EL MÉTODO DE COLOCACIÓN TREFFTZ-HERRERA USANDO FUNCIONES BILINEALES DE PESO

Martín Díaz Viera [1,2], Ismael Herrera Revilla [2,3]
[1] Instituto de Geofísica y Astronomía , MCT y MA, Cuba.
[2] Instituto de Geofísica, UNAM, México.
[3] Instituto de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, UNAM, México.
e-mail: mdiaz@quetzalcoatl.igeofcu.unam.mx
Fax: (525) 622-4136

ABSTRACT
The object of the present work is develop parallel algorithms based on Trefftz-Herrera Collocation Method for solving boundary value problems of linear partial differential equations. In particular, the solution of the most general second order elliptic equation in two dimensions is discussed, and bilinear weighting functions are constructed. Some perfomance and eficiency test are evaluated comparing different simple cases. Promising results are obtained that may be extended to nonstationary problems.

Key Words: *Trefftz-Herrera, collocation, bilinear weighting functions*

1.- INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha incrementado el interés teórico y práctico por los métodos de descomposición de dominio para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales puesto que mediante su aplicación se pueden desarrollar algoritmos que trabajen en paralelo los cuales hacen un uso más eficiente de los recursos que ofrecen las modernas supercomputadoras. El empleo de estos métodos hace posible la solución de problemas cada vez más complejos por su naturaleza (dominios con una forma altamente irregular pueden ser descompuestos en subdominios regulares) y por el tamaño de los datos que se pueden manejar (pueden llegar a ser del orden de los millones) lo cual es muy común en la modelación de diversos fenómenos en las Ciencias de la Tierra.

En el presente trabajo se hizo una revisión de los métodos de descomposición de dominio más usados en la actualidad [1,2]. A partir del Método del Adjunto Localizado [3-6] se desarrolla la metodología general para la construcción de las funciones de peso mediante Colocación Trefftz-Herrera [8-10]. Se compara el esquema de 9 puntos que se obtiene cuando se usan funciones de peso bilineales [11,12].

2.- EL MÉTODO DE COLOCACIÓN TREFFTZ-HERRERA

El método de Trefftz Generalizado [8] se caracteriza por el hecho de que las funciones de prueba satisfacen:

$L^{*}w=0 \quad \text{en } \Omega$ (2.1a)

$w=0 \quad \text{en } \partial\Omega$ (2.1b)

Como ha sido propuesto en [7] se pueden usar métodos de colocación para construir las funciones de peso ya que resulta muy eficiente el uso de puntos de colocación Gaussianos que satisfagan a la ecuación adjunta (2.1a) en una manera aproximada.
Una alternativa al uso de la *colocación tradicional* sería la *colocación TH* basada en el uso de un sistema de funciones de peso TH completo[8]. Mientras que el primero es un método constructivo directo, el segundo es aplicado de manera indirecta. Es decir, que la colocación es usada para construir funciones de peso que satisfagan a la ecuación diferencial adjunta homogénea.
El método de *colocación TH* tiene como ventaja que requiere de la continuidad de las funciones de peso pero no así de la derivada de primer orden (para subdominios con traslape), mientras que la *colocación tradicional* requiere de la continuidad de la función y de su primera derivada. Otra ventaja es que en los sistemas de ecuaciones resultantes mediante *colocación tradicional* incluye a los valores de la función y su derivada, mientras que en *colocación TH* sólo incluye a la función, resultando sistemas más simples y pequeños. Una ventaja adicional es que cuando la *colocación TH* se aplica a operadores elípticos simétricos y las funciones de peso son usadas como funciones bases, la matriz del sistema resultante es positiva definida y simétrica, lo cual no ocurre en *colocación tradicional*.

3.- COLOCACIÓN TH USANDO FUNCIONES DE PESO BILINEALES

Si restringimos nuestra atención al caso en que usamos sólamente las funciones de peso del grupo 0), entonces sólo pueden ser preescritos valores de frontera lineales en Σ.

Aplicaremos el procedimiento de Colocación TH al problema con valores de frontera (3.1) que se obtiene si **a**. es la matriz identidad y **b**≡0, **c**≡0.

Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = f_\Omega \qquad \text{in } \Omega=[0,1]\mathrm{X}[0,1] \qquad (3.1a)$$

Condiciones de Frontera

$$u(0,y)=-y^2; \qquad u(1,y)=1-y^2; \qquad (3.1b)$$
$$u(x,0)=x^2; \qquad u(x,1)=x^2-1;$$

Nótese que sólo una función de peso w^0 es asociada con cada nodo interior y que $w^0_{ij}(x,y) = B^0_{ij}(x,y)$; donde $C^0_j = 0$, ∀*j*=1,...,4. Debido a que el operador Laplace es autoadjunto las funciones de peso y bases son las mismas. La aproximación de la solución buscada puede escribirse como:

$$\hat{u}(x,y) = \sum_{k=1}^{E} \Psi_k + \sum_{ij} U_{ij} w^0_{ij} \qquad (3.2)$$

donde Ψ_K es continua, se anula fuera de Ω_K , satisfece las condiciones de frontera (3.1b) en $\Omega_K \cap \partial\Omega$ y $L\Psi_K$=0, in Ω_K. Aquí se entiende que la segunda suma es sobre todos los pares (i,j) correspondientes a los nodos interiores.
Entonces si aplicamos el principio variacional [4,8] se obtiene un esquema de colocación TH de nueve puntos (Fig 1a). En este caso resulta el sistema de ecuaciones

$$M_{klij} U_{ij} = F_{kl} \tag{3.3}$$

donde se entiende la convención de la suma: indices repetidos se suman sobre sus rangos. La matriz resultante $\underline{\underline{M}}$ es nonadiagonal y simétrica cuando los nodos son numerados usando el orden natural.

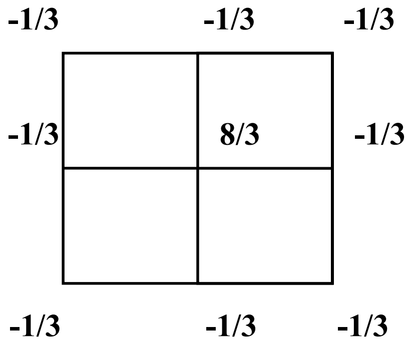

Fig. 1a:
Esquema de Colocación TH de 9 puntos

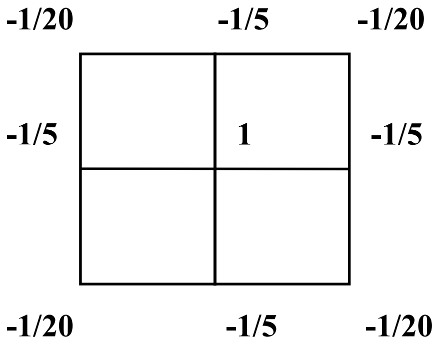

Fig. 1b:
Esquema en Diferencias Finitas de 9 puntos

Se comparó el esquema de 9 puntos obtenidos con colocación TH con el esquema tradicional de 9 puntos en diferencias finitas según Collatz [13]. Los lados de los cuadrados de las particiones fueron tomados sucesivamente como: .2, .1, .05, .025, .02, .01, .005, .0025, y .002. Los sistemas de ecuaciones resultantes fueron resultos por Gradiente Conjugado para ambas discretizaciones.
Se encontró que el número de de iteraciones requerida para alcanzar un nivel de precisión dado en los nodos no es significativamente diferente (Fig. 2). Sin embargo las propiedades interpolatorias del esquema de 9 puntos con Colocación TH es claramente superior.
Para el esquema de Colocación TH la interpolación fué realizada mediante Ec.(3.2), mientras que para el esquema en Diferencias Finitas se usó interpolación por splines bicúbicos (SURFER para WINDOWS). Los resultados son comparados en la Fig.3. En la misma se ve que los valores absolutos de los errores al centro de los cuadrados elementales son de varios órdenes de magnitud superior para el esquema en Diferencias Finitas.

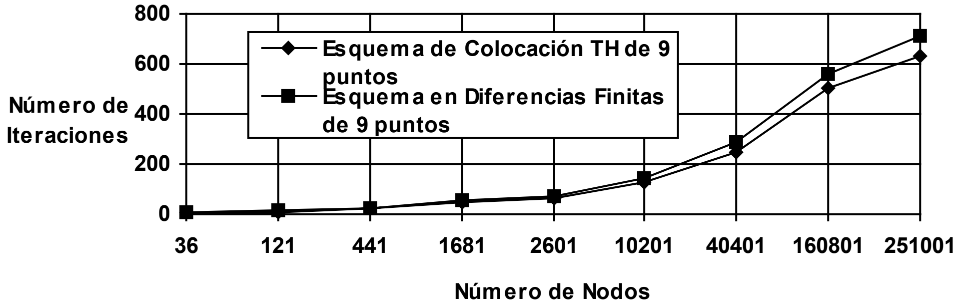

Fig. 2: Número de iteraciones para alcanzar un orden de exactitud de $\varepsilon=10^{-16}$

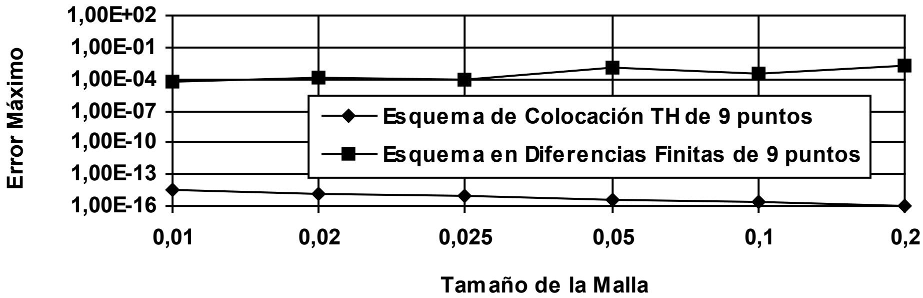

Fig. 3: Comparación de los valores absolutos de los errores para diferentes anchos de malla

REFERENCIAS

1.- *Domain Decomposition Methods for Partial Diferential Equations ,* Glowinski R., et al. 1st Volume, 1988.
2.- Israeli, M. and Vozovoi L., *Domain decomposition methods for solving parabolic PDEs on Multiprocessors,* Applied Numerical Mathematics, 12 pp, 193-212, 1993.
3.- I. Herrera, R.E. Ewing., M.A. Celia., and T.F. Russell, *Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method: The Theoretical Framework*.- Numerical Methods for Partial Differential Equations 9(4), pp 431-457, 1993.
4.- I. Herrera, *Localized Adjoint Methods: A New Discretization Methodology*, Chapter 6 of the book: "Computational Methods in Geosciences", W.E. Fitzgibbon & M.F. Wheeler Eds., SIAM, pp 66-77, 1992 (Invited chapter).
5.- I. Herrera, *Localized Adjoint Method: Topics for Further Research*, Computational Methods in Water Resources IX, Vol. I: Numerical Methods in Water Resources, T.F. Russell, R.E. Ewing, C.A. Brebbia, W.G. Gray & G.F. Pinder, Computational Mechanics Publications, Southapmton & Boston, pp 9-12, 1992 (Invitado).
6.- I. Herrera, Localized Adjoint Method as a Boundary Method, Boundary Elements XIV, Volume 2, Stress Analysis and Computational Aspects, Eds.: C.A. Brebbia et al., Elsevier & CMP, pp 573-590, London & New York, 1992.
7.- I. Herrera, J. Guarnaccia and G.F. Pinder, *Domain Decomposition Method for collocation Procedures*, Computational Methods in Water Resources X, Vol 1, Eds. A. Peters., et.al., Kluwer Academic Publishers, International Conference on Computational Methods in Water Resources, Heidelberg, pp. 273-280, July, 1994. Invited paper.
8.- I. Herrera, *Trefftz-Herrera Domain Decomposition*, Special Volume on Trefftz Method: 70 years anniversary; Advances in Engineering Software, 24, pp 43-56, 1995 (Invited Chapter).
9.- I. Herrera, *Domain Decomposition Methods for Model Paralelization*, 2nd UNAM-CRAY Supercomputing Conference "Numerical Simulations in the Enviromental and Earth Sciences", July, 1995.
10.- I. Herrera, A. Camacho, J. Hernández, J. Garfias, *Paralelization using TH-Collocation*, 2nd UNAM-CRAY Supercomputing Conference "Numerical Simulations in the Enviromental and Earth Sciences", July, 1995.
11.- I. Herrera, *Trefftz Method, Domain Decomposition and TH-Collocation*, XI International Conference on Computational Methods in Water Resources, Cancún, México. 1996 (en prensa).
12.- I. Herrera, M. Díaz-Viera, *A nine point TH-Colocation*, Numerical Methods for Partial Differential Equations , 1996 (en preparación).
13.- Collatz L., *Numerical Treatment of Differential Equations*, Third Edition, Springer-Verlag, 1960.