en su interior, y el punto para su promedio. Fórmulas similares a las de la Ec.(6.5) se pueden dar para el caso de coeficientes discontinuos.

La formulación variacional del BVPJ, "en términos de los datos", es

$$\begin{aligned}&\int_\Omega wLu\,dx-\int_{\partial\Omega}\mathrm{B}(u,w)dx-\int_\Sigma \mathrm{J}(u,w)dx=\\&\int_\Omega wLu_\Omega dx-\int_{\partial\Omega}\mathrm{B}(u_\partial,w)dx-\int_\Sigma \mathrm{J}(u_\Sigma,w)dx,\ \forall w\in\hat{D}_2(\Omega)\end{aligned}, \qquad (5.6)$$

la cual, en vista de la Ec. (6.1), es equivalente a la siguiente formulación variacional "en términos de la información complementaria":

$$\begin{aligned}&\int_\Omega uL^*w\,dx-\int_{\partial\Omega}\mathrm{C}^*(u,w)dx-\int_\Sigma \mathrm{K}^*(u,w)dx=\\&\int_\Omega wLu_\Omega dx-\int_{\partial\Omega}\mathrm{B}(u_\partial,w)dx-\int_\Sigma \mathrm{J}(u_\Sigma,w)dx\quad \forall w\in\hat{D}_2(\Omega)\end{aligned} \qquad (5.7)$$

En la teoría desarrollada por Herrera, se utilizan las siguientes funcionales bilineales definidas, para cada $\mathrm{v}\in\hat{D}_1$ y cada $w\in\hat{D}_2$, por

$$\langle P\mathrm{v},w\rangle\equiv\int_\Omega wL\mathrm{v}\,dx,\quad \langle Qw,\mathrm{v}\rangle\equiv\int_\Omega \mathrm{v}L^*w\,dx \quad (5.8)$$

$$\langle B\mathrm{v},w\rangle\equiv\int_{\partial\Omega}\mathrm{B}(\mathrm{v},w)dx,\quad \langle Cw,\mathrm{v}\rangle\equiv\int_{\partial\Omega}\mathrm{C}^*(\mathrm{v},w)dx \quad (5.9)$$

$$\langle J\mathrm{v},w\rangle\equiv\int_\Sigma \mathrm{J}(\mathrm{v},w)dx,\quad \langle Kw,\mathrm{v}\rangle\equiv\int_\Sigma \mathrm{K}^*(\mathrm{v},w)dx \quad (5.10)$$

La información complementaria en la frontera interior Σ, está contenida en la función $-\mathrm{K}^*(u,\bullet)$ y, como ya se dijo, alguna de esa información es innecesaria. Así, generalmente es conveniente definir a alguna información más restringida como objetivo de la búsqueda de información en Σ. Esto se logra introduciendo una funcion bilineal $\mathrm{S}(w,u)$, tal que $\mathrm{S}^*(u,\bullet)$ es "la información buscada". "La información residual" es, $\mathrm{R}^*(u,\bullet)$, donde

$$\mathrm{R}^*(u,w)=-\mathrm{K}^*(u,w)-\mathrm{S}^*(u,w) \quad (5.11)$$

Las funciones de peso que tienen la propiedad de proporcionar la información buscada exclusivamente satisfacen:

$$\mathrm{L}^*w=0,\ \Omega_i,\ \forall i=1,\dots,E \quad (5.12)$$

$$\mathrm{C}(w,\bullet)=0,\ \text{en } \partial\Omega \quad (5.13)$$

$$\mathrm{R}(w,\bullet)=0,\ \text{en } \Sigma \quad (5.14)$$

La formulación indirecta de los métodos de descomposición de dominio se deriva de la Ec.(6.7). Así, observe cuando ella se aplica a funciones $w\in\hat{D}_2(\Omega)$ que satisfacen las Ecs.(6.9) a (6.11), se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{S}^*(u,w)dx=\int_\Omega wLu_\Omega dx-\int_{\partial\Omega}\mathrm{B}(u_\partial,w)dx-\int_\Sigma \mathrm{J}(u_\Sigma,w)dx\\ \forall w\in N_Q\cap N_C\cap N_R \quad (5.15)\end{aligned}$$

Aquí

$$N_Q \equiv \left\{ \dot{v} \in \hat{D}(\Omega) \mid L^{\bullet}v = 0, \ in \ \Omega_i \right\} \quad (5.16)$$

$$N_C \equiv \left\{ v \in \hat{D}(\Omega) \mid C(v, \bullet) = 0, \ en \ \partial\Omega \right\} \quad (5.17)$$

$$N_R \equiv \left\{ v \in \hat{D}(\Omega) \mid R(v, \bullet) = 0, \ en \ \Sigma \right\} \quad (5.18)$$

En la teoría se define la siguiente funcional bilineal

$$\left\langle S^* v, w \right\rangle \equiv \int_{\Sigma} S^*(v, w)dx, \quad \forall v \in \hat{D}_1(\Omega) \ \& \ w \in \hat{D}_2(\Omega) \quad (5.19)$$

y se introduce la siguiente definición, sumamente útil para la formulación de los métodos indirectos.

Definición 6.1.- *Un subconjunto* $\mathrm{E} \subset \tilde{N} \equiv N_Q \cap N_C \cap N_R$, *se dice que es TH completo para* S^* *cuando, para cualquier* $\hat{u} \in \hat{D}_1$, se tiene

$$\left\langle S^* \hat{u}, w \right\rangle = 0, \quad \forall w \in \mathrm{E} \Rightarrow S^* \hat{u} = 0; \quad (5.20)$$

El Teorema siguiente constituye una formulación muy general de los métodos indirectos de descomposición de dominio.

Teorem 6.1.- *Sea* $\mathrm{E} \subset \tilde{N}$ *un sistema de funciones de peso, TH completo para* S^*, *y sean* $u \in \hat{D}_1$ *y* $\hat{u} \in \hat{D}_1$ *la solución del problema BVPJ y una función de base cualquiera. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que* $\hat{u} \in \hat{D}_1$ *contenga la información buscada es que*

$$-\left\langle S^* \hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - g - j, w \right\rangle; \quad \forall w \in \mathrm{E} \quad (5.21)$$

Aquí,

$$\left\langle f, w \right\rangle \equiv \int_{\Omega} wLu_{\Omega}dx, \quad \left\langle g, w \right\rangle \equiv \int_{\partial\Omega} \mathrm{B}(u_{\partial}, w)dx,$$

$$\left\langle j, w \right\rangle \equiv \int_{\partial\Omega} \mathrm{J}(u_{\Sigma}, w)dx$$

$$\forall w \in \hat{D}_2(\Omega) \quad (5.22)$$

En las aplicaciones es generalmente fácil construir una función $u_P \in \hat{D}_1$ que satisfaga $Pu_P = f$ y $Bu_P = g$, por lo que el siguiente resultado es útil

Corolario 6.1.- Sea $u_P \in \hat{D}_1$ tal que $Pu_P = f$ y $Bu_P = g$. Entonces, en el Teorema 6.1 la Ec.(6.22) puede reemplazarse por

$$-\left\langle S^*\left(\hat{u} - u_P\right), w \right\rangle = \left\langle J\left(u_P - u_{\Sigma}\right), w \right\rangle; \quad \forall w \in \mathrm{E} \quad (5.23)$$

El caso en que S es simétrico y positivo definido tiene especial interés, pues entonces el método del gradiente conjugado es aplicable directamente y se presenta en el tratamiento de muchas ecuaciones elípticas[18]. También, corresponde al caso en que ocurren los operadores de Steklov-Poincarè.

6.- ALCANCES

Como se ha mencionado, la teoría que se presenta en este artículo se refiere al problema de condiciones de contorno, y con saltos prescritos en sus fronteras interiores, para cualquier ecuación diferencial o sistema de tales ecuaciones, cuyos coeficientes pueden presentar discontinuidades en las fronteras interiores de la partición. Para ilustrar su aplicabilidad se incluyen los ejemplos que se dan a continuación. En la forma en que se presentan aquí, las fórmulas son aplicables aunque los coeficientes de los operadores diferenciales sean discontinuos. Mayores detalles se dan en[2].

6.1. Ecuaciones elípticas de segundo orden

$$\mathsf{L}u \equiv -\nabla \bullet (\underline{\underline{a}} \bullet \nabla u) + \nabla \bullet (\underline{b} u) + cu\,,$$

$$\mathsf{L}^{*} w \equiv -\nabla \bullet (\underline{\underline{a}} \bullet \nabla w) - \underline{b} \bullet \nabla w + cw. \text{ y}$$

$$\underline{D}(u,w) \equiv \underline{\underline{a}} \bullet (u \nabla w - w \nabla u) + \underline{b} uw$$

$$\mathsf{J}(u,w) \equiv \dot{w}[\underline{a}_n \bullet \nabla u] - [u]\overline{(\dot{\underline{a}_n \bullet \nabla w + b_n w})}, \text{ y}$$

$$\mathsf{K}(w,u) \equiv \dot{u}[\underline{a}_n \bullet \nabla w + b_n w] - [w]\overline{(\underline{a}_n \dot{\bullet} \nabla u)},$$

Datos en la frontera exterior $u = u_\partial$ (Para problema de Dirichlet)

Datos en la frontera interior $[u] = [u_\Sigma]$ and $[\underline{a}_n \bullet \nabla u] = [\underline{a}_n \bullet \nabla u_\Sigma]$

Información complementaria en la frontera exterior: $\underline{a}_n \bullet \nabla u$

Información complementaria en la frontera interior: $\dot{u}$ and $\overline{(\underline{a}_n \dot{\bullet} \nabla u)}$,

6.2 Ecuación biarmónica

$$\mathsf{L}u \equiv \Delta^2 u \text{ y } \mathsf{L}^{*} w \equiv \Delta^2 w$$

$$\underline{D}(u,w) \equiv w \nabla \Delta u - u \nabla \Delta w + \Delta w \nabla u - \Delta u \nabla w$$

$$\mathsf{J}(u,w) \equiv [u]\overline{\frac{\partial \dot{\Delta} w}{\partial n}} - \dot{w}\left[\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right] + [\Delta u]\overline{\frac{\partial \dot{w}}{\partial n}} - \overline{\dot{\Delta w}}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] \text{ y}$$

$$\mathsf{K}(w,u) \equiv [w]\overline{\frac{\partial \dot{\Delta} u}{\partial n}} - \dot{u}\left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n}\right] + [\Delta w]\overline{\frac{\partial \dot{u}}{\partial n}} - \overline{\dot{\Delta u}}\left[\frac{\partial w}{\partial n}\right],$$

Datos en la frontera exterior: $u, \partial u / \partial n$ u

Datos en la frontera interior: $[u],[\partial u/\partial n],[\Delta u]$ *and* $[\partial\Delta u/\partial n]$
Información complementaria en la frontera exterior: Δu *and* $\partial\Delta u/\partial n$
Información complementaria en frontera interior:

$\dot{\overline{u}},\dot{\overline{\partial u/\partial n}},\dot{\overline{\Delta u}}$ *and* $\dot{\overline{\partial\Delta u/\partial n}}$

6.3. El problema de Stokes

El sistema de acuaciones es

$$-\Delta\underline{u}+\nabla p=0;\quad \nabla\bullet\underline{u}=0$$

Sea $D_1(\Omega)\equiv D_2(\Omega)\equiv D(\Omega)\equiv H^2(\Omega)\oplus H^1(\Omega)$, y adopte la notación $\tilde{u}\equiv(\underline{u},p)$ para cada $\tilde{u}\in D(\Omega)$.

Defina al operador diferencial $\underline{\mathsf{L}}$ por $\underline{\mathsf{L}}\bullet\tilde{u}\equiv(-\Delta\underline{u}+\nabla p,-\nabla\bullet\underline{u})$

Entonces $\underline{\mathsf{L}}$ es auto-adjunto y, escribiendo $\tilde{w}\equiv(\underline{w},q)$, se tiene

$$\tilde{w}\bullet\underline{\mathsf{L}}\bullet\tilde{u}-\tilde{u}\bullet\underline{\mathsf{L}}\bullet\tilde{w}\equiv\nabla\bullet(\underline{u}\bullet\nabla\underline{w}-\underline{w}\bullet\nabla\underline{u}+p\underline{w}-q\underline{u})$$

Así: $\underline{\mathsf{D}}(\tilde{u},\tilde{w})\equiv\underline{u}\bullet(\nabla\underline{w}-q\underline{I})-\underline{w}\bullet(\nabla\underline{u}-p\underline{I})$

$$\mathsf{B}(\tilde{u},\tilde{w})\equiv\underline{u}\bullet\left(\frac{\partial\underline{w}}{\partial n}-q\underline{n}\right)\text{ y }\mathsf{C}(\tilde{w},\tilde{u})\equiv\underline{w}\bullet\left(\frac{\partial\underline{u}}{\partial n}-p\underline{n}\right)$$

$$\mathsf{J}(\tilde{u},\tilde{w})\equiv\underline{w}\bullet\left[\frac{\partial\underline{u}}{\partial n}-p\underline{n}\right]-[\underline{u}]\bullet\dot{\overline{\frac{\partial\underline{w}}{\partial n}-q\underline{n}}}\text{ y}$$

$$\mathsf{K}(\tilde{w},\tilde{u})\equiv\dot{\underline{u}}\bullet\left[\frac{\partial\underline{w}}{\partial n}-q\underline{n}\right]-[\underline{w}]\bullet\left(\dot{\overline{\frac{\partial\underline{u}}{\partial n}-p\underline{n}}}\right)$$

Datos en la frontera exterior: $\underline{u}$

Datos en la frontera interior:: $[\underline{u}]$ and $\left[\dfrac{\partial\underline{u}}{\partial n}-p\underline{n}\right]$

Información complementaria en la frontera exterior: $\dfrac{\partial\underline{u}}{\partial n}-p\underline{n}$

Información complementaria en la frontera interior: $\dot{\underline{u}}$ and $\dot{\overline{\dfrac{\partial\underline{u}}{\partial n}-p\underline{n}}}$

6.4. Ecuaciones de la elasticidad

Sea $D_1(\Omega) \equiv D_2(\Omega) \equiv D(\Omega) \equiv H^2(\Omega) \oplus H^2(\Omega) \oplus H^2(\Omega)$, y defina para cada $\underline{u} \equiv (u_1, u_2, u_3) \in D(\Omega)$: $t_{ij}(\underline{u}) \equiv C_{ijpq} \dfrac{\partial u_p}{\partial x_q}$, donde como es habitual se supone que el tensor elástico tiene las siguientes simetrías: $C_{ijpq} = C_{jipq} = C_{ijqp}$.

Defina el operador diferencial - cuyos valores son vectores- $\underline{\mathsf{L}}$ por $\underline{\mathsf{L}} \bullet \underline{u} \equiv -\nabla \bullet \underline{t}(\underline{u})$, cuyo adjunto es si mismo: $\underline{\mathsf{L}}^* \bullet \underline{w} \equiv -\nabla \bullet \underline{t}(\underline{w})$

$\underline{\mathsf{D}}(\underline{u}, \underline{w}) \equiv \underline{u} \bullet \underline{t}(\underline{w}) - \underline{w} \bullet \underline{t}(\underline{u})$

$\mathsf{B}(\underline{u}, \underline{w}) \equiv \underline{u} \bullet \underline{t}(\underline{w}) \bullet \underline{n}$ y $\mathsf{C}(\underline{u}, \underline{w}) \equiv \underline{w} \bullet \underline{t}(\underline{u}) \bullet \underline{n}$

$\mathsf{J}(\underline{u}, \underline{w}) \equiv \dot{\underline{w}} \bullet [\underline{t}(\underline{u})] \bullet \underline{n} - [\underline{u}] \bullet \dot{\overline{\underline{t}(\underline{w})}} \bullet \underline{n}$ y

$\mathsf{K}(\underline{w}, \underline{u}) \equiv \dot{\underline{u}} \bullet [\underline{t}(\underline{w})] \bullet \underline{n} - [\underline{w}] \bullet \dot{\overline{\underline{t}(\underline{u})}} \bullet \underline{n}$

Datos en la frontera exterior: $\underline{u}$

Datos en la frontera interior: $[\underline{u}]$ *and* $[\underline{t}(\underline{u})] \bullet \underline{n}$

Información complementaria en la frontera exterior: $\underline{t}(\underline{u}) \bullet \underline{n}$

Información complementaria en la frontera interior: $\dot{\underline{u}}$ and $\dot{\overline{\underline{t}(\underline{u})}} \bullet \underline{n}$

7. REFERENCIAS

[1] M. Dryja and O. B. Widlund. "Towards a unified theory of doamin decomposition algorithms for elliptic problems,. Domain Decomposition Methods for PDE (DD3, 1989), SIAM, pp. 3-21.

[2] Herrera, I. "Trefftz Method: A General Theory". Numerical Methods for Partial Differential Equations, **16** (6) pp. 561-580, 2000.

[3] Herrera, I., Yates R. "General Theory of Domain Decomposition: Beyond Schwarz Methods". Numerical Methods for Partial Diffential Equations, **17**(5) pp. 495-517, 2001.

[4] Herrera, I. "A General Theory of Domain Decomposition and Trefftz Methods". 2nd. European Conference on Computational Mechanics. Cracovia, Polonia. 2001 (Publicado en CD-ROM).

[5] Herrera, I., Yates. R. and Díaz M. "General Theory of Domain Decomposition: Indirect Methods". Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2002. (In press)

[6] Herrera, I. "Unified Approach to Numerical Methods. Part 1. Green's Formulas for Operators in Discontinuous Fields". Journal of Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1(1), pp. 12-37, 1985.

[7] Herrera, I., Chargoy, L. y Alduncin, G. "Unified Approach to Numerical Methods. Part 3. Finite Differences and Ordinary Differential Equations". Journal of Numerical Methods for Partial Differrential Equations, 1, 241-258, 1985.

[8] Herrera, I. "Some Unifying Concepts in Applied Mathematics". The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied, and Computational Mathematics. Edited by R.E. Ewing, K.I. Gross and C.F. Martin. Springer Verlag, New York, pp. 79-88, 1986. (Ponencia invitada).

[9] Celia, M. y Herrera, I. "Solution of General Differential Equations Using the Algebraic Theory Approach". Journal of Numerical Methods for Partial Differential Equations, 3(1), pp. 117-129, 1987.

[10] Herrera, I. "The Algebraic Theory Approach for Ordinary Differential Equations: Highly Accurate Finite Differences". Journal of Numerical Methods for Partial Differential Equations, 3(3), pp. 199-218, 1987.

[11] Celia, M.A., Russell, T.F., Herrera, I. y Ewing, R.E. "An Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method for the Advection-Diffusion Equation". Advances in Water Resources, 13(4), pp.187-206, 1990.

[12] Herrera, I., Ewing, R.E., Celia, M.A. y Russell, T. "Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method: The Theoretical Framework". Numerical Methods for Partial Differential Equations 9(4), pp. 431-457, 1993.

[13] Herrera, I. "Localized Adjoint Methods: A New Discretization Methodology", Chapter 6 of the book: "Computational Methods in Geosciences", W.E. Fitzgibbon & M.F. Wheeler Eds., SIAM, pp. 66-77, 1992. (Trabajo invitado).

[14] Herrera, I. "On Operator Extensions: The Algebraic Theory Approach". Advances in Optimization and Numerical Analysis, (Procs. of VI Workshop on Optimization and Numerical Analysis, Oaxaca, Oax.

México, Enero, 1992), Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, pp. 155-163, 1992.

[15] Herrera, I. "Trefftz-Herrera Domain Decomposition", Special Volume on Trefftz Method: 70 Years Anniversary; Advances in Engineering Software, 24, pp. 43-56, 1995. (Trabajo invitado).

[16] Herrera, I. "Trefftz-Herrera Method". Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, Polish Academy of Sciences, 4 (3/4) pp. 369-382, 1997.

[17] A. Wróblewski, P. Zielinski, and J. Jirousek, Hybrid-Trefftz p -element for 3-D axisymmetric problems of elasticity, Numer Methods Eng '92, Proc First Euro Conf Numer Meth Eng, C. Hirsch, O. C. Zienkiewicz, and E. Oñate (editors), Brussels, Elsevier, 1992, pp. 803-810.

[18] Quarteroni, a. and A. Valli (1999), "Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", Numerical Mathematics and Scientific Computation, Clarendon Press-Oxford.

[19] Dryja M. and Widlund O. B. (1992), "Additive Schwarz methods for elliptic finiteelement problems in three dimensions", Domain Decomposition Methods for PDE (DD5, 1991), SIAM, pp. 3-18.

[20] Bialecki, B. and Dryja M. (1997), "Multilevel additive and multiplicative methods for orthogonal spline collocation problems", Numer. Math 77, pp. 35-58.

[21] Herrera, I.; Díaz, M. "Indirect Methods of Collocation: Trefftz-Herrera Collocation". Numerical Methods for Partial Differential Equations. 15(6): 709-738, 1999.

[22] Lions, J. L. and Magenes, E. (1972) "Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications" vol. 1. Springer-Verlag, New York-Heidel-berg-Berlin.