

APLICACIÓN DEL MÉTODO INDIRECTO DE COLOCACIÓN TREFFTZ-HERRERA A PROBLEMAS ELÍPTICOS EN 2D

Martín Díaz Viera, Ismael Herrera Revilla y Robert Yates

*Instituto de Geofísica
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM),
Apartado Postal 22-582, 14000, México, D.F.
e-mail: mdiaz@tonatiuh.igeofcu.unam.mx,
e-mail: iherrera@servidor.unam.mx*

Resumen. El método de colocación convencional, que se basa en el uso de polinomios cúbicos de Hermite¹, posee un gran atractivo por su elevada exactitud y la simplicidad de su formulación. Sin embargo tiene algunas desventajas computacionales debido al gran número de grados de libertad asociados con cada nodo de la malla de la partición del dominio. Además, la matriz del sistema de ecuaciones algebraicas resultante no es positivo definida incluso cuando el operador diferencial posee dicha propiedad. En el presente trabajo se aplica la teoría unificada debido a Herrera^{2,3} para descomposición de dominio^{4,5} en combinación con colocación ortogonal, lo que produce una familia de “métodos indirectos de colocación^{6,7} (colocación Trefftz-Herrera)”. Los métodos de Trefftz-Herrera están basados en un tipo especial de fórmula de Green definida en campos discontinuos⁸. Una característica esencial de estos métodos es el uso de funciones de peso que suministran información acerca de la solución buscada en las fronteras interiores (Σ) de la partición exclusivamente.

En particular, cuando la ecuación diferencial (o el sistema de ecuaciones) es positivo definido la matriz global es también positivo definida. Al aplicar colocación en la construcción de las funciones de peso se obtiene una reducción dramática del número de grados de libertad asociados con cada nodo. En efecto, mientras en colocación convencional el número de grados de libertad es dos en una dimensión, cuatro en dos dimensiones y ocho en tres dimensiones, en colocación TH se pueden obtener algoritmos con un solo grado de libertad para cualquier dimensión. Resulta interesante destacar que el tratamiento de problemas con saltos prescritos en las fronteras interiores posee el mismo grado de complejidad que los problemas sin saltos, ya que la matriz global es exactamente la misma para ambos casos. A manera de ilustración, el método es aplicado a problemas elípticos de segundo y cuarto orden (ecuación biarmónica) para diferentes ejemplos numéricos en dos dimensiones.

Palabras claves: Domain Decomposition, Collocation, Trefftz-Herrera Method, Localized Adjoint Method (LAM), Eulerian Lagrangian LAM (ELLAM).

1 INTRODUCCIÓN

En el presente artículo se mostrará la aplicación de la teoría unificada de Herrera para descomposición de dominio, también conocida como método de Trefftz-Herrera, a problemas elípticos en dos dimensiones. El método de Trefftz-Herrera posee una gran generalidad ya que es aplicable a *Problemas de Valores de Frontera y Saltos Prescritos* (PVFSP) de ecuaciones diferenciales lineales o sistemas de éstas de cualquier tipo (elípticas, parabólicas o hiperbólicas) y cuyos coeficientes pueden ser en general discontinuos. Es muy flexible ya que permite incorporar de manera natural las diferentes variantes de condiciones de frontera y de salto del problema. Además, es sistemático, debido a que bajo su marco teórico permite desarrollar toda una gran variedad de procedimientos según sea la información buscada acerca de la solución en las fronteras interiores (Σ) de la partición del dominio.

Las ideas básicas del método indirecto de Trefftz-Herrera, también conocido en otro contexto como método del Adjunto Localizado (LAM), han sido aplicadas para desarrollar diversos procedimientos numéricos, como son los métodos Euleriano-Lagrangianos del Adjunto Localizado (ELLAM)⁹⁻¹¹, empleados con éxito en la solución numérica de problemas de transporte dominados por el término de primer orden o de advección.

El hecho de que las funciones de peso especializadas se construyan haciendo uso del método de colocación ortogonal nos conduce a un nuevo tipo de método “no estándar” de colocación: el método de colocación indirecto o de Trefftz-Herrera.

2 PROBLEMA MODELO: ECUACIÓN ELÍPTICA GENERAL DE SEGUNDO ORDEN

A continuación definiremos el *Problemas de Valores de Frontera y Saltos Prescritos* (PVFSP) para la ecuación elíptica general de segundo orden, el cuál nos servirá de *modelo* para ilustrar el método de colocación de Trefftz-Herrera.

Dada la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}u = f_{\Omega}; \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

donde $\mathcal{L}u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu$, es el operador elíptico general de segundo orden y $\underline{a}$, $\underline{b}$, c son una matriz, un vector y un escalar de coeficientes respectivamente, que en general son funciones definidas en Ω , con condiciones de frontera de tipo Dirichlet

$$u = u_\delta; \text{ en } \partial\Omega \quad (2)$$

y saltos prescritos

$$[u] = [u_\Sigma] = j_\Sigma^0; \text{ y } [\underline{a} \cdot \nabla u] \cdot \underline{n} = [\underline{a} \cdot \nabla u_\Sigma] \cdot \underline{n} = j_\Sigma^1; \text{ en } \Sigma, \quad (3)$$

Hallar la solución u en Ω tal que satisfaga (1), (2) y (3). Se supone que la solución existe y es única.

3 PROCEDIMIENTOS DE TREFFTZ-HERRERA

Para la derivación de un procedimiento Trefftz-Herrera partiremos de la Ec. (5.21) dada en Herrera³ que es la formulación variacional en términos de la información buscada y la aplicaremos al PVFSP definido por las Ecs. (1), (2) y (3) en la sección anterior.

En este caso conocemos que el adjunto formal del operador elíptico de segundo orden $\mathcal{L}$ dado en (1) es

$$\mathcal{L}^* w \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) - \underline{b} \cdot \nabla w + cw \quad (4)$$

Entonces, la función bilineal vectorial $\mathcal{D}(u, w)$ introducida en la Ec. (5.4) de Herrera³ se expresa como:

$$\mathcal{D}(u, w) = \underline{a} \cdot (u \nabla w - w \nabla u) + \underline{b}uw; \quad (5)$$

Una manera sistemática de obtener tanto el adjunto formal $\mathcal{L}^*$ como la función vectorial bilineal $\mathcal{D}(u, w)$ se expone en Berlanga y Herrera¹².

Si definimos $\mathcal{B}(u, w)$ y $\mathcal{C}^*(u, w)$, cuando las condiciones de frontera son del tipo Dirichlet Ec.(2), se obtiene:

$$\mathcal{B}(u, w) = (\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + \underline{b}_n w) u_\delta; \quad \mathcal{C}^*(u, w) = w (\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla u_\delta); \quad (6)$$

donde $\mathcal{B}(u, w)$ involucra los valores prescritos de frontera, que en este caso son de tipo Dirichlet u_δ y $\mathcal{C}^*(u, w)$ los valores no prescritos o complementarios de frontera que son de tipo Neumann $\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla u_\delta$.

Y correspondientemente, para las condiciones de salto prescritas en las Ecs. (3)

obtenemos que :

$$\mathcal{J}(u, w) \equiv -\mathcal{D}([u], \dot{w}) \cdot \underline{n} = -[u] \overline{(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + b_n w)} + \dot{w} [\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla u]; \quad (7)$$

$$\mathcal{K}^*(u, w) \equiv \mathcal{D}(\dot{u}, [w]) \cdot \underline{n} = \dot{u} [\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + b_n w] - [w] \overline{(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla u)}; \quad (8)$$

donde $b_n = \underline{b} \cdot \underline{n}$; $[u] = u_+ - u_-$ y $\dot{u} = (u_+ + u_-)/2$.

A $\mathcal{K}^*(u, w)$ la podemos descomponer en:

$$\mathcal{K}^*(u, w) = \mathcal{K}^0(u, w) + \mathcal{K}^1(u, w); \quad (9)$$

donde $\mathcal{K}^0(u, w) = \dot{u} [\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + b_n w]$ involucra el promedio de la solución $\dot{u}$

y $\mathcal{K}^1(u, w) = -[w] \overline{(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla u)}$ el promedio del flujo $\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla u$ respectivamente.

En Herrera³ se dieron los fundamentos teóricos de los procedimientos Trefftz-Herrera que nos permiten manejar de manera sistemática y con flexibilidad la información del problema de valores de frontera con saltos prescritos. En particular se anticiparon algunas variantes de cómo proceder en el caso de un problema elíptico donde la información buscada se puede concentrar en las fronteras interiores Σ si se eligen funciones de peso apropiadas que suministren información exclusivamente en Σ de manera que S contiene la información buscada y R es la información restante que debemos eliminar. Es muy importante destacar que en dependencia de la forma en que se elija la descomposición $K \equiv S + R$ se dará lugar a diferentes procedimientos de Trefftz-Herrera, lo cual es uno de los aspectos más valiosos de este enfoque y abre un mundo de posibilidades a la hora de desarrollar tanto un procedimiento numérico de discretización como de descomposición de dominio.

A continuación veremos en términos generales dos ejemplos de procedimientos de Trefftz-Herrera partiendo de la descomposición de K .

Procedimiento TH-1: Si

$$S^* \equiv K^* \text{ y } R^* \equiv 0; \quad (10)$$

entonces resulta un procedimiento con subdominios ajenos:

$$- \langle K^* u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle; \quad \forall w \in \mathcal{E} \quad (11)$$

donde $\mathcal{E} \subset N_\Omega \cap N_\Gamma$ es un sistema de funciones TH-completo^{2,7,13} y

$$\begin{aligned} N_\Omega &= \{w \in \hat{H}^2(\Omega) : \mathcal{L}^* w = 0, \text{ en } \Omega\}; \\ N_\Gamma &= \{w \in \hat{H}^2(\Omega) : w = 0, \text{ en } \partial\Omega\}; \end{aligned} \quad (12)$$

Procedimiento TH-2: Si

$$S^* \equiv K^0 * \quad \text{y} \quad R^* \equiv K^1 *; \quad (13)$$

entonces resulta un procedimiento con subdominios yuxtapuestos:

$$- \langle K^0 * u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle; \quad \forall w \in \mathcal{E} \quad (14)$$

donde $\mathcal{E} \subset N_Q \cap N_C \cap N_{K^1}$; y N_Q y N_C , están definidos como en TH-1 y

$$N_{K^1} = \{w \in \hat{\mathbf{H}}^2(\Omega) : [w] = 0, \text{ en } \Sigma\}; \quad (15)$$

Aquí $\hat{\mathbf{H}}^2(\Omega) \equiv \mathbf{H}^2(\Omega_1) \oplus \mathbf{H}^2(\Omega_2) \oplus \dots \oplus \mathbf{H}^2(\Omega_E)$ y $\mathbf{H}^2(\Omega_i), i = 1, \dots, E$, es el espacio de Sobolev correspondiente.

Una simple inspección de los procedimientos arriba enunciados nos permite ver que en el primero, TH-1 se obtendrá información que involucra tanto al promedio de la solución $\bar{u}$ como al de su derivada en las fronteras interiores Σ , mientras que en el segundo TH-2 se obtiene información exclusivamente sobre $\bar{u}$ en Σ . Esto nos lleva a dos conclusiones:

- i.) que el segundo procedimiento resulta computacionalmente más eficiente puesto que involucra menos información y por consiguiente las matrices del sistema son más pequeñas.
- ii.) que en el primero obtenemos información redundante ya que resulta suficiente con obtener el promedio de $\bar{u}$ en Σ , para obtener problemas bien planteados en cada una de las subregiones de la partición $\Omega_i, i = 1, \dots, E$.
Nótese que si conocemos el promedio de $\bar{u}$ y el salto $[u]$, entonces podemos conocer los valores de la solución a cada lado de Σ , es decir: $u_+ = \bar{u} + \frac{1}{2}[u]$ y $u_- = \bar{u} - \frac{1}{2}[u]$.

Por las ventajas que ofrece, en lo sucesivo nos concentraremos en el desarrollo del segundo procedimiento TH-2, al cual nombraremos simplemente TH.

Sustituyendo los funcionales f, g y j , en la Ec. (14) que de acuerdo al problema toman la forma siguiente

$$\langle f, w \rangle = \int_{\Omega} w f_{\Omega} d\mathbf{x}; \quad \langle g, w \rangle = \int_{\Omega} \underline{u}_{\varepsilon} (\underline{a} \cdot \nabla w + \underline{b} w) \cdot \underline{n} d\mathbf{x}; \quad (16)$$

$$\langle j, w \rangle = - \int_{\Sigma} [\underline{u}_{\varepsilon}] \overline{(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + \underline{b}_n w)} d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} \dot{w} [\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla \underline{u}_{\varepsilon}] d\mathbf{x}; \quad (17)$$

Resulta que

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Sigma} \dot{u} \left[\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + b_n w \right] d\underline{x} = \int_{\Omega} w f_{\Omega} d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} u_{\partial} \left(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + b_n w \right) d\underline{x} + \\
& + \int_{\Sigma} \left[u_{\Sigma} \right] \overline{\left(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + b_n w \right)} d\underline{x} - \int_{\Sigma} \dot{w} \left[\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla u_{\Sigma} \right] d\underline{x}; \quad \forall w \in \mathcal{E}
\end{aligned} \tag{18}$$

En particular, cuando los coeficientes son funciones continuas, el operador $\mathcal{K}^0 * (u, w)$ toma la forma $\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot [\nabla w] \dot{u}$ ya que $[w] = 0$, es decir es continua en Σ por pertenecer a N_{κ^1} , mientras que el operador de frontera $\mathcal{B}(u, w)$ se transforma en $(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w) u_{\partial}$ ya que w se anula en la frontera exterior $\partial\Omega$ por pertenecer a N_{κ^2} . Entonces, la Ec.(18) toma la forma:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Sigma} \underline{n} \cdot \underline{a} \cdot [\nabla w] \dot{u} d\underline{x} = \int_{\Omega} w f_{\Omega} d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} u_{\partial} \underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w d\underline{x} + \\
& + \int_{\Sigma} \overline{\left(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + b_n w \right)} d\underline{x} - \int_{\Sigma} w j_{\Sigma}^i d\underline{x}; \quad \forall w \in \mathcal{E}
\end{aligned} \tag{19}$$

que es la expresión particular del procedimiento *TH* cuando los coeficientes son continuos.

Hasta aquí hemos ofrecido los detalles generales que caracterizan al procedimiento de colocación Trefftz-Herrera en n dimensiones. Aún nos restaría por desarrollar la construcción de sistemas de funciones de peso que sean TH-completos¹³, para lo cual, en la presente artículo, se usaran polinomios hasta cierto grado G y mostraremos su implementación en particular para los casos lineal y cúbico.

4 ESTRATEGIA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUNCIONES DE PESO TH-COMPLETO USANDO POLINOMIOS

Consideraremos una partición rectangular del dominio y analizaremos el caso con subregiones yuxtapuestas. Para esto asociaremos tomaremos una subregión Ω_{η} formada por cuatro elementos Ω_{η}^{λ} , $\lambda = 1, \dots, 4$, de la descomposición de dominio asociados con su nodo central (x_{η}, y_{η}) como se muestra en la Fig.1. La frontera de la subregión Ω_{η} es $\partial\Omega_{\eta}$, mientras que la parte de la frontera interior Σ que une a los cuatro elementos de Ω_{η} la designaremos por Σ_{η} (Fig.1) y está constituida por cuatro segmentos numerados en forma de cruz. Entonces, en cada subregión Ω_{η} se construye un sistema de funciones que sean continuas, se anulen en $\partial\Omega$ y satisfagan la ecuación adjunta homogénea $\mathcal{L}^* w = 0$, Ecs.(15). De esta manera, usando la numeración arriba introducida

en Σ_{ij} , se pueden construir cinco grupos de funciones de peso asociadas con cada nodo (x_i, y_j) .

Grupo 0.- Este grupo está formado por una sola función la cual es lineal en cada una de las cuatro fronteras interiores de la Fig. 1, y toma el valor $w^0(x_i, y_j) = 1$, en el nodo (x_i, y_j) .

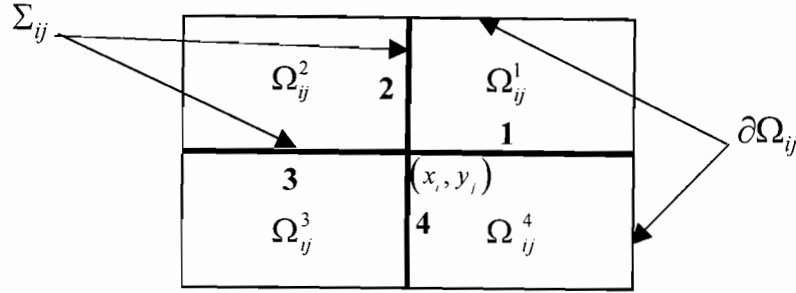


Figura 1 : Subregión Ω_{ij} asociada con el nodo (x_i, y_j) .

Grupo 1.- La restricción al intervalo "1", de la Fig. 1, es, cuanto más, un polinomio de grado "G", el cual se anula en los extremos del intervalo "1".

Grupo 2.- La restricción al intervalo "2", de la Fig. 1, es, cuanto más, un polinomio de grado "G", el cual se anula en los extremos del intervalo "2".

Grupo 3.- La restricción al intervalo "3", de la Fig. 1, es, cuanto más, un polinomio de grado "G", el cual se anula en los extremos del intervalo "3".

Grupo 4.- La restricción al intervalo "4", de la Fig. 1, es, cuanto más, un polinomio de grado "G", el cual se anula en los extremos del intervalo "4".

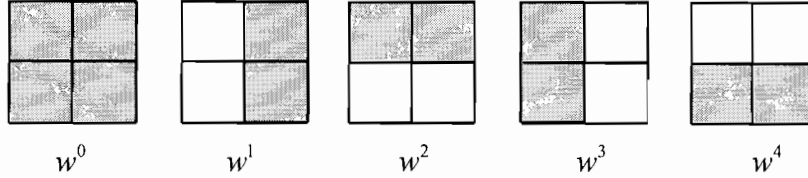


Figura 2 : Soportes de las funciones de peso (sombreados).

Se debe destacar que la construcción de las funciones de peso hecha de la manera expuesta no conduce directamente a un sistema de funciones linealmente independiente. Esto se debe al hecho de que cada par de nodos vecinos comparten un mismo intervalo debido a que nuestra partición del dominio es yuxtapuesta. Por ejemplo el intervalo es considerado "1" por el nodo de la izquierda, mientras que es "3" según el nodo de la derecha y por lo tanto las funciones asociadas con estos intervalos se cuentan doble.

5 CONSTRUCCIÓN DE LAS FUNCIONES DE PESO USANDO COLOCACIÓN

5.1 Funciones de Peso Lineales

Para el caso de funciones de peso lineales en Σ_η tenemos una sola función de peso del grupo 0 definida en la subregión Ω_η asociada a cada nodo interior (x_i, y_j) , para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$, cuya expresión es:

$$w_\eta^0(x, y) = B_\eta^0(x, y) + \sum_{\alpha=1}^4 C_\eta^\alpha N_\eta^\alpha(x, y); (x, y) \in \Omega_\eta^\lambda; \lambda = 1, \dots, 4. \quad (20)$$

donde las funciones $B_\eta^0(x, y)$ son polinomios lineales en las fronteras internas Σ_η , que se destaca con líneas gruesas en la Fig. 1, mientras que las funciones $N_\eta^\alpha(x, y)$; $\alpha = 1, \dots, 4$, se anulan en todo $\Sigma_\eta \cup \partial\Omega_\eta$.

La construcción de las funciones de peso se realiza de manera independiente en cada uno de los cuatro elementos rectangulares $\{\Omega_\eta^1, \Omega_\eta^2, \Omega_\eta^3, \Omega_\eta^4\}$ asociados a cada nodo interior (x_i, y_j) , los cuales constituyen su soporte.

Para $\lambda=1$, en $(x, y) \in \Omega_\eta^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ las funciones $\{B_\eta^0, N_\eta^1, N_\eta^2, N_\eta^3, N_\eta^4\}$ están definidas como:

$$B_\eta^0(x, y) = (1 - (x - x_i)/h_x)(1 - (y - y_j)/h_y); \quad (21)$$

$$N_\eta^1(x, y) = H_i^1(x)H_j^1(y); N_\eta^2(x, y) = H_{i+1}^1(x)H_j^1(y); \quad (22)$$

$$N_\eta^3(x, y) = H_i^1(x)H_{j+1}^1(y); N_\eta^4(x, y) = H_{i+1}^1(x)H_{j+1}^1(y);$$

y de manera análoga se definen en Ω_η^λ para $\lambda = 2, 3$ y 4 .

Aquí $H_i^0(x)$ es el polinomio cúbico de Hermite con soporte en el intervalo (x_{i-1}, x_{i+1}) , el cuál toma el valor uno en el nodo x_i y cero en los nodos x_{i-1} y x_{i+1} ; mientras que su primera derivada es cero en todos los nodos x_{i-1} , x_i y x_{i+1} . De manera similar, $H_i^1(x)$ es el polinomio cúbico de Hermite con soporte en el intervalo (x_{i-1}, x_{i+1}) , el cuál toma el valor cero en todos los nodos x_{i-1} , x_i y x_{i+1} ; mientras que su primera derivada toma el valor uno en el nodo x_i y cero en los nodos x_{i-1} y x_{i+1} .

Un modo eficiente de construir las funciones de peso es aplicando el método de colocación. En este caso la colocación se aplica para satisfacer la primera condición de (12), es decir que las funciones de peso deben ser soluciones del operador adjunto homogéneo. Entonces resulta el sistema de colocación:

$$\mathcal{L}^* w_y^0(x^p, y^p) = 0; \quad p = 1, \dots, 4 \quad (23)$$

Sustituyendo la expresión de las funciones de peso w_y^0 Ec.(20) en la Ec. (23) y evaluando en los puntos de colocación se obtiene:

$$\sum_{\alpha=1}^4 C_y^\alpha \mathcal{L}^* N_y^\alpha(x^p, y^p) = \mathcal{L}^* B_y^0(x^p, y^p); \quad p = 1, \dots, 4. \quad (24)$$

donde C_y^α ; $\alpha = 1, \dots, 4$ son los coeficientes de las funciones de peso w_y^0 .

El sistema de ecuaciones que resulta es de dimensión 4×4 y se resuelve para cada nodo interior $i = 1, \dots, E_x - 1$; $j = 1, \dots, E_y - 1$ y para cada elemento rectangular Ω_y^λ , $\lambda = 1, \dots, 4$. Aquí E_x y E_y es el número de elementos por x y y respectivamente.

5.2 Funciones de Peso Cúbicas

Considerando las mismas condiciones que para el caso lineal, cuando las funciones son polinomios cúbicos en Σ_y , tenemos tres funciones de peso $w_y^\mu(x, y)$; $\mu = 0, 1$ y 2 , asociadas con cada nodo interior (x_i, y_j) en la subregión Ω_y . Donde $\mu = 0$ corresponde al grupo 0, $\mu = 1$ a la unión de las funciones de los grupos 1 y 3; y $\mu = 2$ a la unión de las funciones de los grupos 2 y 4. Las funciones $B_y^\mu(x, y)$ satisfacen condiciones cúbicas de frontera en Σ_y , mientras que las funciones $N_y^\alpha(x, y)$ son las mismas del caso lineal y se anulan en todo $\Sigma_y \cup \partial\Omega_y$.

Entonces, las funciones $w_y^\mu(x, y)$; $\mu = 0, 1$ y 2 , se definen como:

$$w_y^\mu(x, y) = B_y^\mu(x, y) + \sum_{\alpha=1}^4 C_y^\alpha N_y^\alpha(x, y); \quad (x, y) \in \Omega_y^\lambda; \quad \mu = 0, 1, 2; \quad \lambda = 1, \dots, 4. \quad (25)$$

$$\text{donde } B_y^0(x, y) = H_i^0(x) H_j^0(y), \quad B_y^1(x, y) = H_i^1(x) H_j^0(y) \quad \text{y} \quad (26)$$

$$B_y^2(x, y) = H_i^0(x) H_j^1(y); \quad \lambda = 1, \dots, 4$$

De modo análogo al caso lineal, las funciones de peso cúbicas

$w_{ij}^{\mu}(x, y)$; $\mu = 0, 1$ y 2 , se construyen aplicando el método de colocación.

6 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL MÉTODO DE COLOCACIÓN TREFFTZ-HERRERA

Una vez construidas las funciones de peso, nos restaría expresar de forma apropiada el promedio de la solución aproximada $\hat{u}(x, y)$, de manera que al sustituirla en la formulación variacional Ec.(18) nos permitiría obtener el sistema de ecuaciones algebraicas correspondiente. Una manera de hacerlo es como se procede usualmente en elementos finitos, usando una combinación lineal de funciones bases. Para escoger las funciones bases tenemos una amplia libertad de elección puesto que sólo necesitamos que sean funciones definidas en Σ . Una elección lógica, que aplicaremos en nuestra aproximación, es usar como funciones bases a las restricciones de las funciones de peso $w_{ij}^{\nu}(x, y)$ en Σ , es decir $B_{ij}^{\nu}(x, y)$, $\nu = 0, 1, 2$. La expresión de $\hat{u}(x, y)$ se completa agregando los términos que satisfagan las condiciones de frontera y de salto prescritas. Entonces, la aproximación de la solución buscada puede escribirse como:

$$\hat{u}(x, y) = \sum_{(k, l) \in \eta} \sum_{\nu=0}^{NF-1} U_{kl}^{\nu} B_{kl}^{\nu}(x, y) + \sum_{(r, s) \in \eta_s} u_{rs} B_{rs}^0(x, y) + \sum_{(k, l) \in \eta_{\Sigma}} \frac{\sigma}{2} [u_{\Sigma}]_{kl} B_{kl}^0(x, y); \quad (27)$$

donde η - es el conjunto de los nodos que tienen funciones de peso (base) asociadas, η_e - es el conjunto de todos los nodos que están en la frontera externa $\partial\Omega$, exceptuando las esquinas, η_{Σ} - es el conjunto de todos los nodos interiores que están en la frontera interna Σ asociados al salto prescrito, σ es un signo que toma el valor según sea el lado positivo o negativo de Σ con respecto a la normal $\underline{n}_{\Sigma}$, $u_{\partial\Omega} = u_r(x, y_s)$ y NF es el número de funciones de peso asociadas con cada nodo (para el caso de las funciones de peso lineales $NF = 1$, mientras que para las cúbicas $NF = 3$).

Al sustituir la expresión (27) para la solución aproximada $\hat{u}(x, y)$ y las funciones de peso $w_{ij}^{\mu}(x, y)$ en la Ec. (18) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$M_{ijkl}^{\mu\nu} U_{kl}^{\nu} = F_{ij}^{\mu}; \quad (28)$$

donde se aplica la convención para la suma, es decir que los índices repetidos están sumados sobre sus rangos,

$$M_{\eta kl}^{\mu\nu} = - \int_{\Sigma} B_{kl}^{\nu} \left[\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w_{\eta}^{\mu} \right] d\underline{x}; \quad y \quad (29)$$

$$F_{\eta}^{\mu} = \int_{\Omega} w_{\eta}^{\mu} f_{\Omega} d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} u_{\varepsilon} \underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w_{\eta}^{\mu} d\underline{x} + \sum_{(r,s) \in \eta_{\varepsilon}} u_{rs} \int_{\Sigma} B_{rs}^0 \left[\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w_{\eta}^{\mu} \right] d\underline{x} \quad (30)$$

$$+ \int_{\Sigma} j_{\Sigma}^0 \left(\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w_{\eta}^{\mu} + b_n w_{\eta}^{\mu} \right) d\underline{x} - \int_{\Sigma} w_{\eta}^{\mu} j_{\Sigma}^1 d\underline{x} + \sum_{(k,l) \in \eta_{\varepsilon}} \frac{\sigma}{2} [u_{\varepsilon}]_{kl} \int_{\Sigma} B_{kl}^0 \left[\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w_{\eta}^{\mu} \right] d\underline{x};$$

\$(k,l)\$ y \$(i,j) \in \eta, \mu, \nu = 0, \dots, NF-1\$

En general el sistema resultante es de nueve diagonales en bloques de $NF \times NF$. Por lo que en el caso de funciones de peso lineales la matriz del sistema Ec. (29) es simplemente de nueve diagonales, mientras que cuando se usan las cúbicas se obtiene una matriz de nueve diagonales en bloques de 3×3 .

7 EJEMPLOS NUMÉRICOS EN DOS DIMENSIONES

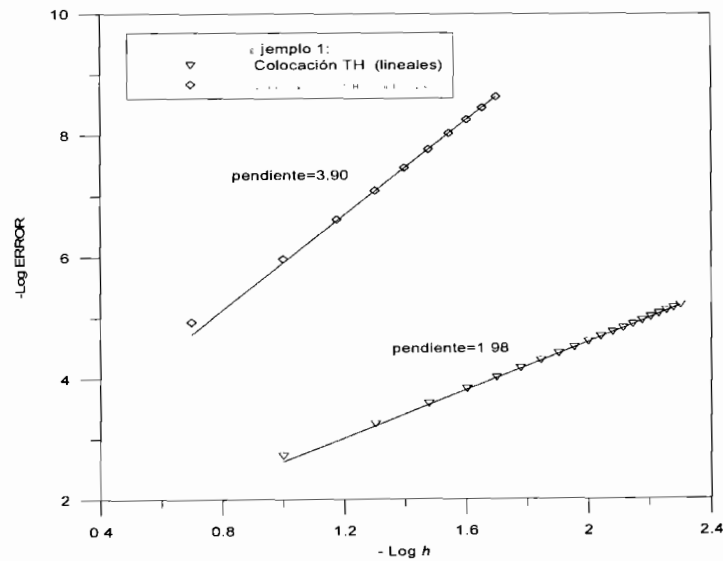
Los experimentos numéricos en dos dimensiones consistieron en resolver el PVFSP de las Ecs. (1), (2) y (3) donde las condiciones de frontera de tipo Dirichlet son impuestas por la solución analítica y las condiciones de salto son igual a cero cuando no se especifican. El dominio en todos los casos fue el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$.

Ejemplo	$\underline{a}$	$\underline{b}$	c	f_{Ω}
1	$a_{11} = 1 + x^2$ $a_{22} = 1 + y^2$ $a_{12} = a_{21} = 0$	$b_1 = y - 2,$ $b_2 = x - 2$	$2(x + y)$	$-(x' + y')e^{xy}$
2	$a_{11} = a_{22} = 1$ $a_{12} = a_{21} = 0$	$b_1 = b_2 = 1$	0	0
3	$a_{11} = a_{22} =$ $\begin{cases} 1; & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 4; & \frac{1}{2} < y \leq 1 \end{cases}$ $a_{12} = a_{21} = 0$	$b_1 = b_2 = 0$	1	$(1 - x^i - y^j)e^{xy};$ $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ $(1 - 4x^i - 4y^j)e^{xy};$ $\frac{1}{2} < y \leq 1$

Tabla 1: Definiciones de los coeficientes de los ejemplos numéricos.

Los coeficientes de la ecuación de cada uno de los ejemplos están dados en la Tabla 1 y las soluciones analíticas correspondientes son, para el ejemplo 1: e^{xy} , en el ejemplo 2: $e^x + e^y - 2$; para $y < \frac{1}{2}$, $e^x + e^y$; para $y = \frac{1}{2}$, $e^x + e^y + 2$, para $y > \frac{1}{2}$ con saltos prescritos $j_{\frac{1}{2}}^0(x, 0.5) = 4$ en $x \in [0, 1]$; y en el ejemplo 3: e^{xy} , con saltos prescritos $j_{\frac{1}{2}}^1(x, 0.5) = 3xe^{x/2}$ en $x \in [0, 1]$.

Todos los ejemplos se resolvieron para una partición uniforme ($h \equiv h_x = h_y$) del dominio rectangular, usando el método de colocación *TH* con polinomios lineales y cúbicos. Donde el número de elementos se tomó igual en ambas direcciones ($E = E_x = E_y$) y se incrementó sucesivamente desde 10 hasta 200, con incremento 10, para el caso de polinomios lineales, mientras que se tomó de 5 hasta 50, con incremento 5, para el caso con polinomios cúbicos. En los gráficos de las figuras 3, 4 y 5, se muestra la comparación de la convergencia h del método de colocación *TH* en términos del error medido con la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ que resultó en todos los casos $O(h^2)$ cuando se usan como funciones de peso polinomios lineales y $O(h^4)$ cuando son cúbicos, respectivamente.

**Figura 3 :** Convergencia del método de colocación *TH* usando funciones de peso lineales y cúbicas para un operador elíptico no simétrico (Ejemplo 1).

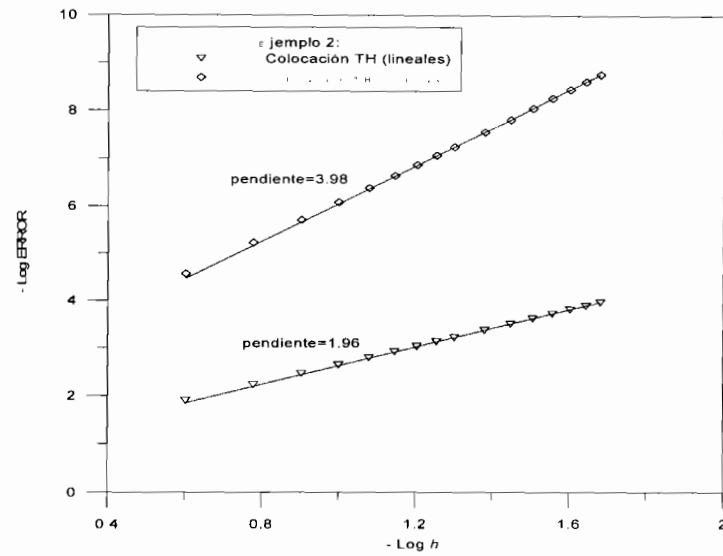


Figura 4: Convergencia del método de colocación TH usando funciones de peso lineales y cúbicas en presencia de saltos prescritos (Ejemplo 2).

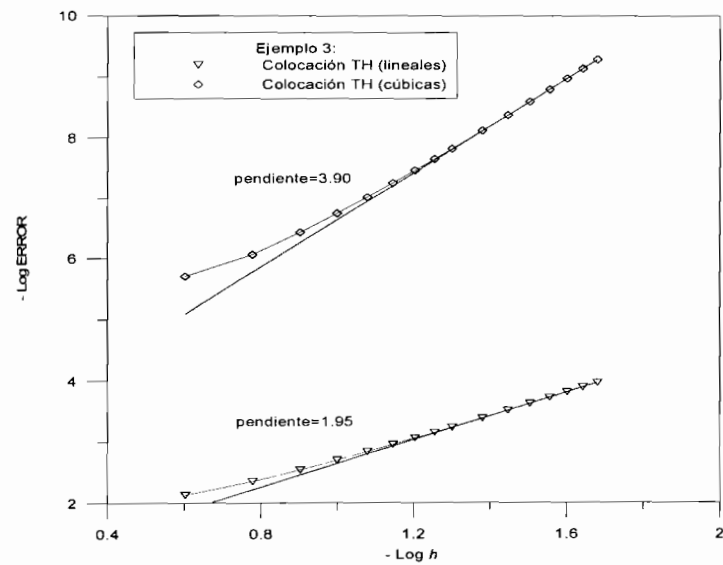


Figura 5: Convergencia del método de colocación TH usando funciones de peso lineales y cúbicas en presencia de coeficientes discontinuos (Ejemplo 3).

8 REFERENCIAS

- [1] B. Bialecki y G. Fairweather, "Orthogonal Spline Collocation Methods for Partial Differential Equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **128**, 55-82 (2001).
- [2] I. Herrera, "Trefftz Method: A General Theory", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **16** (6), 561-580 (2000).
- [3] I. Herrera, "Una Teoría de Métodos de Descomposición de Dominio", (presente volumen).
- [4] International Scientific Committee for Domain Decomposition, "Proceedings of 13 conferences on Domain Decomposition Methods", www.ddm.org, (1988-2000).
- [5] A. Quarteroni y A. Valli, *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, (1999).
- [6] I. Herrera y M. Díaz, "Indirect Methods of Collocation: Trefftz-Herrera Collocation", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **15**(6), 709-738 (1999).
- [7] I. Herrera, R. Yates y M. Díaz, "General Theory of Domain Decomposition: Indirect Methods", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, (en prensa) (2001).
- [8] I. Herrera, "Unified approach to numerical methods. Part 1. Green's formulas for operators in discontinuous fields", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **1**(3), 12-37 (1985).
- [9] I. Herrera, R.E. Ewing, M. A. Celia y T.F. Russell, "Eulerian-Lagrangian localized adjoint method: the theoretical framework", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **9**(4), 431-457 (1993).
- [10] M.A. Celia, T.F. Russell, I. Herrera y R.E. Ewing, "An Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method for the Advection-Diffusion Equation", *Advances in Water Resources*, **13**(4), 187-206 (1990).
- [11] I. Herrera, G. Herrera y J. Garfias, "ELLAM First Decade: A Review". *Computation Methods in Water Resources: Computational Methods, Surface Water Systems and Hidrology*, Eds. Bentley L.R. et al., Balkema, Rotterdam, 591-595 (2000).
- [12] Berlanga, R. and I. Herrera, "The Gauss Theorem for Domain Decompositions in Sobolev Spaces", *Applicable Analysis: An International Journal*, **76** (1-2), 67-81(2000).
- [13] I. Herrera, "Boundary Methods. A Criterion for Completeness", *Proc. National Academy of Sciences, USA*, **77**(8), 4395-4398 (1980).